O poučce polynomické.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Má-li se nějaký polynom, spořádaný podlé stoupajících mocnin nějaké veličiny, dejme tomu x, uvésti na mocninu n-tou, což znamená, aby se vyvinula stejnina

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^n$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{mn} x^{mn}, \qquad (1)$$

vyskytují se obtíže jedině při vyčíslování hodnot koëfficientů

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{mn}, \qquad (2)$$

jež závisí nejen na různých mocninách polynomu, nýbrž i na součinitelích v něm obsažených

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m. \qquad (3)$$

Na první pohled se pozná sice, že tu platí

$$A_0 = a_0^n, \quad A_{mn} = a_m^n,$$

taktéž snadno se obdrží několik málo prvních a posledních koëfficientů, jako na př.

$$A_1 = n a_0^{n-1} a_1, \quad A_{mn-1} = n a_m^{n-1} a_{m-1},$$

avšak čím dále se postupuje, tím složitější se objevují výrazy, jimiž se členové řady (2) vyjádřují pomocí členů řady (3) a příslušných mocnitelů, jakož poznal již *Leibnic*, dávaje první zprávu o polynomické poučce svému příteli *J. Bernoullimu* (6/16 května 1695), a jakož se pozná, když se určitý případ provádí*). A též se stanoviska ryze theoretického jest tu prospěšno znáti spůsob, jakým se neodvisle který koli člen řady (2) dá přímo vyjádřiti, což z následujících řádků vyplývá.

Položíme-li pro krátkost

$$y = [f(x)]^n, \qquad (5)$$

*) Viz na př. *Studnička* „Algebraické tvarosloví" pag. 52.

4

kdež zavedeno označení

$$\left.\begin{array}{l} f\,(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \\ \text{obdržíme, derivuje-li se postupně,} \\ f'\,(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + m a_m x^{m-1}, \\ f''\,(x) = 2a_2 + 2\,.\,3\,a_3 x + \ldots + m\,(m-1)\,a_m x^{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(k)}(x) = k!\,a_k + (k+1)!\,a_{k+1} x + \ldots \end{array}\right\} \quad (6)$$

Podle poučky Mac-laurinovy platí pak, zavedeme-li označení kratší

$$\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_{x}^{0} = y_0^{(k)}, \qquad (7)$$

což znamená, že v k-té derivaci funkce y má se za x vložiti nulla,

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}\,x + \frac{y_0''}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{y^{(mn)}}{(mn)!}\,x^{mn}, \qquad (8)$$

poněvadž podlé vzorce (5) vyplývá patrně

$$y_0^{(p)} = 0 \text{ pro } p > mn.$$

Porovnáme-li tedy řadu (8) s řadou (1), poznáme, že všeobecně bude

$$A_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}, \qquad (9)$$

čímž úloha naše jest řešena, jakmile známe vyčísliti hodnotu symbolu (7).

A té známosti abychom dosáhli, uvažme, že z dřívější stejniny (5) čili z relace kratčeji psané

$$y = f^n$$

plyne, derivujeme-li,

$$y' = n f^{n-1} f';$$

znásobíme-li tedy první rovnici veličinou nf', druhou pak pouhým f a porovnáme-li výsledky, což znamená vyloučení veličiny f^n z obou rovnic, obdržíme

$$nyf' - fy' = 0.$$

Derivujeme-li nyní postupně, zjednáme si soustavu vzorců tento v čelo kladouce, tuto:

$$\begin{array}{l} nf'y - fy' = 0 \\ nf''y + (n-1)f'y' - fy'' = 0 \\ nf'''y + (2n-1)f''y' + (n-2)f'y'' - fy''' = 0 \\ nf^{\mathrm{IV}}y + (3n-1)f'''y' + (3n-3)f''y'' + (n-3)f'y''' - fy^{\mathrm{IV}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nf^{(k)}y + (nk-n-1)f^{(k-1)}y' + \ldots + (n-k+1)f'y^{(k-1)} - fy^{(k)} = 0, \end{array}$$

Ze soustavy této, čítající k rovnic a obsahující linearně $(k+1)$ veličinu

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(k)},$$

možná všechny střední, vyjímajíc tedy první a poslední, vyloučiti, čímž se obdrží přiměřeným spojením výsledek

$$\left|\begin{array}{lllll} nf'\ y+0, & -f, & 0, & \ldots, & 0 \\ nf''\ y+0, & (n-1)f', & -f, & \ldots, & 0 \\ nf'''\ y+0, & (2n-1)f'', & (n-2)f', & \ldots, & 0 \\ nf^{\mathrm{IV}}\ y+0, & (3n-1)f''', & (3n-3)f'', & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ nf^{(k)}\ y-f\,y^{(k)}, & (nk-n-1)^{(k-1)}, & \ldots, & \ldots, & (n-k+1)f \end{array}\right| = 0.$$

V tomto determinantu jsou prvky prvního sloupce složeny ze dvou částí, takže možná jej rozložiti v součet determinantů dvou, z nichž první má v prvním sloupci první části, druhý pak druhé části složených prvků, načež determinant snadno se vyčíslí, takže po krátké redukci se obdrží

$$y^{(k)} = nf^{n-k}\left|\begin{array}{lllll} f', & -f, & 0, & \ldots, & 0 \\ f'', & (n-1)f', & -f, & \ldots, & 0 \\ f''', & (2n-1)f'', & (n-2)f', & \ldots, & 0 \\ f^{\mathrm{IV}}, & (3n-1)f''', & (3n-3)f'', & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(k)}, & (nk-n-1)f^{(k-1)}, & \ldots, & \ldots, & (n-k+1)f' \end{array}\right|, \quad (10)$$

ve kterémžto vzorci jen třeba $x=0$ položiti, aby se zjednala hodnota pro vzorce (9) potřebná.

Že tu všeobecně znamená

$$f^{(k)}(0) = k!\,a_k, \quad (11)$$

patrno z derivací předcházejících (6), takže všechny prvky determinantů (10) jsou veličiny stálé; v případě pak zvláštním, kde

$$k=0,$$

obdrží se přímo, což i vzorcem (4) naznačeno,

$$y_0 = f_0^{\,n} = a_0^{\,n}.$$

Spojíme-li tedy výsledky tyto dohromady, obdržíme konečně

$$A_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \frac{na_0^{\,n-k}}{k!}\left|\begin{array}{llll} 1!\,a_1, & -a_0, & 0, & \ldots \\ 2!\,a_2, & (n-1)\,a, & -a_0, & \ldots \\ 3!\,a_3, & (2n-2)\,2!\,a_2, & (n-2)\,a_1, & \ldots \\ 4!\,a_4, & (3n-1)\,3!\,a_3, & (3n-3)\,2!\,a_2, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right| \quad (12)$$

Jak patrno, poskytuje vyčíslení tohoto determinantu, jakmile jest k číslo trochu jen větší, dosti značných obtíží, ačkoli nelze neuznati, že s theoretického hlediska vzorec tento poskytuje mnohých výhod; jen když funkce f jsou malého rozměru, takže záhy se stane

$$f^{(k)}(0) = 0,$$

možná i v praksi s prospěchem vzorce tohoto užívati.

Jest-li na př. předložen *binom*

$$f(x) = a + x,$$

jest patrně

$$f(0) = 1, f'(0) = 1,$$

a mimo to všeobecně pro $k > 1$

$$f^{(k)}(0) = 0;$$

a tu poskytuje vzorec (10) napřed

$$y_0^{(k)} = na^{n-k} \begin{vmatrix} 1, & & & & \\ 0, & (n-1), & & & \\ 0, & 0, & (n-2), & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & n-k+1 \end{vmatrix}$$

anebo pomocí vzorce (9) jako ze vzorce (12)

$$A_k = (n)_k a^{n-k},$$

jakož plyne z poučky *binomické* odjinud známé.

Podobně bychom obdrželi pro *trinom* čili pro

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

$$= a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2\right),$$

zavedeme-li kratší označení

$$\frac{a_1}{a_0} = \alpha, \frac{a_2}{a_0} = \frac{\beta}{2}$$

a položíme-li pak za základ trinom jednodušší

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2,$$

především pro jednotlivé derivace

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \beta,$$

a nad to pro $k > 2$ všeobecně opět

$$f^{(k)}(0) = 0;$$

ze vzorce (10) obdrží se pak snadno

$$\frac{y_0^{(k)}}{n}=\begin{vmatrix} \alpha, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \beta, & (n-1)\alpha, & -1, & \ldots, & 0 \\ 0, & (2n-1)\beta, & (n-2)\alpha, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & (3n-3)\beta, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & (n-k+1)\alpha \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Determinant tento jest *řetězcovým* *) a představuje nám $1/n$ *jmenovatele k-té přibližné hodnoty* řetězce

$$\cfrac{1}{n\alpha+\cfrac{n\beta}{(n-1)\alpha+\cfrac{(2n-1)\beta}{(n-2)\alpha+\cfrac{(3n-3)\beta}{(n-3)\alpha+\vdots}}}} \quad (14)$$

kterýž má tu zvláštnost do sebe, že jeho čitatelové i dělitelové jsou složeni z členů řady

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n;$$

platí-li totiž všeobecně

$$u_k = n - k + 1$$

jest k-tý jmenovatel jak patrno,

$$a_k = \alpha u_k \quad (15)$$

a k-tý čitatel, podobně

$$b_k = \beta S_k. \quad (16)$$

Značí-li tedy q_k příbližného jmenovatele k-tého, příslušného řetězci (14), bude konečně

$$A_k = \frac{nq_k}{k!}, \quad (17)$$

z čehož patrno, že *koëfficienty trinomialní* jsou v tomto případě vyjádřeny *řetězcovými determinanty*. A poněvadž se rekurrentním spůsobem snadněji ustanoví hodnota q_k nežli se vyčíslí determinant (13), poznáváme, že i pro praksi jest tu dosaženo výhody nemalé.

Jest-li na př. ustanoviti

$$(1+3x+2x^2)^8 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{16} x^{16},$$

platí $\alpha = 3$, $\beta = 4$, řetězec pak příslušný jest

*) Viz *Studnička* „Algebraické tvarosloví“ pag. 68.

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{21+\cfrac{60}{18+\cfrac{84}{15+\cfrac{104}{12+\dots}}}}}$$

A poněvadž všeobecný vzorec rekurrentní jest

$$q_k = a_k\, q_{k-1} + b_k\, q_{k-2}, \qquad (18)$$

a v tomto případě zvláště, jak patrno, platí

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3,$$

obdržíme k vyčíslení dalších jmenovatelů schema

b_k	4,	60,	84,	104,	...
q_k	3,	67,	1386,	26418,	...
a_k	3,	21,	18,	15,	...

takže tu bude především $A_0 = 1$, a užijeme-li vzorců (17) a (18), dále

$$A_1 = \frac{8}{1}\,3 = 24,$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= 21\,.\,3 + 4\,.\,1 = 67 &&, \; A_2 = \frac{8}{2}\,67 = 268,\\
q_3 &= 18\,.\,67 + 60\,.\,3 = 1386 &&, \; A_3 = \frac{8}{3!}\,1386 = 1848,\\
q_4 &= 15\,.\,1386 + 84\,.\,67 = 26418 &&, \; A_4 = \frac{8}{4!}\,26418 = 8806,\\
q_5 &= 12\,.\,26418 + 104\,.\,1386 = 461160 &&, \; A_5 = \frac{8}{5!}\,461160 = 30744
\end{aligned}$$

atd., atd.

I jest podle podle toho

$$(1 + 3x + 2x^2)^8 = 1 + 24x + 268x^2 + 1848\,x^5 + 8806\,x^5 + 30744\,x^5 + \dots$$

Že by se tu početní mechanismus ještě dal zjednodušiti, poznává se z toho, že jmenovatel b_k jest dělitelný číslem k, jakož patrno ze vzorce (16).