Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Adolf Pařízek

Vyznačení tvaru trojúhelníku veličinou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 5, 559--568

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123517

Vyznačení tvaru trojúhelníku veličinou.

Podává

Dr. Adolf Pařízek,
professor gymnasia ve Vysokém Mýtě.

Trojúhelníky mají tehdy stejný tvar, jsou-li podobny, totiž shodují-li se v poměru stejnolehlých stran a v stejnolehlých úhlech. Uvažujíce pouze tvar trojúhelníků budeme trojúhelníky podobné považovati za souhlasné ve tvaru; a bude tedy tvar záležeti jenom na poměru stran a úhlech trojúhelníků.

Planimetrie rozeznává dle vzájemné velikosti stran trojúhelník rovnostranný a nerovnostranné trojúhelníky. Rozdělení toto jest však pouze kvalitativné, neb neudává se dosud, jak by bylo možno stanoviti, který ze dvou nerovnostranných trojúhelníků svou nerovnostranností druhý předčí — mohli bychom říci — který jest nerovnostrannější. Tím méně však lze udati, kolikrát jest nerovnostrannější, tak jako o úsečkách můžeme rozhodnouti, která jest delší, i kolikrát. A přece jest patrno často i pouhému pohledu na trojúhelníky, že některé z nich svou nerovnostranností vynikají, jiné blíží se rovnostranným. A tu shledáme, že vynikající úlohu má i největší úhel, jakož jest zcela přirozeno. Trojúhelník má vždycky totiž dva ostré úhly, třetí — největší — může býti ostrý, pravý neb tupý. Každý však vida narýsovány trojúhelníky ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý jistě prohlásí, že tento předčí oba druhé nerovnostranností, první že nejvíce blíží se rovnostrannému, a pravoúhlý že tvoří přechod mezi obojími.

Z toho vidíme, že možno tvary trojúhelníků aspoň srovnávati, a tato úvaha obírá se otázkou: pokud lze toto srovnávání prováděti, lze-li je rozšířiti i na kvantitativní a jak se to může díti?

Uvažme především, že tvar trojúhelníků má dva stupně volnosti: nebude tedy možno všechny tvary trojúhelníků srovnati v jedinou řadu, nýbrž bude již v zásadě nutno některé tvary trojúhelníků, ač nikoli podobných, vedle sebe na týž stupeň nerovnostrannosti připustiti čili je za stejně nerovnostranné prohlásiti. Tak zvláště pravoúhlé trojúhelníky by bylo snadno možno v nerovnostrannosti stejnému stupni přiřaditi tak, že by všechny trojúhelníky ostroúhlé byly na nižším, všechny tupoúhlé byly na vyšším stupni než pravoúhlé.

Uvážíme-li dále, že trojúhelník rovnostranný vlastnosti nerovnostrannosti vůbec postrádá a to jediný mezi všemi tvary trojúhelníku, uznáme, že jemu bude náležeti stupeň nejnižší — kvantitativně nejpřiměřenější nullový — a že na tom stupni bude sám jediný (rozumí se ovšem z trojúhelníků reálných, k nimž jediné budeme dále přihlížeti).

Jsou-li však dva stupně volnosti pro tvar trojúhelníků, lze i dvojím, a sice jen dvojím neodvislým a druhému neodporujícím způsobem stupně této řady přidružiti k číslům řady přirozené; a to asi tak, jako body v rovině — mající dva stupně volnosti — lze sdružiti v křivočaré soubory, jichž možno analyticky jako soustavy křivek o proměnném parametru pojímati, a každé křivce jednoznačnou funkci parametru jako číslo stupňové přiděliti. Toto sdružení a přidělení parametrům lze i druhým způsobem, třetím atd. vůbec kolikakoliv způsoby provésti, ale každou křivku třetí, čtvrté soustavy i kterékoliv další lze užitím parametrů, v prvých dvou soustavách přijatých, jakožto souřadnic, vyjádřiti analytickou rovnicí.

Konečně uvažme, že číselné vyjádření stupně nerovnostrannosti musí býti souměrnou funkcí všech úhlů — neb stran; neboť, vyměníme-li v trojúhelníku strany, nezmění se ve svém tvaru. Ze souboru těchto úvah vysvítá, že nutno nalézti význačnou kvantitativní vlastnost pro trojúhelník rovnostranný, která by v téže hodnotě se při žádném jiném trojúhelníku nevyskytala, nýbrž vždy větší hodnotou byla představena, čím patrnější jest nerovnostrannost jich, neb čím větší jest největší úhel proti ostatním.

Trojúhelník rovnostranný jest pravidelným trojúhelníkem, v jehož středu splynuly společné průsečíky symmetrál stran, těžnic a výšek. Ačkoliv běh přímky Eulerovy jest tu neurčitým, jest úsečka její omezená průsečíkem symmetrál stran a průsečíkem výšek úplně určitá a má hodnotu nullovou.

Pro krátkost výrazu budeme ji dále jmenovati úsečkou Eulerovou a označovati písmenem e. Platí tedy pro trojúhelník rovnostranný, ale také jen pro tento $e = 0$, neb při všech ostatních průsečík symmetrál stran k tou měrou ustupuje od průsečíku výšek v, jak trojúhelník se stává nerovnostrannějším, při čemž ovšem těžiště t leží stále ve třetině od bodu k na úsečce Eulerově čítané. Poněvadž pak při sestrojení bodů k a v žádná strana nevyniká, bude číselné vyjádření veličiny e souměrným úkonem stran. Sama tato úsečka by se však přímo pro posouzení stupně nerovnostrannosti nehodila a to proto, že průběh (směr) její jest dvojznačný, a dále, že v trojúhelnících podobných není stejná, nýbrž úměrná kterékoliv úsečce jiné. Dvojznačnost vězí v obojím znaménku, a tedy ji odstraníme uvažováním čtverce e^2 jejího, který ovšem jest pak jednoznačný a sice kladný. Druhou závadu odstraníme srovnáváním s jinou, stejnorodou a taktéž souměrnou veličinou trojúhelníku, za niž velmi dobře se hodí poloměr kružnice opsané, kterýž jaksi tu vyznačuje velikost trojúhelníku. A tak bychom měli úkon pro vyznačení nerovnostrannosti ε trojúhelníku dán výrazem

$$\varepsilon = \frac{e^2}{r^2}. \tag{1}$$

Úkon tento měřící nerovnostrannost trojúhelníků nazývejme Eulerovým k připomenutí úsečky Eulerovy e, kteráž v něm se vyskytuje.

Dalším úkolem naším bude tedy přicházející tu úsečky e a r úhly vyjádřiti, což provedeme tak, že nejprve Eulerovu úsečku — poněvadž vzorce její nejsou všeobecně známy — vyjádříme stranami.

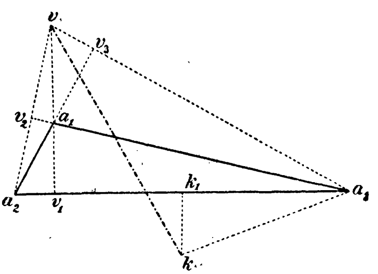
Budiž uvažovaný trojúhelník $a_1\, a_2\, a_3$, strany jeho označme dle protějších vrcholů a_1, a_2 a a_3; výšky jeho dopadají v bodech v_1, v_2, v_3 a protínají se ve společném průsečíku v, úsečky z tohoto bodu k patám měřené buďtež v', v'' a v'''. Každou výškou rozpadá se příslušná strana ve dvě části, jež označíme připojením přípony sousední strany k označení strany celistvé; na př. strana a_1 rozpadá se bodem v_1 v části $\overline{a_2 v_1} = a_{13}$ a $\overline{v_1 a_3} = a_{12}$, obdobně ostatní strany. Konečně budiž k střed kružnice opsané, jejíž poloměr buď r, z něho spusťme na stranu a_1 kolmici, symmetralu strany do bodu k_1, jejíž úsečku označme k_1, úsečku $\overline{v_1 k_1}$ značme a_{11}. Úsečka Eulerova $\overline{vk} = e$

jest tu kosým ramenem pravoúhlého lichoběžníku vv_1k_1k, jehož ramena se ovšem v našem obrazci (a vždy při trojúhelníku tupoúhlém) vzájemně protínají. Jest pak tu dle věty Pythagorovy čtverec přepony

(2) $$e^2 = (k_1 + v')^2 + a_{11}{}^2,$$

kdež ovšem nutno úsečky se tu vyskytnuvší stranami trojúhelníků vyjadřovati. A sice úsečku k_1 určíme z $\triangle kk_1a_3$ pravoúhlého, v němž jest poloměr r přeponou. Bude pak

$$k_1^2 = r^2 - \frac{1}{4}a_1^2.$$



Užijeme-li nyní známého vzorce pro poloměr

$$r = \frac{a_1a_2a_3}{4\varDelta},$$

a pro obsah trojúhelníku

$$16\varDelta^2 = -a_1^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 - a_2^4 + 2a_2^2a_3^2 - a_3^4,$$

vyjde po snadné úpravě

(3) $$k_1 = \frac{a_1}{8\varDelta}(a_1^2 - a^2 - a_3^2),$$

kdež znamení při odmocnění zvoleno tak, aby úsečka byla kladná. Při trojúhelníku ostroúhlém bylo by ovšem nutno ve vzorci (3) znamení po pravé straně v opačné proměniti. Poněvadž pak i ve vzorci (2) jest místo součtu rozdíl, další výsledky budou správny i pro trojúhelníky ostroúhlé. Při pravoúhelném trojúhelníku jest střed k na přeponě v bodě k_1 a úsečka $k_1 = 0$; na znaménku ovšem nesejde.

Pro stanovení úsečky v' srovnávejme trojúhelníky pravoúhlé, jež shodují se v ostrém úhlu a jsou tedy podobny, kde v jednom úsečka ta se vyskytuje, na př.

$$\triangle\, a_2 v_1 v \sim \triangle\, a_2 v_2 a_3 .$$

Nahradíme-li vyskytující se výšku trojúhelníku podílem dvojnásobného obsahu příslušnou stranou, obdržíme nejprv rovnici

$$v' = \frac{a_2 a_{13} a_{21}}{2\Delta}. \tag{4}$$

K ustanovení úseků stran a_{13} a a_{21} uvažujme trojúhelníky pravoúhlé $a_2 v_1 a_1$ a $a_3 v_1 a_1$. Společnost jedné odvěsny jejich vyjadřuje rovnice

$$a_{12}^2 - a_{13}^2 = a_2^2 - a_3^2 ;$$

poněvadž však oba úseky jsou úseky téže strany a doplňují se na ni, platí dále

$$a_{12} + a_{13} = a_1 .$$

Podíl posledních dvou rovnic však jest

$$a_{12} - a_{13} = \frac{a_2^2 - a_2^3}{a_1} .$$

Tato s předešlou tvoří lineárnou soustavu, z níž vyloučením a_{12} dostaneme potřebný vztah

$$a_{13} = \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2}{2a_1} ,$$

obdobou obdržíme vzorec i pro úsek

$$a_{21} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2} .$$

Tyto dva výsledky dosazeny byvše do vzorce (4) dávají tedy

$$v' = \frac{(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)\,(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)}{8a_1\Delta} . \tag{5}$$

Rovněž mohli jsme srovnávati i trojúhelníky podobné $\triangle a_3 v_1 v \sim \triangle a_3 v_3 a_2$, což vede zřejmě k týmž výsledkům, o čemž se laskavý čtenář obdobným pochodem přesvědčí.

Dále jest patrno, že úsek

$$(6) \qquad a_{11} = a_{12} - \frac{1}{2}a = \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}.$$

Dosadivše výsledky (3), (5) a (6) do rovnice (2), obdržíme po rozvláčné, nikoli však obtížné úpravě výraz pro čtverec úsečky Eulerovy

$$e^2 = \frac{9a_1^2a_2^2a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(-a_1^4 - 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 - a_2^4 + 2a_2^2a_3^2 - a_3^4)}{-a_1^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 - a_2^4 + 2a_2^2a_3^2 - a_3^4},$$

užijeme-li pak opět vzorců svrchu uvedených pro obsah trojúhelníku Δ a poloměr r kružnice opsané, vyjde ihned hledaný vzorec Eulerovy úsečky

$$(7) \qquad e^2 = 9r^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Vyjádříme-li však strany trojúhelníku poloměrem kružnice opsané a siny protějších úhlů α_1, α_2 a α_3, vyjde konečně pro úkon Eulerův

$$(8) \qquad \varepsilon = 9 - 4(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3).$$

K snadnějšímu poznání hodnot tohoto úkonu pro trojúhelníky různého tvaru srovnávejme nejprve obecně dva trojúhelníky shodující se v jednom úhlu α; z ostatních přiřaďme ke každému z obou úhlů jednoho trojúhelníku jeden v trojúhelníku druhém. V jednom páru takto přiřazených úhlů bude ten v prvém trojúhelníku větší, v druhém páru zase úhel druhého trojúhelníku; ovšem v obou případech o stejný rozdíl, což obojí možno rovnicemi vyjádřiti

$$(9) \qquad \alpha' = \alpha'' = \alpha, \quad \beta' - \beta'' = \gamma'' - \gamma'.$$

Vyjádříme li hodnoty ε' a ε'' úkonu Eulerova pro oba trojúhelníky, vyjde odečtením jich rozdíl

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = -4(\sin^2\beta' - \sin^2\beta'' + \sin^2\gamma' - \sin^2\gamma'');$$

užijeme tu známého vzorce goniometrického

$$\sin^2\varphi - \sin^2\psi = \sin(\varphi + \psi) \,.\, \sin(\varphi - \psi)$$

a obdržíme dále vztah

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = -4\,[\sin(\beta' + \beta'')\sin(\beta' - \beta'') + \sin(\gamma' + \gamma'')\sin(\gamma' - \gamma'')],$$

kdež dle rovnice (9) můžeme v dvojčlenu vytknouti společný činitel $\sin(\beta' - \beta'')$, načež dle rozdílové poučky o sinech lze celou pravou stranu proměniti v součin, při čemž opět dle rovnice (9) lze zjednodušiti v konečný tvar žádaného rozdílu

$$(10) \qquad \varepsilon' - \varepsilon'' = 8 \cos\alpha \sin(\beta' - \beta'')\sin(\beta' - \gamma'').$$

V další úvahu vezměme trojúhelník ostroúhlý s pravoúhlým, kterýž se s oním zase v jednom — ovšem ostrém — úhlu α shoduje. Ze zbývajících úhlů ostroúhlého trojúhelníku přiřaďme větší úhlu pravému; takže platí srovnání

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha < 90^0; \; \beta'' < \beta' < \gamma' < \gamma'' = 90^0.$$

Činitel pravé strany ve vzorci (10) $\cos\alpha$ jest pak kladný, následující činitelé, jakožto siny rozdílů dvou ostrých úhlů, řídí se ve svém označení dle označení svých argumentů, jest tedy $\sin(\beta' - \beta'')$ kladný a $\sin(\beta' - \gamma'')$ záporný. Poněvadž tedy v součinu jediný činitel záporný přichází, a pro trojúhelník pravoúhlý obdrží Eulerův úkon hodnoty $\varepsilon' = 1$, jest pro trojúhelník ostroúhlý jeho hodnota $\varepsilon' < 1$.

Po třetí srovnávejme trojúhelník tupoúhlý zase s trojúhelníkem pravoúhlým, který se s ním v jednom — ostrém — úhlu shoduje, a tupý úhel přiřaďme pravému; bude tudíž

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha < 90^0; \; \beta' < \beta'' < 90^0 = \gamma'' < \gamma'.$$

Snadno poznáme, že poslední dva činitelé na pravé straně vzorce (10) jsou záporní; i bude pro trojúhelníky tupoúhlé úkon Eulerův $\varepsilon' > 1$.

Konečně srovnávejme dva trojúhelníky tupoúhlé takové, že oba úhly ostré jednoho jsou menší než přiřazené úhly ostré druhého, s trojúhelníkem třetím, jehož jeden ostrý úhel shoduje se s jedním úhlem ostrým prvního, druhý s tím úhlem ostrým druhého, který k onomu není přiřazen; všechny tupé úhly jsou pak k sobě přiřazeny. Můžeme tudíž psáti srovnání

$$\alpha''' < \alpha'' = \alpha' < 90^0; \quad \beta''' = \beta'' < \beta' < 90^0; \quad 90^0 < \gamma' < \gamma'' < \gamma'''.$$

Provedením týchž úvah jako v obou předešlých případech shledáme, že úkon Eulerův nabývá větších hodnot $\varepsilon' < \varepsilon'''$, zmenšíme-li v trojúhelníku tupoúhlém oba ostré úhly. Při tomto zmenšování přijdeme jakožto k mezi k trojúhelníku splývajícímu v jedinou přímku, ve kterémž dva úhly jsou nullové, třetí přímý, pro nějž tedy úkon Eulerův dosahuje hodnoty 9; proto jest ta hodnota mezní pro trojúhelníky vůbec: větší hodnoty mohou náležeti jen trojúhelníkům imaginárným, jež jsme předem vyloučili.

Spodní mezí jest ovšem nulla, jakož vyplývá již z úvah, jimiž jsme úkon tento zavedli, a tato mezní hodnota náleží jediné trojúhelníku rovnostrannému. To však bychom mohli též dle předešlého vzoru odvoditi, srovnávajíce trojúhelník ostroúhlý vůbec a trojúhelník rovnostranný s trojúhelníkem třetím, který jeden úhel má rovný 60^0, a ve druhém se shoduje s jedním úhlem trojúhelníku prvního. Při trojúhelnících „vysokých“, kde jsou dva úhly větší než 60^0, budiž tato shoda v jednom z nich; při ostatních „nízkých“, kde dva úhly jsou menší než 60^0, rovněž v jednom z nich. Toto srovnání dle zmíněného vzoru provede laskavý čtenář sám.

Nabyté výsledky možno shrnouti v přehled, že Eulerův úkon nabývá pro trojúhelníky

a) rovnostranné: hodnoty nullové,

b) pro ostroúhlé: kladné, ale menší než 1,

c) pro pravoúhlé: rovnající se 1,

d) pro tupoúhlé větší než 1, ale menší než 9,

e) pro nepravé trojúhelníky v přímce: rovnající se 9.

Hodnot záporných ani větších než 9 úkon ten pro žádný reálný trojúhelník nemůže nabýti.

V závěru stanovme si hodnoty úkonu Eulerova pro známé tři racionálné trojúhelníky všech tří druhů:

$$\triangle' \equiv (13,\ 14,\ 15), \quad \triangle'' \equiv (3,\ 4,\ 5), \quad \triangle''' \equiv (4\ \ 13,\ 15),$$

kdež čísla v závorkách jsou měrná čísla jejich stran: bude tedy výhodno užiti vzorce (7), abychom obešli počítání úhlů, a stanoviti nejprve poloměry kružnic opsaných

$$r' = 8^1/_8\,;\; r'' = 2^1/_2\,;\; r''' = 8^1/_8.$$

Z toho obdržíme úsečky Eulerovy

$$e'^2 = 4^9/_{64}\,;\; e''^2 = 6^1/_4\,;\; e'''^2 = 184^9/_{64},$$

čímž najdeme snadno pro Eulerův úkon po řadě hodnoty

$$\varepsilon' = {}^{53}/_{845} \doteq 0{\cdot}063\,;\; \varepsilon'' = 1\,;\; \varepsilon''' = {}^{2667}/_{845} \doteq 2\,789.$$

Jakožto vedlejší výtěžek plynou tu i vztahy jiné, jako: součet čtverců všech tří stran rovná se nejvýše čtverci trojnásobného poloměru kružnice opsané.

Poznámka redakční.

1. Veličinou „vyznačující tvar trojúhelníka“ — jak se p. spisovatel vyjadřuje — jest nejvlastněji největší úhel jeho aneb některý úkon tohoto úhlu. Neboť, je-li $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3$, a na př.

$$\delta = \frac{\alpha_3 - 60}{60},$$

jest při trojúhelníku rovnostranném $\alpha_3 = 60^0$, $\delta = 0$,
„ „ „ ostroúhlém $60^0 < \alpha_3 < 90^0$, $0 < \delta < 1$,
„ „ „ pravoúhlém $\alpha_3 = 90^0$, $\delta = 1$,
„ „ „ tupoúhlém $90^0 < \alpha_3 < 180^0$, $1 < \delta < 4$,
„ „ „ přešlém v úsečku $\alpha_3 = 180^0$, $\delta = 4$.

Také různé úkony stran i úhlů trojúhelníka mohou sloužiti k posouzení jeho tvaru a „měření nerovnostrannosti trojúhelníka“; hodnota ε v článku předcházejícím vyšetřovaná jest k účelu tomu vhodně volena, ale není ovšem jediným možným úkonem, kterým lze téhož cíle dojíti.

2. Vzorec (7) vyjadřující vzdálenost e průsečíku výšek v trojúhelníku od středu kružnice opsané jest znám v literatuře geometrické. (Viz na př. spisek: Rélations entre les éléments d'un triangle. Paris, Nony & Cie, 1893, pag. 82.).

Užitím trigonometrie lze jej vyvoditi takto: Kružnice K opsaná trojúhelníku $a_1a_2a_3$ protíná prodlouženou výšku a_1v_1

v bodě a_4 tak, že $vv_1 = v_1a_4$. Mocnost bodu v ke kružnici K jest

$$M = e^2 - r^2 = -\overline{va_1} \,.\, \overline{va_4}.$$

Jest však

$$\overline{va_1} = 2 \,.\, \overline{kk_1} = 2r \cos \alpha_1,$$

$$\overline{va_4} = 2a_3 \cos \alpha_2 \,.\, \operatorname{ctg} \alpha_3 = 4r \cos \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

pročež

$$e^2 - r^2 = -8r^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3$$

čili

$$e^2 = r^2 (1 - 8 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3).$$

Jelikož o úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3 = 2 (1 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3),$$

lze vzorci poslednímu dáti tvar

$$e^2 = r^2 [9 - 4 (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3)],$$

totožný se vzorcem (8).

Hledíce k úměře

$$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{a_3}{\sin \alpha_3} = 2r$$

přijdeme pak ku vzorci (7).

Nový důkaz věty Pythagorovy.

Napsal

Antonín Sýkora,

professor v Rakovníku.

Budiž dán pravoúhlý trojúhelník T o stranách a, b, c. Odvěsnu a prodlužme za vrchol ostrého úhlu o délku druhé odvěsny b, nad součtem $(a + b)$ sestrojme čtverec a přenesouce na jeho strany od vrcholů v témž smyslu délku a, spojme dělící body; tím vznikne čtverec C na přeponě c.

Týž rovná se patrně