Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O pravidelném sedmnáctiúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 5, 543--558

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123514

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O pravidelném sedmnáctiúhelníku.

Napsal

Alois Strnad,
ředitel reálky v Kutné Hoře.

1. Od dob Eukleidových bylo známo, jak lze přesnou konstrukcí elementárné-geometrickou rozděliti kružnici na n stejných dílů, je-li

$$n = 2^r, \quad 3 . 2^r, \quad 5 . 2^r, \quad 3 . 5 . 2^r .$$

Rozumí se zde sestrojení takové, které užívajíc pravítka a kružítka skládá se pouze z těchto dvou základních výkonů: sestrojiti přímku určenou dvěma body, sestrojiti kružnici určenou středem a poloměrem.

Teprve po 2000 letech přišlo se k poznání, že případy svrchu vytčenými nejsou vyčerpány všechny, ve kterých lze prostředky elementárními rozděliti kružnici na n stejných dílů čili — což jest úloha v podstatě totožná — sestrojiti pravidelný n-úhelník. Slavný německý mathematik *Gauss* v klassickém díle svém „Disquisitiones arithmeticae" (1801) důmyslnými úvahami dokázal, že rozdělení kružnice na n stejných dílů lze vykonati způsobem elementárně-geometrickým, je-li n prvočíslem tvaru

$$n = 2^{2^m} + 1, \tag{1}$$

a že jest úloha nemožna při všech jiných prvočíslech a jich mocninách.

Z věty Gaussovy plyne pak, že úlohu řešiti lze, je-li n číslo, jehož všechny liché prvočinitele jsou vesměs různé a mají tvar posléze vyslovený. Lze tedy kružnici rozděliti na n stejných dílů konstrukcí přesnou a elementárně-geometrickou, je-li n rovno některému z čísel

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, **17**, 20, 24, 30, 32, **34**, 40, 48, **51**, 60, 64, **68**, 80, **85**, 96, **102**, 120, 128, **136**, 160, **170**, 192, ...

Čísla, která v tomto přehledu výrazněji jsou tištěná, jsou výsledkem objevu Gaussova.

Jestliže v rovnici (1) klademe

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

obdržíme

$$n = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537;$$

při $m = 5$, 6, 7 není n prvočíslem. O případech, kdy $m > 7$, není dosud rozhodnuto; vedou k číslům velkým, o kterých nesnadno jest zjistiti, jsou-li prvočísly neb ne.*)

Dle věty Gaussovy lze konstrukcí elementárně-geometrickou rozděliti kružnici na 17 stejných dílů čili sestrojiti pravidelný 17-úhelník. O úloze této mnoho již v literatuře napsáno, česky však dosud ničeho.

Snad nebude bez užitku, budeme-li se úlohou tou na tomto místě zabývati; podáme její theoretické řešení upravené způsobem co možná jednoduchým, načež připojíme i některá praktická řešení přibližná.

2. Geometrie sama nezná cest, po kterých by bezpečně došla k rozhodnutí, které úlohy konstruktivné lze řešiti způsobem elementárně-geometrickým a které naopak nejsou k tomu způsobilými.

Vyjádříme-li však veličiny geometrické jich čísly poměrnými, lze každou úlohu strojnou převésti na sestrojení určitého analytického výrazu.

Nezbytná, ale zároveň dostačující podmínka, při které lze výraz takový sestrojiti pouze užitím přímek a kružnic, jest pak, aby výraz obsahoval racionálné úkony známých veličin a mimo ně jen konečný počet druhých odmocnin. Podmínka tato jest

*) *F. Klein-Gries*, Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire. 1896. (pag. 26).

splněna, když úlohu vyjádřiti lze rovnicí, kterou nelze na nižší stupeň redukovati a jejíž stupeň jest mocninou čísla 2. Přesvědčíme se, že úlohou takovou jest úloha o sestrojení pravidelného 17-úhelníka.

Komplexní číslo $a + ib$ lze v pravoúhlé soustavě souřadnic znázorniti bodem, jehož úsečka jest a, pořadnice b. Znázorníme-li takto kořeny rovnice

$$x^n - 1 = 0,$$

obdržíme v rovině n bodů, které jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka. Neboť kořeny rovnice té jsou vyjádřeny vzorcem Moivreovým

$$x = \cos k\alpha + i \sin k\alpha,$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1.$$

Body znázorňující tyto hodnoty leží na kružnici středu $(0, 0)$ a poloměru $r = 1$; jeden z bodů těch jest na positivné části osy X, ostatní jsou rozloženy na kružnici tak, že každé dva sousední mají odlehlost $\frac{2\pi}{n}$.

Úloha o sestrojení pravidelného n-úhelníka převádí se tudíž na řešení rovnice $x^n - 1 = 0$.

Jde-li o pravidelný 17-úhelník, jest řešiti rovnici

$$x^{17} - 1 = 0; \tag{2}$$

dělíce tuto kořenovým činitelem $x - 1$, obdržíme rovnici

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0, \tag{3}$$

kterou již nelze redukovati, ale jejíž řešení lze převésti na řešení rovnic kvadratických, poněvadž stupeň její jest $16 = 2^4$, mocnina čísla 2. Cesta k řešení tomu, Gaussem objevená, budiž v následujících řádcích ukázána.

3. Rovnice (3) má kořeny $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}, x_{16}$, které lze zahrnouti výrazem

$$x_k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{17}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 16.$$

Při tom jest

$$x_2 = x_1^2, \quad x_3 = x_1^3, \quad x_4 = x_1^4, \quad \ldots, \quad x_{16} = x_1^{16},$$

tak že ukazatele kořenů mají zároveň význam mocnitelů; zároveň jest dle rovnice (2) pro kterékoli k

$$x_k^{17} = 1.$$

Jelikož číslo 3 jest primitivním kořenem (dle Gausse) čísla 17, t. j. mocniny čísla 3 děleny 17ti dávají všechny zbytky od 1 do 16, seřaďme kořeny x takto:

$$x^1, \quad x^3, \quad x^9, \quad x^{27}, \quad x^{81}, \quad \ldots, \quad x^{3^{16}}.$$

Pamatujíce, že $x^{17} = 1$ a že mocnitele shodují se s ukazateli kořenů, pišme tyto pořadem

$$\begin{array}{cccccccc} x_1, & x_3, & x_9, & x_{10}, & x_{13}, & x_5, & x_{15}, & x_{11}, \\ x_{16}, & x_{14}, & x_8, & x_7, & x_4, & x_{12}, & x_2, & x_6. \end{array}$$

V řadě této jest každý člen třetí mocninou předcházejícího; na př.

$$x_{13} = x^{13} = x^{81} = (x^{10} \,.\, x^{17})^3 = x_{10}^3.$$

Seřaďme 16 těchto kořenů ve skupiny čili periody Gaussovy:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_9 + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_8 + x_4 + x_2, \\ y_2 &= x_3 + x_{10} + x_5 + x_{11} + x_{14} + x_7 + x_{12} + x_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_{13} + x_{16} + x_4, & z_2 &= x_9 + x_{15} + x_8 + x_2, \\ z_3 &= x_{10} + x_{11} + x_7 + x_6; & z_4 &= x_3 + x_5 + x_{14} + x_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + x_{16}, & u_2 &= x_{13} + x_4, & u_3 &= x_{15} + x_2, & u_4 &= x_9 + x_8, \\ u_5 &= x_{11} + x_6, & u_6 &= x_{10} + x_7, & u_7 &= x_5 + x_{12}, & u_8 &= x_3 + x_{14}. \end{aligned}$$

Jest patrno, že

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{16} = -1,$$

jelikož jest to součet kořenů rovnice (3); stanovme také součin

$$y_1 y_2 = (x_1 + x_9 + x_{13} + \ldots + x_2)(x_3 + x_{10} + x_5 + \ldots + x_6).$$

Vyvinuvše tento součin, obdržíme 64 členů, hledíce pak ku vztahu $x^{17}=1$ převedeme všechny členy na mocnitele menšího než 17; tak shledáme, že

$$y_1 y_2 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{16}) = -4.$$

Jsou tedy y_1, y_2 kořeny rovnice

$$y^2 + y - 4 = 0. \tag{5}$$

Utvořme podobně

$$z_1 + z_2 = y_1,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + x_{13} + x_{16} + x_4)(x_9 + x_{15} + x_8 + x_2);$$

poznáme, že

$$z_1 z_2 = x_{10} + x_5 + x_8 + x_{13} + x_{16} + x_{11} + x_{14} + x_2 \\ + x_9 + x_4 + x_7 + x_{12} + x_3 + x_{15} + x_1 + x_6 = -1,$$

a jsou tudíž z_1, z_2 kořeny rovnice

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0. \tag{6}$$

Obdobně jest

$$z_3 + z_4 = y_2, \qquad z_3 z_4 = -1,$$

pročež z_3, z_4 kořeny rovnice

$$z^2 - y_2 z - 1 = 0. \tag{7}$$

Hleďme ještě k hodnotám u_1, u_2; jestiť

$$u_1 + u_2 = z_1,$$

$$u_1 u_2 = (x_1 + x_{16})(x_{13} + x_4) = x_{14} + x_{12} + x_5 + x_3 = z_4,$$

a tedy obě tato u kořeny rovnice

$$u^2 - z_1 u + z_4 = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (5) až (8) lze postupně vypočítati hodnoty y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2, přiměřeným spojením též ostatní u. Jelikož jest

$$x_1 + x_{16} = u_1, \qquad x_1 \,.\, x_{16} = x^{17} = 1,$$

jsou x_1, x_{16} kořeny rovnice

$$x^2 - u_1 x + 1 = 0;$$

podobně lze ustanoviti $u_3, u_4, \ldots, u_8$ a vypočítati ostatní kořeny rovnice (3).

4. Prve než přikročíme k sestrojení pravidelného 17-úhelníka na základě vyvinutého právě řešení rovnice (2), vyšetřme geometrický význam period u a důsledky z toho vyplývající. Jest předně patrno, že periody tyto jsou realné; neboť jest obecně

$$u = x_k + x_{17-k} = 2\cos k\alpha. \tag{9}$$

Proto také hodnoty z a y jsou realné, ježto

$$y_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \qquad y_2 = u_5 + u_6 + u_7 + u_8,$$
$$z_1 = u_1 + u_2, \quad z_2 = u_3 + u_4, \quad z_3 = u_5 + u_6, \quad z_4 = u_7 + u_8;$$

vysvítá to též z rovnic (5), (6), (7), jichž absolutní členy jsou záporné.

Hodnoty period jsou pak dle rovnice (9)

$$u_1 = 2\cos\alpha, \quad u_2 = 2\cos 4\alpha, \quad u_3 = 2\cos 2\alpha, \quad u_4 = 2\cos 8\alpha,$$
$$u_5 = 2\cos 6\alpha, \quad u_6 = 2\cos 7\alpha, \quad u_7 = 2\cos 5\alpha, \quad u_8 = 2\cos 3\alpha.$$

Poněvadž jest

$$\alpha = \frac{2\pi}{17} = 21^0\, 10'\, 35{\cdot}3'',$$

jest $4\alpha < 90^0$, $5\alpha > 90^0$, pročež hodnoty u_7, u_5, u_6, u_8 jsou negativné; všechna u lze dle velikosti seřaditi vzestupně takto

$$u_4 < u_6 < u_5 < u_7 < u_2 < u_8 < u_3 < u_1.$$

Je-li pravidelný 17-úhelník $aa_1a_2a_3 \ldots a_{16}$ vepsán do kružnice průměru $\overline{ab} = 2$, jsou hodnoty u znázorněny délkami tětiv (obr. 3.)

$$u_1 = \overline{ba_2}, \quad u_2 = \overline{ba_8}, \quad u_3 = \overline{ba_4}, \quad u_4 = \overline{ba_{16}},$$
$$u_5 = \overline{ba_{12}}, \quad u_6 = \overline{ba_{14}}, \quad u_7 = \overline{ba_{10}}, \quad u_8 = \overline{ba_6}.$$

Dle téhož znázornění přesvědčíme se, že jest

$$z_3 < z_2 < z_4 < z_1 ,$$

při čemž z_3, z_2 jsou hodnoty negativné, z_4, z_1 positivné; posléze také seznáme, že jest

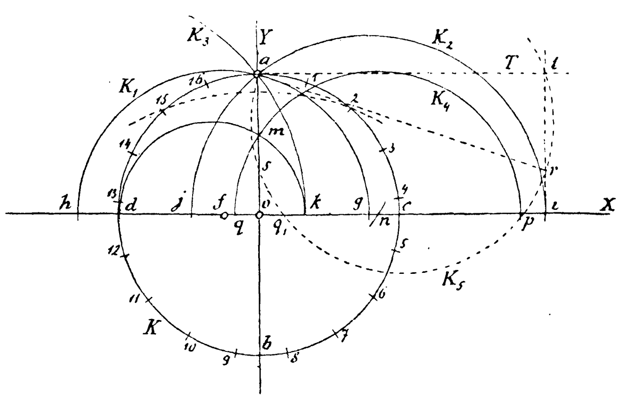
$$y_2 < y_1 ,$$

y_2 jest negativné, y_1 positivné, jak tomu nasvědčuje rovnice (5).

Strana a pravidelného 17-úhelníka vepsaného do kružnice poloměru $r = 1$ jest

$$a = 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{2 - u_1}.$$

Kdybychom užitím rovnic (5), (6), (7), (8) vypočítali u_1, mohli bychom vyjádřiti též stranu a výrazem číselným; nám



Obr. 1.

však zde nejde o tento výpočet, nýbrž o sestrojení, ku kterému nyní přistoupíme.

5. Z počátku o pravoúhlé soustavy X, Y opišme poloměrem $r = 1$ kružnici K, které jest vepsati pravidelný 17-úhelník, jehož jeden vrchol jest v a (obr. 1.).

Učiňme $\overline{of} = -\frac{1}{4}$, rozeznávajíce v ose X směr kladný a záporný. Kružnice K_1 $(f, \overline{af})$ opsaná ze středu f poloměrem $\overline{af} = \frac{1}{4}\sqrt{17}$ seče X v bodech g, h tak, že jest

$$\overline{og} = \frac{\sqrt{17}-1}{4} = \frac{y_1}{2}, \quad \overline{oh} = \frac{-\sqrt{17}-1}{4} = \frac{y_2}{2};$$

y_1, y_2 jsou kořeny rovnice (5).

Kružnice K_2 $(g, \overline{ag})$ stanoví v X body i, j,

$$\overline{oi} = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + 1} = z_1, \quad \overline{oj} = \frac{y_1}{2} - \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + 1} = z_2;$$

z_1, z_2 jsou kořeny rovnice (6).

Kružnice K_3 $(h, \overline{ah})$ podobně určuje body k, l,

$$\overline{ok} = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + 1} = z_4, \quad \overline{ol} = \frac{y_2}{2} - \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + 1} = z_3;$$

z_3, z_4 jsou kořeny rovnice (7).

Zbývá sestrojiti hodnoty u_1, u_4. Zřiďme na průměru $\overline{ok}$ polokružnici, která Y seče v bodě m; jest pak

$$\overline{om} = \sqrt{z_4}.$$

Vytkneme-li v X bod u tak, že

$$\overline{mn} = \frac{1}{2}\overline{oi} = \frac{z_1}{2},$$

est

$$\overline{on} = \sqrt{\frac{z_1^2}{4} - z_4};$$

kružnice K_4 $(n, \overline{mn})$ protíná X v bodech p, q, tak že

$$\overline{op} = \frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} - z_4} = u_1, \quad \overline{oq} = \frac{z_1}{2} - \sqrt{\frac{z_1^2}{4} - z_4} = -u_2;$$

u_1, u_4 jsou kořeny rovnice (8).

Sestrojíme-li nyní v kružnici K tětivu $\overline{ba_2} = u_1$ a rozpůlíme-li oblouk aa_2 bodem a_1, jsou a, a_1, a_2 tři po sobě následující vrcholy pravidelného 17-úhelníka. Neboť jest

$$u_1 = 2 \cos \alpha, \quad \sphericalangle aba_2 = \sphericalangle aoa_1 = \alpha = \frac{2\pi}{17}.$$

Není ostatně třeba půliti oblouk aa_2; učiníme-li

$$\overline{aa_2} = \overline{a_2 a_4} = \overline{a_4 a_6} = \ldots = \overline{a_{14} a_{16}},$$

obdržíme další vrcholy přenesením tětiv

$$\overline{a_{14} a_{16}} = \overline{a_{16} a_1} = \overline{a_1 a_3} = \ldots = \overline{a_{15} a}.$$

Ku kontrole můžeme užíti délky $\overline{oq} = -u_2$. Prostá hodnota její jest

$$u_2 = x_4 + x_{13} = 2 \cos 4\alpha;$$

musí tudíž býti

$$\overline{ba_8} = \overline{ba_9} = \overline{oq}.$$

Sestrojení toto, založené na Gaussových periodách, podal *J. A. Serret* v díle svém Cours d'algèbre supérieure (2 éd. 1854); upravil je *Bachmann* (Die Lehre von der Kreistheilung, 1872). Pomocí jediné kružnice a soustavy přímek řešil úlohu *Staudt* (Crelle's Journal, 1842), jehož řešení zjednodušil *Schroeter* (Crelle's Journal, 1872). V novější době *Gérard* (Mathem. Annalen, 1897) uveřejnil konstrukci pravidelného 17-úhelníka užívající výhradně kružnic dle způsobu Mascheroniova.

Všechna tato konstruktivná řešení*) jsou založena na Gaussových algebraických úvahách. V rouše goniometrickém podal je *Legendre* (Éléments de géométrie, 1812) a *Grunert* (Klügel's math. Wörterbuch, 1831), z relací planimetrických dospěl k němu *Ampère* (Comptes rendus, 1835). Vyvoditi sestrojení pravidelného 17-úhelníka methodou ryze geometrickou dosud se nepodařilo.

6. Podanou konstrukci Serretovu, která výhodně a elegantně užívá kružnic ku řešení, lze snadně a dosti výhodně přetvořiti v konstrukci operující většinou přímkami. Prostředek k tomu

---

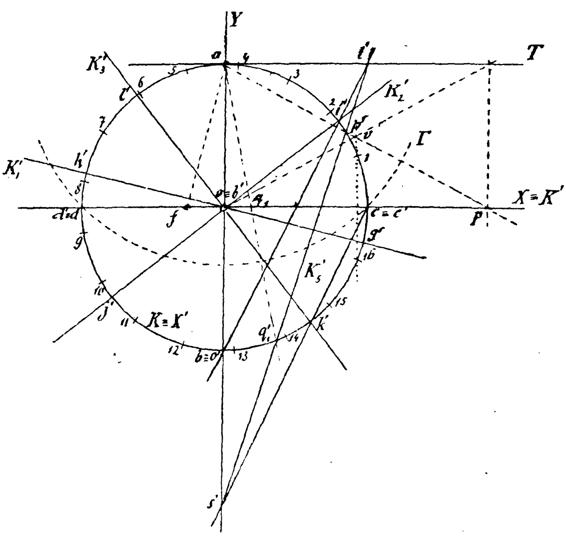
*) *F. Enriques*, Questioni riguardanti la geometria elementare. 1900 (pag. 397).

poskytuje kruhová inverse čili transformace převratnými průvodiči*).

Základem této transformace jest — jak známo — stálá kružnice Γ středu s a poloměru r; libovolnému bodu m roviny přidružen jest bod m' na paprsku sm tak položený, že jest

$$\overline{sm} \,.\, \overline{sm'} = r^2 .$$

Transformací touto, která jest involuční, přechází přímka v kružnici obsahující střed inverse s; naopak kružnice jdoucí tímto středem přetvořuje se v přímku. Kružnice středem inverse neprocházející transformuje se opět v kružnici.



Obr. 2.

Každý bod kružnice Γ jest samodružný.

Dvě dvojiny bodů sdružených, na př. $m\,m'$, $n\,n'$ leží na kružnici, která jest kolmá ku Γ a sama v sebe se transformuje.

Dvě libovolné čáry protínají se v témž úhlu jako jich odvozené.

---

*) *Strnad,* O inversi kruhové. (Weyrův Archiv mathematiky a fysiky, 1879).

Transformujme na tomto základě konstrukci Serretovu (obr. 1.), volíce bod a středem inverse; kružnice Γ ze středu a poloměrem ac opsaná budiž kružnicí inverse (obr. 2.).

Kružnice K přetvoří se v X a naopak; každá kružnice jdoucí body a, b přetvoří se v přímku jdoucí bodem o, který jest sdružen s b.

Tak kružnice K_1 $(f, \overline{af})$ přechází v přímku $K_1' \perp \overline{af}$; přímka ta stanoví v K body g', h' sdružené inversí s body g, h osy X.

Kružnice K_2 $(g, \overline{ag})$ přetvoří se v přímku $K_2' \perp \overline{ag'}$; ji obdržíme na K body i', j'; podobně na přímce $K_3' \perp \overline{ah'}$ leží body k', l'.

Z toho patrno, že body g', h', i', j', k', l' lze sestrojiti bez kružítka (vyrýsována-li kružnice K), pouze dvěma pravítky k rýsování rovnoběžek a kolmic.

Jde nyní o sestrojení bodů inversních ku p a q.

Jelikož by se kružnice dmk a K_4 netransformovaly dosti pohodlně, upravme řešení rovnice (8)

$$u^2 - z_1 u + z_4 = 0$$

poněkud jinak. Užijme k tomu známého způsobu řešení grafického rovnic kvadratických (*Strnad*, Geometrie pro vyšší školy realné. Vyd. 2. str. 256.). Sestrojme (obr. 1.) úsečku

$$\overline{ir} \perp X, \quad \overline{ir} = \overline{ok} = z_4,$$

načež kružnice K_5 sestrojená na průměru $\overline{ar}$ stanoví v X body p, q_1 tak, že

$$\overline{op} = u_1, \ \overline{oq_1} = u_2.$$

Kružnice tato seče osu Y v bodě s a tečnu T v bodě t.

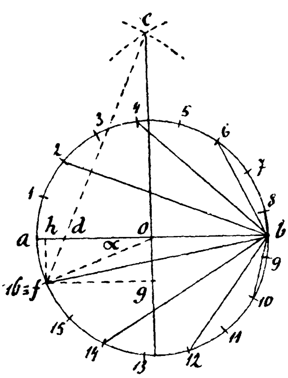
Poněvadž body $acks$ leží na kružnici, budou sdružené s nimi body $e \equiv c'$, k', s' (obr. 2.) ležeti v přímce; proto spojnice $\overline{ck'}$ stanoví v Y bod s'.

Podobně kružnice $oait$ přetvoří se v přímku obsahující body $b \equiv o'$, i', t'; spojnice bi' určuje v T bod t'. Spojnice $s't'$ jest útvarem inversním ke kružnici K_5, proto průsečíky její $p'q'$ s K jsou body sdruženými s body p, q_1 osy X; body p, q_1 obdržíme na paprscích $\overline{ap'}$, $\overline{aq'}$.

Znajíce body p, q_1 můžeme vrcholy pravidelného 17-úhelníka sestrojiti jako v obr. 1.; aneb rozpůlíme $\overline{ap}$ v bodě v a vedeme jím kolmici ku X; tato kolmice stanoví v K dva vrcholy c_1 a c_{16} pravidelného 17-úhelníka, které jsou sousedními k vrcholu c. Mohli bychom též přenésti na Y délku $\overline{ov} = \overline{op}$ a opsati z bodu p kružnici poloměrem $\overline{oa}$; průsečíky její s K jsou vrcholy c_1, c_{16}. To vše vysvítá z rovnice

$$u_1 = \overline{op} = 2 \cos \frac{2\pi}{17}.$$

Délka $u_2 = \overline{oq_1}$ náleží straně pravidelného 34-úhelníka téže kružnici K vepsaného.



Obr. 3.

Konstrukce v obr. 2. provedená a tuto vyložená není spisovateli od jinud známa; bylo by zajímavo stvrditi ji direktním způsobem, od čehož však na tomto místě upustíme.

7. Sestrojení pravidelného 17-úhelníka kteroukoli z uvedených zde method vyžaduje veliké pozornosti a přesnosti, má-li výsledek uspokojovati.

Vedle konstrukcí theoreticky přesných ale prakticky dosti nevýhodných nejsou při řešení úloh podobného rázu bez zajímavosti a užitku také *přibližné methody* praktické; tyto hledí k theoretickému výsledku co možná přiblížiti se grafickým postupem, založeným na číselném vyjádření hledaných veličin.

Tak rozdělení kružnice na n stejných dílů lze přibližně vykonati návodem, kterýž dal *Antoine de Ville* (1628), a kterýž uveřejnil italský mathematik *Renaldini* ve spise Ars analytica (1668).

Sestrojme (obr. 3.) na průměru $\overline{ab}$ kružnice K trojúhelník rovnostranný abc; učiníme-li

$$\overline{ad} = \frac{2}{n}\overline{ab}$$

a prodloužíme-li $\overline{cd}$ k průsečíku f s kružnicí K, jest oblouk $\widehat{af}$ přibližně $\frac{1}{n}$ této kružnice.

Že sestrojení toto není geometricky přesné, nýbrž — vyjímaje $n = 3, 4, 6$ — jen přibližné, poznal již *Jakub Bernoulli*. Přesvědčme se o tom při $n = 17$ a oceňme zároveň stupeň přesnosti, kterou toto sestrojení pravidelného 17-úhelníka poskytuje.

Položíme-li jako v dřívějších úvahách

$$\alpha = \frac{2\pi}{17} = 21^0\,10'\,35{\cdot}3'',$$

jest strana pravidelného 17-úhelníka vepsaného do kružnice poloměru r

$$a = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}367\,505\,r.$$

Učiníme-li $fg \perp oc$, $fh \perp ab$ a položíme-li

$$\overline{fg} = x, \quad \overline{fh} = y, \quad \frac{n-4}{n} = m,$$

jest obecně

$$x\,.\,(y + r\sqrt{3}) = (r - \frac{4r}{n}) : r\sqrt{3},$$

tudíž

$$x : (y + r\sqrt{3}) = m : \sqrt{3}.$$

Připojíme-li vztah

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

dospějeme vyloučením y k rovnici

$$(m^2+3)\,x^2 - 6\,mrx + 2\,m^2r^2 = 0\,,$$

z níž ustanovíme

$$x = \frac{mr}{m^2+3}\,(3+\sqrt{3-2\,m^2}).$$

Při $n = 17$ jest

$$m = \frac{13}{17}\,,\quad x = \frac{13}{14}\,r\,.$$

Označíme-li

$$a_1 = \overline{af}\,,\quad \alpha_1 = \sphericalangle\, aof\,,$$

bude

$$\overline{af}^2 = \overline{ab}\,.\,\overline{ah}$$

čili

$$a_1^2 = 2r\,.\,\frac{r}{14} = \frac{r^2}{7}\,.$$

Dle toho jest

$$a_1 = \frac{1}{7}\,r\sqrt{7} = 0\cdot377965\,r\,,$$

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_1}{2r} = 0\cdot18893\ldots,\quad \alpha_1 = 21^0\,46'\,52''.$$

Konstrukce Renaldiniova poskytuje tudíž stranu pravidelného 17-úhelníka s chybou

$$a_1 - a = 0\cdot01\ldots r$$

a příslušný k ní středový úhel s chybou

$$\alpha_1 - \alpha = 36'.$$

Přesnější výsledek a jednodušší sestrojení poskytuje věta, že strana pravidelného 17-úhelníka rovná se polovici rozdílu mezi stranou pravidelného trojúhelníka a stranou pravidelného šestiúhelníka do téže kružnice vepsaného.*)

Tato hodnota

*) *La Frémoire-Reuschle*, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der Elementar-Geometrie. 1858. (pag. 182).

$$a_2 = \frac{1}{2} r (\sqrt{3} - 1) = 0{\cdot}366025\, r$$

a příslušný k ní středový úhel $\alpha_2 = 21^0\, 5'\, 26''$ spojeny jsou tedy s chybou

$$a - a_2 = 0{\cdot}0009 \ldots r, \quad \alpha - \alpha_2 = 5'.$$

8. Posléze podáme dvě nové přibližné konstrukce pravidelného 17-úhelníka, které založeny jsou na úvaze následující:

Vyhledáme-li z tabulek log tg $21^0\, 10'\, 35''$ a k tomu příslušné číslo, nalezneme

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{\cdot}387417 \ldots;$$

proměníme-li tuto hodnotu v řetězový zlomek, bude

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/2 + \ldots$$

Pokládejme tg α za přibližnou hodnotu periodického řetězce

$$x = \operatorname{tg} \alpha_3 = 1/2 + 1/1 + 1/1 + \ldots \text{in inf.},$$

jehož hodnotu ustanovíme z rovnice

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x}}}$$

čili

$$x = \frac{x+2}{3x+5}, \quad 3x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Kladný kořen této rovnice jest

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sqrt{10} - 2}{3} = 0{\cdot}387426 \ldots.$$

Úhel α_3 i příslušnou délku strany a_3 lze sestrojiti takto:

V kružnici, do níž vepsati jest pravidelný 17-úhelník, veďme kolmé průměry $ab \perp cd$ (obr. 4.); poloměr $\overline{ob} = r$ rozdělme na 3 stejné díly $\overline{of} = \overline{fg} = \overline{gb}$ a přenesme na průměr $\overline{ab}$ úsečku $\overline{gh} = \overline{df}$. Potom jest $\sphericalangle\, odh = \alpha_3$ a vedeme-li $ol \parallel dh$, jest $\overline{cl} = \overline{lk} = a_3$.

Neboť jest

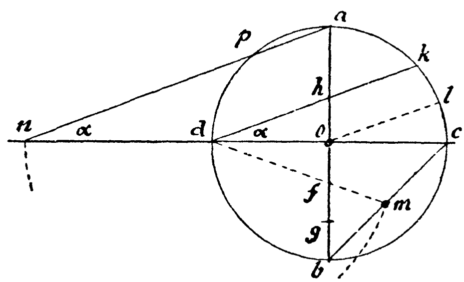
$$\overline{df} = \overline{gh} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^2} = \frac{r}{3}\sqrt{10}, \quad \overline{oh} = \frac{r}{3}(\sqrt{10} - 2),$$

$$\operatorname{tg}(odh) = \frac{oh}{od} = \frac{\sqrt{10} - 2}{3},$$

tedy

$$\sphericalangle\, odh = \alpha_3 .$$

Jiný způsob sestrojení téhož úhlu poznáme takto: Rozpolme tětivu $\overline{bc}$ bodem m a prodlužme poloměr $\overline{od}$ o úsečku $\overline{dn} = \overline{dm}$.



Obr. 4.

Potom jest $\sphericalangle\, ona = \alpha_3$. Jestiť

$$\overline{dm} = \overline{dn} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10},$$

$$\operatorname{tg}(ona) = \frac{oa}{on} = r : (r + \frac{r}{2}\sqrt{10}) = \frac{2}{\sqrt{10} + 2} = \frac{\sqrt{10} - 2}{3}$$

pročež

$$\sphericalangle\, ona = \alpha_3, \quad \sphericalangle\, aop = 2\alpha_3 .$$

V obou těchto konstrukcích jest $\alpha_3 = 21^0\, 10'\, 39''$; úhel tento od středového úhlu pravidelného 17-úhelníka liší se toliko chybou

$$\alpha_3 - \alpha = 4'' ;$$

délka takto sestrojené strany pravidelného 17-úhelníka liší se od pravé hodnoty o rozdíl

$$a_3 - a = 0{\cdot}000007 \ldots r .$$

Tím přesnost těchto jednoduchých konstrukcí dokázána.