Matyáš Lerch

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 2, 95--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123508

jsme ve svých pracích arithmetických označili symbolem $\psi(n, a)$, a my obdržíme:

$$\sum_{k=a+1}^{n} \psi(k, a) = \sum_{k=a+1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right).$$

(Dokončení.)

Drobné zprávy.

Napsal

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

I. Ve své znamenité práci „Zur Darstellung von Reihen durch Integrale" (Journal f. d. reine und angew. Mathematik, sv. 105) dokazuje pan *Kronecker* některé obecné vzorce summační a uvádí následující interessantní applikace:

1. Značí-li v realnou veličinu kladnou, bude

$$(\mathrm{L}') \qquad 2 \sum_{h=0}^{\frac{1}{v^2}}{}^{*} e^{h^2 v^2 \pi i} = \frac{1}{v} e^{\frac{1}{4}\pi i}\left(1 + e^{-\frac{\pi i}{v^2}}\right)$$

$$+ 2 \sin \frac{2\pi}{v^2} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi i}{v^2}}}{v} \int_0^\infty \frac{e^{u^2 \pi i}\, du}{\cos \frac{2u\pi i}{v} - \cos \frac{2\pi}{v^2}},$$

kde v součtu Σ^* dlužno první člen redukovati na polovičku, a též poslední, je-li $\frac{1}{v^2}$ celistvé číslo; pan Kronecker píše

$$\sum_{0<h<\frac{1}{v^2}} e^{h^2 v^2 \pi i} + \sum_{0 \leqq k \leqq \frac{1}{v^2}} e^{k^2 v^2 \pi i}.$$

Ze vzorce toho plyne po krátké úvaze, že při $v^2 = \frac{2}{n}$ (kde n je celistvé kladné číslo), bude

$$2 \sum_{h=0}^{\frac{1}{2}n}{}^{*} e^{\frac{2h^2 \pi i}{n}} = \frac{i + i^{1-n}}{i+1} \sqrt{n},$$

čímž řešen slavný problém Gaussův, stanoviti tyto *Gaussovy součty*, způsobem ryze analytickým na základě jediné počtu integralního. Vzorec (L') tedy zobecňuje Gaussovy výsledky, které byly předmětem úvah Dirichleta a Cauchya.

Volíme-li $v^2 = \frac{m}{n}$, kde m, n značí kladná čísla celistvá, obdržíme

$$(L'')\quad 2\sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{h=0}^{\frac{n}{m}} {}^{*}\, e^{\frac{mh^2\pi i}{n}} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\left(1 + e^{-\frac{n\pi i}{m}}\right)$$

$$+ \sin\frac{2n\pi}{m}\, e^{-\frac{n\pi i}{m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2\pi i}\, du}{\cos\left(2u\pi i\sqrt{\frac{n}{m}}\right) - \cos\frac{2n\pi}{m}},$$

a tedy pro $m = 4$, je-li n *liché*,

$$(L''')\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{-\frac{1}{4}n < k < \frac{1}{4}n} e^{\frac{4k^2\pi i}{n}} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4}\pi i}\left(1 + e^{-\frac{n\pi i}{4}}\right)$$

$$+ e^{\frac{1}{4}(n-2)\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2\pi i}\, du}{e^{u\pi\sqrt{n}} + e^{-u\pi\sqrt{n}}};$$

odtud se obdrží substitucí $\frac{u}{\sqrt{n}}$ za v a rozštěpením v část realnou a pomyslnou:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{t^2\pi}{n}}{\cos t\pi i}\, dt = \left(\cos\frac{n+1}{4}\pi + \cos\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sqrt{n}$$

$$+ 2\sum_k \sin\left(\frac{n}{4} - \frac{4k^2}{n}\right)\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{t^2\pi}{n}}{\cos t\pi i}\, dt = \left(\sin\frac{n+1}{4}\pi + \sin\frac{2n+1}{4}\pi\right)\sqrt{n}$$

$$- 2\sum_k \cos\left(\frac{n}{4} - \frac{4k^2}{n}\right)\pi,$$

o summační podmínce $-\frac{1}{4}n < k < \frac{1}{4}n$, při čemž n jest liché a kladné.

2. V další poznámce „Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x (Journal f. Math., sv. 106.) ukazuje pan Kronecker, že vzorec

$$[x] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{r-1} \{1 + sgn . (x - h)\},$$

platný pro kladná n, jež nejsou celistvá, kde $[x]$ značí celky čísla x, $sgn . u$ pak vyjadřuje znamení veličiny u, t. j. rovná se 1, 0, -1, jak jest u kladné, nulla, či záporné a je-li číslo r dosti veliké, vede k nejjednoduššímu důkazu rozmanitých vzorců arithmetických. Z těch nejinteressantnější jsou následující:

$$\left[\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \left\{1 + sgn . \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\right\},$$

tedy

$$(1) \quad \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \left[\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left[\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right], \quad (m, n \text{ lichá čísla}),$$

vzorec, který poprvé udal p. Busche, a který jsme dokázali analyticky ve své práci otištěné ve vídeňském časopise mathematickém.

Dále platí

$$(2) \quad \left[\frac{m}{2} - \frac{km}{n}\right] + \left[\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(m-1); \quad (m, n \text{ lichá},$$

k libovolné), a konečně

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left[\frac{2km}{n}\right] + \sum_{h=1}^{m-1} \left[\frac{hn}{2m}\right] = \frac{1}{2}(m-1) . (n-1),$$

(n liché).

Po většině mají poznámky p. Kroneckerovy ráz reklamace priority naproti práci p. Sterna v témž žurnálu otištěné.

3. Probíhá-li ϱ všecky kladné zlomky, jež nepřevyšují $\frac{1}{2}$ a mají ve zkráceném tvaru jmenovatele $\leqq N$, bude

$$\frac{2}{\log \mathrm{N}} \sum_{\varrho} \log (2 \sin \varrho\pi) = \sum_{p} \left[\frac{\log \mathrm{N}}{\log p}\right] \cdot \frac{\log p}{\log \mathrm{N}},$$

kde p probíhá všecka čísla kmenná, a závorka [ ] značí celky veličiny uvnitř obsažené (Kronecker, Journal für Mathematik, sv. 108 : Eine analytisch-arithmetische Formel).

II. Je-li dána rovnice o neznámé z

$$z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^k\varphi_k(z), \tag{1}$$

kde φ_1, φ_2, ... φ_k jsou funkce z chovající se pravidelně uvnitř jistého oboru omezeného křivkou K konečnou a uzavřenou, t pak značí komplexní veličinu znázorněnou bodem uvnitř K, a je-li lze ustanoviti konstantu a tak, aby pro všecka z podél čáry K platila nerovnosť

$$\left|\frac{a\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{a^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{a^k\varphi_k(z)}{z-t}\right| < 1, \tag{2}$$

pak bude lze při podmínce $|x| < a$ rozvinouti libovolnou funkci $f(z)$ kořene z rovnice (1) — ovšem pokud tato se chová pravidelně uvnitř K — v řadu

$$\begin{aligned} f(z) = f(t) &+ xf'(t)\,\varphi_1(t) + \ldots \\ &+ x^n \Sigma \frac{\mathrm{D}_t^{b-1}\{f'(t)\,\varphi_1(t)^\alpha\,\varphi_2(t)^\beta \ldots \varphi_k(t)^\lambda\}}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda!} \\ &+ \ldots, \end{aligned}$$

kde v napsaném obecném členu součet se vztahuje ke všem řešením neurčité rovnice o neznámých α, β, ... λ

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = n,$$

a b značí součet

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Tuto větu, která zobecňuje řadu Lagrangeovu, podal p. *F. Gomes Teixeira*, člen královské české společnosti nauk (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3. řada, sv. VII., 1881 a tamtéž r. 1890) a zabývali se jí dále pp. Cesàro (Nouvelles Annales, 1885) a David (Journal de l'Ecole Polytechnique, 1887.).

III. Interpolační vzorec *Hermiteův* (Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x-\alpha_2)\sin(x-\alpha_3)\dots\sin(x-\alpha_n)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\dots\sin(\alpha_1-\alpha_n)} f(\alpha_1) \\
&+ \frac{\sin(x-\alpha_1)\sin(x-\alpha_3)\dots\sin(x-\alpha_n)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\dots\sin(\alpha_2-\alpha_n)} f(\alpha_2) \\
&+ \dots \\
&+ \frac{\sin(x-\alpha_1)\sin(x-\alpha_2)\dots\sin(x-\alpha_{n-1})}{\sin(\alpha_n-\alpha_1)\sin(\alpha_n-\alpha_2)\dots\sin(\alpha_n-\alpha_{n-1})} f(\alpha_n),
\end{aligned}
$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou libovolné konstanty, nejlépe realné veličiny obsažené uvnitř jistého oboru, v němž nachází se též veličina x, představuje předepsanou funkci analytickou $f(x)$, pravidelnou v uvažovaném oboru, s přesností, jež roste zároveň s počtem n veličin α; je totiž třeba k pravé straně připojiti integrál

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)\sin(x-\alpha_1)\sin(x-\alpha_2)\dots\sin(x-\alpha_n)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha_1)\sin(z-\alpha_2)\dots\sin(z-\alpha_n)}\,dz
$$

vzatý podél okraje S oboru, v němž jsou obsaženy veličiny $x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, a integrál ten blíží se nulle s rostoucím n, je-li čára S tak volena, aby na ní bylo

$$
\left|\frac{\sin(x-\alpha_m)}{\sin(z-\alpha_m)}\right| < \varrho, \qquad (m = 1, 2, \dots n),
$$

kde ϱ je pravý kladný zlomek.

Z téhož pramene plynou vzorce

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K}_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}_{2n}\sin^{2n}(x-a),
$$

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K}'_{2n}\sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}'_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a),
$$

jež příslušejí případu $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = a$, kde K, L značí konstanty a konvergenční podmínky znějí buď

α) Imag. č. $(x-a)$ v mezích $(-l \dots l)$, real. č. $(x-a)$ v mezích $\left(-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}\right)$, a při tom

$$
l \geqq \log(1+\sqrt{2}), \qquad |\sin(x-a)| < 1,
$$

aneb

$$\beta)\quad l < \log(1+\sqrt{2}),\qquad |\sin(x-a)| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}.$$

(*F. Gomes Teixeira*, Bulletin des Sciences mathématiques, 2. řada, sv. XIV; 1890.)

IV. *Věta Eisensteinova,* že mocninová řada s racionalnými součiniteli

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

může jen tehdy hověti algebraické rovnici s celistvými součiniteli

$$\Sigma \mathrm{A} x^a y^b = 0,$$

jestliže ve jmenovatelích zlomků c_0, c_1, c_2, c_3, ... přichází jen konečný počet čísel kmenných — byla oblíbeným předmětem mathematiků. Z důkazů, jež pro ni byly dány, zasluhuje zvláštní pozornosti onen, jejž před třemi lety uveřejnil v Annales de l'Ecole Normale Supérieure p. *F. Gomes Teixeira.* Důkaz ten zní následovně:

Differencujeme-li danou rovnici

$$\Sigma \mathrm{A} x^a y^b = 0$$

dle pravidla Leibnitzova n-kráte, obdržíme užívajíce známého označení symbolického:

$$\Sigma \mathrm{A}\,(x^a + y^b)^{(n)} = 0.$$

Ježto vyšší derivace než a-té funkce x^a jsou nullami, nižší pak mizí pro $x = 0$ a a-tá derivace má hodnotu $a!$, obdržíme pro $x = 0$ vzhledem k identitě

$$a!\binom{n}{a} = n(n-1)\ldots(n-a+1)$$

rovnici

$$\Sigma \mathrm{A} n(n-1)\ldots(n-a+1)\,(y^b)^{(n-a)}_{x=0} = 0,$$

kde $(y^b)^{(n-a)}$ opět značí $n-a$ násobnou derivaci mocnosti y^b.

Užijeme-li Leibnitzova pravidla derivačního, máme symbolicky

$$(y^b)^{(n-a)} = (\overset{1}{\smile}{y} + \overset{2}{\smile}{y} + \ldots + \overset{b}{\smile}{y})^{(n-a)}$$
$$= \Sigma \frac{(n-a)!\, y^{(\alpha_1)} y^{(\alpha_2)} \ldots y^{(\alpha_b)}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_b!},$$

kde součet se vztahuje ke všem řešením rovnice

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_b = n - a; \quad (\alpha_\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

a rovnice naše obdrží tvar (po dělení číslem $n!$)

$$\sum_{a,\, b,\, \alpha} A \frac{y_0^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!} \frac{y_1^{(\alpha_2)}}{\alpha_2!} \ldots \frac{y_0^{(\alpha_b)}}{\alpha_b!} = 0,$$
$$(a + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_b = n).$$

Vyjmeme-li zde členy obsahující $y_0^{(n)}$, a jež tedy příslušejí ku $a = 0$, máme

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} \Sigma' A b \,.\, y_0^{b-1} + \Sigma'' A \frac{y_0^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!} \ldots \frac{y_0^{(\alpha_b)}}{\alpha_b!} = 0,$$

čili

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} = - \frac{\sum''_{a,\, b,\, \alpha} A \frac{y_0^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!} \frac{y_0^{(\alpha_2)}}{\alpha_2!} \ldots \frac{y_0^{(\alpha_b)}}{\alpha_b!}}{\sum'_{a,\, b} A\, b y_0^{b-1}},$$

kterýžto vzorec slouží k návratnému stanovení hodnot koefficientů Maclaurinovského rozvoje kořenů y podle x. Pravá strana v čitateli obsahuje samé veličiny tvaru $\frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!}$, kde α je menší než n (a skládá se z konečného počtu členů); jmenovatel pak nezávisí na n. Je-li dáno $y_0 = y_0^{(0)}$ jako racionalné číslo, obdržíme odtud postupem y_0', y_0'', $\ldots$ $y_0^{(n)}$, $\ldots$ jako čísla racionalná, a patrně v redukovaném tvaru jmenovatel zlomku $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ neobsahuje jiných činitelů kmenných než ty, jež přicházejí ve jmenovatelích zlomků redukovaných $\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}$, $\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}$, $\ldots$ a ony, jež jsou obsaženy v čitateli zlomku $\sum_{a,\, b} A b y_0^{b-1}$. Z toho následuje, že počet kmenných činitelů obsažených ve jmenovateli redukovaného zlomku je konečný.

V. V posledním čase vzbudily pozornosť učeného světa pokusy Bonnského professora Hertze, a když „Kölnische Zeitung“ vyhlašovala je za nezvratný důkaz pro identitu světla s elektřinou, upozornila Pražská „Bohemia“ ze dne 15. ledna 1890 na to, že prof. Zenger podobnou myšlénku vyslovil již r. 1885. Tento citát pohnul redakci časopisu „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, aby si vyžádala od českého učence o těchto věcech bližších zpráv. V krátké stati, kterou po té prof. Zenger redakci řečeného časopisu byl zaslal, ukazuje autor, že světlo vůbec není elektřinou, t. j. že pohyb, který se nám jeví jako světlo, je zcela různý od pohybu, který — jak za to máme — podmiňuje výjevy elektrické.

Prof. Zenger sice uveřejnil ve své Meteorologie der Sonne und ihres Systems (u Hartlebena ve Vídni, 1885) tvrzení, že základní formou energie jest elektřina, a že z ní lze odvoditi všechny ostatní tvary změnou druhu pohybu, tedy mezi jiným také světlo. Tomu ale dlužno rozuměti tak, že pohyb světelný svůj původ béře ve *vírech* elektrických, které se dějí s ohromnou rychlostí rotační, ale dosti zvolna postupují. Postupná rychlosť elektrického se šíření do dálky obnáší dle Zengra 4683 kilom. za vteřinu (odvozeno z pozorování severní záře na zemi a příbuzného zjevu na slunci), která se nepříliš liší od rychlosti v podmořském kabelu (4000 kilom.), kdežto rychlosť světla obnáší 300.000 kilom. za vteřinu.

Ke stejnému náhledu, že elektrická radiace liší se od pohybu světelného, dospěli na základě pokusů Sarasin a de la Rive (Comptes rendus ze dne 13. ledna 1890), a s nimi projevil souhlas Cornu (tamtéž, str. 75; aneb Lumière Electrique, sv. 35., str. 337.).

Že elektřina jest pohyb vířivý, seznal p. Zenger z pozorování zbytků zrcadla po úderu bleskovém.

Souvislosť mezi světlem a elektřinou jest otázka, jejíž bližší experimentalní a mathematické řešení jest úkol velkolepý; českému učenci náleží zásluha, že prvý zde vyslovil hypothesi základní, na níž pracovati bude době příští; zásluha tato jest uznávána; tak aspoň činí italský časopis Electricità v 2. čísle loňského ročníku, poznamenávaje, že v době, kdy četní fysikové pokoušejí se o objevení souvislosti mezi světlem a elektřinou, je zajímavo poznamenati, že první správnou myšlénku o věci té vyslovil před lety professor Zenger na škole polytechnické v Praze.

Zakončujíce tento kusý referát, který měl za účel upozorniti na práce českého fysika, uveďme ještě některé prameny, v nichž lze se o věci bližšího dočísti:

Věstník král. české společnosti náuk z r. 1878. Sjezdy mezinárodní meteorologů v Paříži 1878 a v Římě 1879. Sjezdy elektrické r. 1881, 2, 3, 9. Sjezdy Association française pour l'avancement des sciences 1884, 85, 86, 88, 89. Sjezdy německých přírodníků v Berlíně 1886 a v Kolíně n. R. 1888.

Úlohy.

Úloha 7.

Řešiti rovnici

$$\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 4\sqrt[3]{(x+2)(x-3)} - 12\sqrt[3]{x-3} = 0.$$

R.

Úloha 8.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} + 6$$

$$x + y + z = 0$$

$$xyz = 2.$$

R.

Úloha 9.

Čtyři čísla celá činí posloupnost geometrickou; součet jejich jest 15 a součet jejich čtverců 85. Která jsou ta čísla?

R.