Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

# Různé věty arithmetické. [I.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 21 (1892), No. 2, 90--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123505

Zmenšením indexu $m$ o 1 možno, poněvadž jsme $m$ neomezili, psáti:

$$\underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{F}}} \frac{b_k}{a_k} = \frac{p_{m-1} + p_{m-2}\, x_{m-1}}{q_{m-1} + q_{m-2}\, x_{m-1}}, \tag{11}$$

z čehož plyne srovnáním se (7)

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= p_{m-2}, \\ \mathrm{N} &= q_{m-2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Dosazením těchto hodnot do (9) obdržíme hledané formule:

$$\begin{aligned} p_m &= a_m p_{m-1} + b_m p_{m-2}, \\ q_m &= a_m q_{m-1} + b_m q_{m-2}, \end{aligned} \tag{13}$$

jež se obyčejně odvozují způsobem induktivním.

---

# Různé věty arithmetické. *)

Abiturentům píše

**M. Lerch,**

docent mathematiky na české vysoké škole technické.

## I.

Každému kladnému číslu realnému $x$ odpovídá celistvé číslo udávající jeho celky, t. j. největší celistvé číslo obsažené v $x$; tyto celky čísla $x$ znamenejme po příkladu Legendreově $\mathrm{E}(x)$ (E jako začáteční písmě slova entier = celistvý) aneb dle Gausse $[x]$. Pro všecka $x$ hovící podmínce $0 \leqq x < 1$ jest $\mathrm{E}(x) = 0$, pro $1 \leqq x < 2$ pak $\mathrm{E}(x) = 1$, dále pro $2 \leqq x < 3$ bude $\mathrm{E}(x) = 2$ atd., obecně při $n \leqq x < n + 1$ pak $\mathrm{E}(x) = n$. Studiem vlastností tohoto v podstatě prajednoduchého výrazu $\mathrm{E}(x)$ chceme se zabývati v této stati.

1. Buďtež $n$, $k$ dvě celistvá kladná čísla; zlomky $\frac{n}{k}$,

---

*) Ukázky z přednášek konaných na české vysoké škole technické v zimním semestru 1891—2.

$\frac{n-1}{k}$ mají pak celky společné, je-li zbytek zlomku $\frac{n}{k}$ od nully různým, t. j. není-li $n$ dělitelno číslem $k$; je-li však $n$ dělitelno číslem $k$, bude $\frac{n}{k}$ celistvým, a celky čísla $\frac{n-1}{k}$ budou $\frac{n}{k}-1$. Z toho následuje, že

*rozdíl* $E\left(\frac{n}{k}\right) - E\left(\frac{n-1}{k}\right)$ *jest roven 1, je-li k jedním z dělitelů čísla n* (inclus. $k = 1$ a $k = n$), *ale roven nulle v případě opačném.*

Součet těchto rozdílů

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{E\left(\frac{n}{k}\right) - E\left(\frac{n-1}{k}\right)\right\}$$

skládá se z členů, z nichž pouze ony nejsou nullami (a pak jsou rovny 1), které odpovídají dělitelům $k$ čísla $n$; následuje z toho, že součet ten rovná se tolika jednotkám, kolik máme dělitelů čísla $n$, t. j. bude

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{E\left(\frac{n}{k}\right) - E\left(\frac{n-1}{k}\right)\right\} = \Theta(n),$$

kde $\Theta(n)$ *značí počet dělitelů čísla n*; tedy na př. $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$, $\Theta(8) = 4$, $\Theta(9) = 3$.

Vzorec poslední lze psáti

$$\Theta(n) = \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n-1}{k}\right);$$

v pravo je poslední člen druhého součtu $E\left(\frac{n-1}{k}\right)$ patrně nullou, a tedy lze jej vynechati, čímž obdržíme

$$\Theta(n) = S_n - S_{n-1},$$

kde psáno

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right), \quad S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} E\left(\frac{n-1}{k}\right).$$

Takto obdržíme řadu vzorců

$$\begin{aligned}
\Theta(n) &= S_n - S_{n-1}, \\
\Theta(n-1) &= S_{n-1} - S_{n-2}, \\
\Theta(n-2) &= S_{n-2} - S_{n-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Theta(3) &= S_3 - S_2, \\
\Theta(2) &= S_2 - 1, \\
\Theta(1) &= 1,
\end{aligned}$$

jichž sečtením plyne

$$\Theta(1) + \Theta(2) + \Theta(3) + \ldots + \Theta(n-1) + \Theta(n) = S_n,$$

čili

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right), \tag{1}$$

vzorec velmi interessantní, který byl slavný mathematik francouzský p. Hermite odvodil cestou analytickou. *)

2. Z odstavce předešlého vysvitá, že

$$k\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - k\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right) = \begin{cases} k, & \text{je-li } k \text{ jedním z dělitelů č. } n, \\ 0 & \text{v případě opačném,} \end{cases}$$

a že tedy součet

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ k\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - k\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right) \right\}$$

sestává z členů, které jsou buď děliteli $k$ čísla $n$ aneb nullami, takže bude

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ k\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - k\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right) \right\} = \Theta_1(n),$$

*značí-li $\Theta_1(n)$ součet všech dělitelů čísla $n$* (inclus. $1, n$).

Jelikož tu lze opět psáti

$$\Theta_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right),$$

obdržíme podobně jako předešle vztah

---

*) V pojednání původně vyšlém ve spisech Petrohradské akademie, otištěném pak v 5. sv. Acta mathematica.

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \Theta_1(k) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right).$$

3. Z věty základní vyložené v odstavci 1. plyne rovněž, že bude při libovolném $s$

$$k^s\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - k^s\,\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right) = \begin{cases} k^s, & \text{je-li } k \text{ jedním z dělitelů čísla } n, \\ 0 & \text{v případě opačném,} \end{cases}$$

a že tedy součet

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{k^s\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - k^s\,\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right)\right\} = \Theta_s(n)$$

rovná se součtu $s$-tých mocnin všech dělitelů čísla $n$; obdržíme odtud podobně jako dříve vztah:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} \Theta_s(k) = \sum_{k=1}^{n} k^s\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right),$$

jenž pro $s = 0$ resp. 1 přejde ve vzorce (1) a (2).

4. Zobecnění výsledků těchto leží na snadě. Znamenejme $f(1), f(2), f(3), \ldots$ libovolné veličiny, a položme

$$(4) \qquad \sum_{\delta} f(\delta) = \mathrm{F}(n),$$

kde v součtu na levé straně přicházejí všichni dělitelé $\delta$ čísla $n$; na př.

$$\mathrm{F}(12) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(12).$$

Dle principu základního vyvozeného v odstavci 1. bude

$$f(k)\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - f(k)\,\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right) = \begin{cases} f(k), & \text{je-li } k \text{ dělitelem čísla } n, \\ 0 & \text{v případě opačném,} \end{cases}$$

a tedy bude součet

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{f(k)\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) - f(k)\,\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{k}\right)\right\}$$

rovnati se součtu všech výrazů $f(k)$, v nichž $k$ značí dělitele čísla $n$; jinými slovy náš výraz bude

$$\sum f(\delta) = \mathrm{F}(n),$$

t. j. bude

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)\, E\left(\frac{n}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\, E\left(\frac{n-1}{k}\right),$$

kde v druhém součtu v pravo vynechán poslední člen ($k = n$) rovný nulle. Píšeme-li pravou stranu ve tvaru $S_n - S_{n-1}$, najdeme podobně jako v odstavci 1. vzorec

$$F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n) = S_n$$

čili

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)\, E\left(\frac{n}{k}\right). \tag{5}$$

Uveďme některé příklady. Položíme-li $f(k) = (-1)^k$, bude součet

$$F(n) = \sum_{\delta} (-1)^{\delta}$$

obsahovati tolik kladných jednotek, kolik má $n$ dělitelů sudých, a tolik záporných jednic, kolik má uvedené číslo dělitelů lichých; takže $F(n)$ *značí přebytek počtu dělitelů sudých nad lichými*, a ze vzorce (5) plyne

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k E\left(\frac{n}{k}\right).$$

Znamená-li dále $f(k) = \varphi(k)$ počet čísel menších než $k$ a nesoudělných s $k$ (t. j. nemajících s číslem $k$ společných dělitelů kromě 1), bude — jak z arithmetiky známo a co při jiné příležitosti v tomto časopise vyložíme — součet $\Sigma\varphi(\delta)$ vztažený ke všem dělitelům čísla $n$ roven tomuto číslu, tedy $F(n) = n$, takže rovnice (5) poskytne vzhledem ku známé rovnici

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

vztah:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\, E\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Znamená-li $f(k)$ jednotku pro $k > a$, a nullu pro $k \leqq a$ (kde $a$ jest dané číslo celistvé), bude $F(n) = \Sigma f(\delta)$ značiti počet dělitelů čísla $n$, které jsou větší než $a$, kterýžto počet jsme ve svých pracích arithmetických označili symbolem $\psi(n, a)$, a my obdržíme:

$$\sum_{k=a+1}^{n} \psi(k, a) = \sum_{k=a+1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right).$$

(Dokončení.)

---

# Drobné zprávy.

Napsal

**M. Lerch,**

docent české vysoké školy technické v Praze.

I. Ve své znamenité práci „Zur Darstellung von Reihen durch Integrale“ (Journal f. d. reine und angew. Mathematik, sv. 105) dokazuje pan *Kronecker* některé obecné vzorce summační a uvádí následující interessantní applikace:

1. Značí-li $v$ realnou veličinu kladnou, bude

$$(\mathrm{L}')\qquad 2\sum_{h=0}^{*\frac{1}{v^2}} e^{h^2v^2\pi i} = \frac{1}{v}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}\left(1 + e^{-\frac{\pi i}{v^2}}\right)$$

$$+ 2\sin\frac{2\pi}{v^2}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi i}{v^2}}}{v}\int_0^\infty \frac{e^{u^2\pi i}\,du}{\cos\frac{2u\pi i}{v} - \cos\frac{2\pi}{v^2}},$$

kde v součtu $\Sigma^*$ dlužno první člen redukovati na polovičku, a též poslední, je-li $\frac{1}{v^2}$ celistvé číslo; pan Kronecker píše

$$\sum_{0<h<\frac{1}{v^2}} e^{h^2v^2\pi i} + \sum_{0\leqq k\leqq\frac{1}{v^2}} e^{k^2v^2\pi i}.$$

Ze vzorce toho plyne po krátké úvaze, že při $v^2 = \frac{2}{n}$ (kde $n$ je celistvé kladné číslo), bude

$$2\sum_{h=0}^{*\frac{1}{2}n} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}} = \frac{i + i^{1-n}}{i+1}\sqrt{n},$$

čímž řešen slavný problém Gaussův, stanoviti tyto *Gaussovy součty*, způsobem ryze analytickým na základě jediné počtu in-