Jak strojiti osy plochy kuželové stupně druhého.

Napsal

professor **Josef Šolín.**

Plocha kuželová stupně druhého má tři osy; konstrukce těchto os jest úlohou stupně třetího. Úlohy takové řeší se měřicky buď křivkou třetího řádu nebo třetí třídy, buď dvěma kuželosečkami; řešení kuželosečkami lze upraviti tak, aby jednou z nich byla kružnice. Obsahují-li data úlohy obecnou kuželosečku skutečně sestrojenou (zobrazenou), můžeme užiti této křivky, a jest nám sestrojiti jen ještě kružnici.

Než přistoupíme k úloze samé, připomeneme krátce některé relace z theorie kuželoseček, pokud jich pak budeme potřebovati. —

1. Dva body m, n zoveme sdruženými vzhledem ke kuželosečce Γ, obsažen-li bod n na poláře bodu m a pak i bod m na poláře bodu n vzhledem k dotčené křivce. Poláry bodů m, n protínají se v bodě p, jehož polárou jest přímka mn; m, n, p jsou pak tři sdružené poly křivky Γ (vrcholy polového trojúhelníka této křivky).

Určíme-li k bodu m dané přímky Q bod m' téže přímky tak, aby spolu sdruženy byly vzhledem ku křivce Γ stupně druhého, dostaneme dvojinu mm' řady involuční (Q), která se zove řadou sdružených polů (neb i harmonických polů) křivky Γ. Samodružnými body této řady jsou průsečíky přímky Q s křivkou Γ.

Dány-li dvě kuželosečky Γ_1, Γ_2 v téže rovině, odpovídá určitému bodu m vzhledem ku křivce $\left\{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\}$ polára $\left\{\begin{matrix}M_1\\ M_2\end{matrix}\right\}$; společný bod m' obou polár M_1, M_2 sdružen jest s bodem m vzhledem k *oběma* křivkám Γ_1, Γ_2. (Bodem m jdou naopak poláry bodu m' vzhledem ku křivkám Γ_1, Γ_2.) K určitému bodu m náleží takto vůbec jen jediný bod m'. Jsou-li však 1, 2, 3, 4 společné body křivek Γ_1, Γ_2 a sekou-li se paprsky 12 a 34 v bodě x, paprsky 13 a 24 v bodě y, paprsky 14 a 23 v bodě z, náleží k bodu x táž polára yz, k bodu y táž polára xz, k bodu z táž polára xy vzhledem k oběma kuželosečkám; s každým tímto bodem x, y, z sdruženy jsou tedy vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2 body nesčíslné, to všecky body příslušné poláry; naopak náleží ke všem bodům přímky yz, xz, xy jediný bod sdružený x, y, z. Body x, y, z jsou společnými třemi sdruženými poly obou kuželoseček Γ_1, Γ_2 (xyz jest společný polový trojúhelník křivek Γ_1, Γ_2).

Posouváme-li bod m na přímce P, točí se polára jeho $\left\{ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\}$ vzhledem ku $\left\{ \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\}$ okolo polu $\left\{ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\}$ přímky P vzhledem k téže křivce, vytvořujíc tím svazek paprskový $\left\{ \begin{matrix} (p_1) \\ (p_2) \end{matrix} \right\}$ projektivný k řadě bodové (P). Svazky (p_1), (p_2) jsouce vespolek projektivné vytvořují kuželosečku Π, jež obsahuje body p_1, p_2 a jest měřickým místem bodů m' sdružených s body přímky P vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2. Řada bodů m na přímce P a řada bodů m' na křivce Π jsou projektivné. Říkejme krátce, že jsou P a Π spolu sdruženy vzhledem ku křivkám Γ_1, Γ_2.

Kuželosečka Π, sdružená takto s kteroukoli přímkou P, obsahuje vrcholy x, y, z společného polového trojúhelníka křivek Γ_1, Γ_2. Každá přímka P seče zajisté strany yz, xz, xy dotčeného polového trojúhelníka v bodech, s nimiž body x, y, z jsou sdruženy. Body x, y, z jsou tedy společné body veškerých kuželoseček Π, jež odpovídají přímkám P té roviny. Dána-li určitá přímka P a jsou-li p_1, p_2 poly její vzhledem ku Γ_1, Γ_2, ustanovena jest příslušná kuželosečka Π pěti body x, y, z, p_1, p_2.

Neskončeně vzdálené přímce U_∞ roviny odpovídá tak určitá kuželosečka T, jež obsahuje středy o_1, o_2 křivek Γ_1, Γ_2. Společným bodům přímky P a křivky T odpovídají společné body křivky Π a přímky U_∞. Z toho, jak se má přímka P ku křivce T, poznáváme tedy, jak se má křivka Π ku přímce U_∞, jest-li tedy Π ellipsou, parabolou či hyperbolou.

Mysleme si v rovině křivek Γ_1, Γ_2 dvě přímky P a příslušné dvě kuželosečky Π; společnému bodu q obou přímek P odpovídá společný bod q' obou křivek Π, jež tedy se protínají v bodech x, y, z, q'. Točíme-li přímku P okolo bodu q, stanovíme tím nesčíslné kuželosečky Π, jež obsahujíce vesměs body x, y, z, q' náležejí ke svazku kuželosečkovému $(xyzq')$. Jinému svazku paprskovému (q_1) odpovídá jiný svazek kuželosečkový $(xyzq'_1)$; veškerým přímkám P roviny odpovídají nesčíslné svazky kuželosečkové, jež mají však společné tři body základní x, y, z; souhrn veškerých těchto kuželoseček zove se *sítí* kuželosečkovou; znamenejme ji (xyz).

Každá kuželosečka Π této síti vyvozuje se nejvýhodněji ze příslušné přímky P; určena-li křivka Π jinak, půjde o to, jak sestrojiti příslušnou přímku P. Dejme tomu, že kuželosečka Π obsahovati má dané dva body i, j; tu třeba jen odvoditi body i', j' sdružené s nimi vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2; přímka $i'\,j'$ bude pak žádanou přímkou P. Netřeba ostatně, by body i, j dány byly direktně; pokládajíce je na př. za samodružné body přímé řady involuční, můžeme je určiti dvěma dvojinami $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$ této řady. Pak možno přímku P odvoditi přímo z těchto dvojin, aniž třeba strojiti bodů i, j. Se přímkou ij sdružena jest zajisté vzhledem ku křivkám Γ_1, Γ_2 určitá kuželosečka Λ; involuční řadě $(\gamma_1\gamma_2, \delta_1\delta_2, \ldots)$ na přímce ij odpovídá involuční řada $(\gamma'_1\gamma'_2, \delta'_1\delta'_2, \ldots)$ na křivce Λ; samodružným bodům i, j oné řady odpovídají samodružné body i', j' této řady. Přímka P však, jež obsahuje body i', j', t. j. involuční osa řady na křivce Λ, prochází společnými body paprsků $\gamma'_1\delta'_1$ a $\gamma'_2\delta'_2$, $\gamma'_1\delta'_2$ a $\gamma'_2\delta'_1$, které spojují nesdružené body dvojin svrchu dotčených. Tak ustanovena přímka P konstrukcí, která nepozbývá platnosti, rozdělují-li se vzájem dvojiny $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$, tak že body i, j jsou imaginarné.

Pomysleme si přímku P a příslušnou křivku Π. Průměry křivky Π sekou ji ve dvojinách $m\mu$, ... řady involuční; osou involuce jest polára středu t. j. nekonečně vzdálená přímka U_∞ roviny; samodružnými body této řady involuční jsou oba nekonečně vzdálené body e_∞, f_∞ křivky Π. Dotčené právě řadě involuční $(m\mu, \ldots)$ na křivce Π odpovídá involuční řada $(m'\mu', \ldots)$ na přímce P; samodružným bodům e_∞, f_∞ oné odpovídají samodružné body e', f' této řady; jakož pak jsou e_∞, f_∞ společné body křivky Π a přímky U_∞, jsou e', f' společné body přímky P a křivky T, která jest sdružena se přímkou U_∞ vzhledem ku křivkám Γ_1 i Γ_2. Z toho však vyplývá, že řada $(m'\mu', \ldots)$ jest identická s involuční řadou (P) sdružených polů křivky T. Každé dvojině $m'\mu'$ této řady, t. j. každým dvěma bodům m', μ' přímky P, jež jsou spolu sdruženy vzhledem ku křivce T, odpovídají vzhledem ku Γ_1, Γ_2 krajní body m, μ průměru křivky Π.

Relace tato nepozbývá platnosti, sjednocuje-li se P s U_∞ a tedy Π s T. Dvěma bodům nekonečně vzdáleným, ježto jsou spolu sdruženy vzhledem ku křivce T, odpovídají tedy krajní body průměru této křivky.

2. Přistupme k řešení vytčené úlohy. Plocha kuželová dána buď kuželosečkou Γ_1 v rovině, kterou nazývejme základní, pak středem s položeným ovšem mimo tuto rovinu. Křivka základní Γ_1 buď úplně sestrojena; dán-li kromě té pravoúhelný průmět o_2 středu s plochy kuželové v rovinu základní, pak vzdálenosť $\overline{o_2 s} = h$, máme vše, čeho k řešení úlohy potřebujeme.

Sestrojiti osy plochy kuželové stupně druhého znamená sestrojiti tři paprsky X, Y, Z svazku prostorového [s], které by byly *a*) sdruženy vespolek vzhledem ku ploše kuželové, *b*) pravoúhelny vespolek. Jsou-li paprsky X, Y, Z vespolek sdruženy vzhledem ku ploše kuželové ($s\Gamma_1$), pronikají rovinu základní ve třech bodech x, y, z, které jsou třemi sdruženými poly křivky Γ_1; jsou-li pak X, Y, Z vespolek pravoúhelny, jsou body x, y, z třemi sdruženými poly imaginarné kružnice Γ_2 obsažené v rovině základní a určené středem o_2 a poloměrem $h\sqrt{-1}$. Myslíme-li si zajisté ve svazku prostorovém [s] paprsek $\mathfrak{M}$ a rovinu k němu pravoúhelnou μ, které pronikají rovinu základní v bodě m a přímce M, jest $o_2 m \perp$ M; vzdálenosti $\overline{o_2 m}$, $\overline{o_2 \mathrm{M}}$ bodu m a paprsku M ode středu o_2 jsou směru protivného a délky takové, že výška h jest střední úměrnou prostých těchto délek. Šetříce znamení můžeme to vyjádřiti rovnicí

$$\overline{o_2 m} \,.\, \overline{o_2 \mathrm{M}} = -h^2.$$

Z toho však seznáváme, hledíme-li zároveň k řečené již pravoúhelnosti, že jsou bod m a přímka M polem a polárou vzhledem ke kružnici středu o_2 a poloměru $h\sqrt{-1}$. Co tu vytčeno o bodu m a přímce M, platí však o každém z bodů

x, y, z a o přímce obou bodů ostatních; tím však výrok svrchu položený jest dovozen.*)

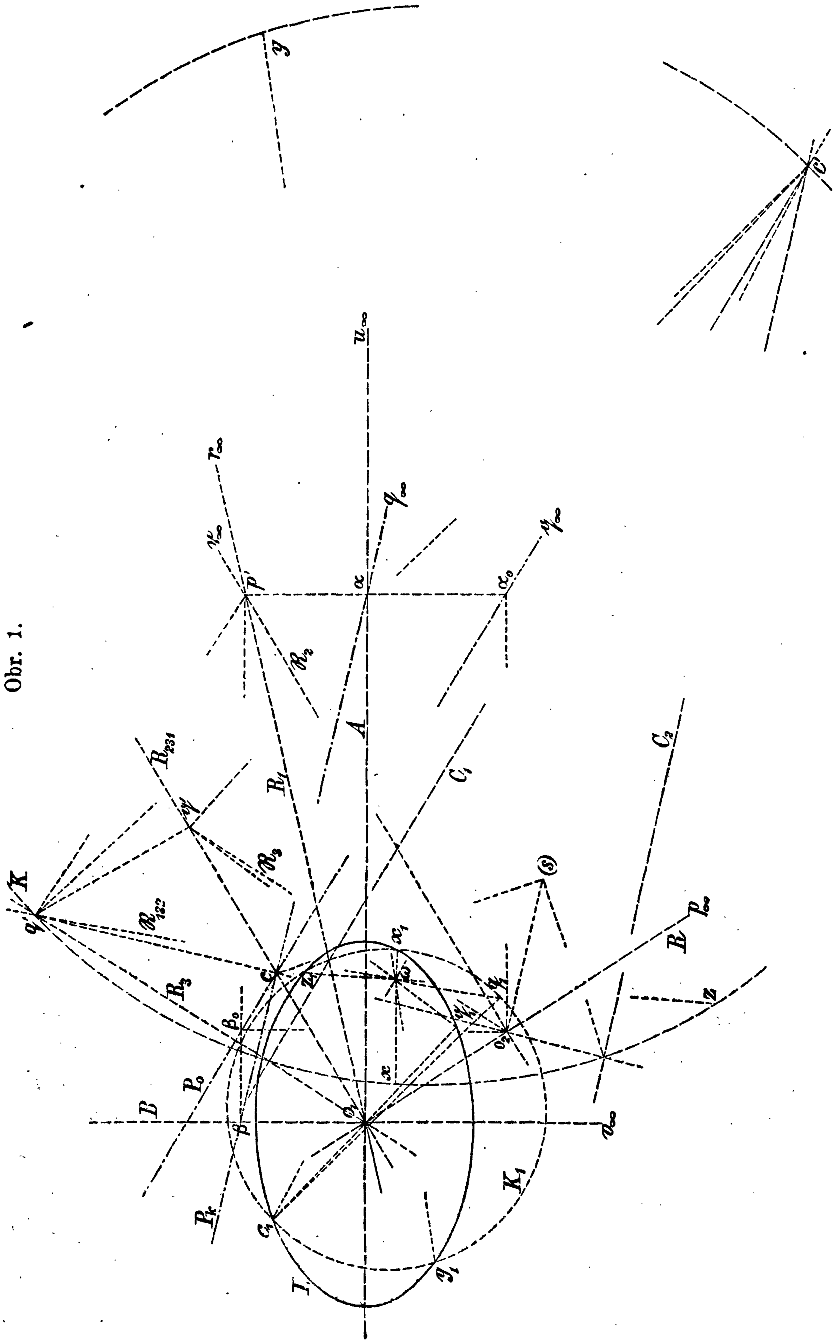
Jde tedy o to, bychom sestrojili tři body x, y, z sdružené vespolek vzhledem ke dvěma kuželosečkám: základní kuželosečce Γ_1 dané plochy kuželové a imaginarné kružnici Γ_2 středu o_2 a poloměru $h\sqrt{-1}$. Sestrojíme je pak dvěma kterýmikoli kuželosečkami síti (xyz). Nejvýhodnější řešení záležeti bude v tom, že užijeme k tomu kuželoseček Π_0, K daným křivkám Γ_1, Γ_2 podobných a stejně s nimi položených (homothetických).

Nejdříve půjde o to, bychom z dat úlohy odvodili případné určovací částky kuželoseček K, Π_0; pak bude nám sestrojiti společné body těchto křivek. Tím dělí se úloha přirozeně ve dvě části; přistupme k vyšetřování části prvé a dejme zatím tomu, že střed o_1 základní kuželosečky Γ_1 *není* v nekonečné dálce, že tedy Γ_1 jest ellipsou nebo hyperbolou. (V obr. 1. zvolena ellipsa křivkou základní.)

Známo jest, že všeliké kružnice roviny protínají nekonečně vzdálenou přímku U_∞ této roviny v týchž imaginarných dvou bodech i_∞, j_∞; jsou to samodružné body řady involuční (U_∞) sdružených polů kružnic; dvojiny této řady promítají se z každého bodu mimo U_∞ položeného pravoúhelnými dvojinami paprskovými.

Ve článku 1. bylo dotčeno, že každá kuželosečka síti (xyz) určena jest dvěma body; zvolíme-li k tomu body i_∞, j_∞, dostaneme kružnici K v síti (xyz) obsaženou a zde nutně realnou. Bychom sestrojili příslušnou přímku P_k, s nížto jest kružnice K sdružena vzhledem ku Γ_1 i Γ_2, užijme konstrukce ve článku 1. vyložené a obecně platné. V involuční řadě (U_∞) zvolme dvě dvojiny bodové tím, že vytkneme dvě dvojiny paprsků pravoúhelných; těmito buďtež jednak osy A, B křivky Γ_1, jichžto nekonečně vzdálené body jsou u_∞, v_∞, jednak společný průměr o_1o_2 nebo-li R obou křivek Γ_1, Γ_2 a pravoúhelný k němu (a

*) Osy X, Y, Z jsou vespolek sdruženy vzhledem k imaginarné ploše kuželové, určené středem s a imaginarnou kružnicí v nekonečné dálce.



Obr. 1.

tedy vzhledem ku Γ_2 s ním sdružený) průměr $\mathfrak{R}_2$*) křivky Γ_2; nekonečně vzdálené body průměrů R, $\mathfrak{R}_2$ nechť jsou p_∞, $\mathfrak{r}_\infty$.

Bodům u_∞, v_∞ odpovídají vzhledem ku Γ_1, Γ_2 body v_∞, u_∞; bodu p_∞ odpovídá bod p', v němž se protínají průměry R_1, $\mathfrak{R}_2$ křivek Γ_1, Γ_2, sdružené s průměrem R; bodu $\mathfrak{r}_\infty$ odpovídá bod o_1. Body v_∞, u_∞, p', o_1 jsou na křivce Υ sdružené s přímkou U_∞ vzhledem ku Γ_1, Γ_2; patrno, že Υ jest hyperbola pravoúhelná (rovnostranná); asymptoty její jsou rovnoběžny s osami A, B.

Jak ve článku 1. jsme vyložili, jest žádaná přímka P_k involuční osou řady ($v_\infty u_\infty$, $p'o_1$, ...) a tedy určena společným bodem α paprsků $v_\infty p'$, $u_\infty o_1$ (ident. s A), pak společným bodem β paprsků $v_\infty o_1$ (ident. s B), $u_\infty p'$. Body α, β jsou tedy pravoúhelné průměty bodu p' na osy A, B; patrno pak, že jsou spolu sdruženy vzhledem k hyperbole Υ.

Paprsky $v_\infty u_\infty$, $p'o_1$, ježto spojují sdružené body řady involuční (Υ), sekou se v bodě r_∞, který jest tedy středem involučním této řady; osa involuční P_k jest polárou bodu r_∞ a tedy průměrem hyperboly Υ sdruženým s R_1. Proto svírají P_k, R_1 s asymptotami hyperboly Υ a tím i s osami A, B křivky Γ_1 úhly rovné smyslu protivného. Což ostatně vychází také z toho, že přímky P_k, R_1 jsou úhlopříčnami obdélníka $o_1\alpha p'\beta$. Lze říci, že paprsky P_k, R_1 jsou spolu sdruženy vzhledem ke kuželosečce Γ_3, jež se skládá ze přímek A, B. Myslíme-li si pak ke průměru R_1 sdružený průměr kuželosečky Γ_3, znamenajíce jej R_{13}, můžeme říci, že přímka P_k jest rovnoběžná s průměrem R_{13}.**)

Kdybychom k bodům α, β sestrojili body α', β' sdružené s oněmi vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2, dostali bychom

---

*) Ku snadnějšímu přehledu znamenejme průměry křivky Γ_1 písmenem R, průměry křivky Γ_2 písmenem $\mathfrak{R}$; sestrojíme-li k takovému průměru sdružený průměr křivky Γ_1, Γ_2, označme jej týmž písmenem, k němu však připojme příponu 1, 2.

**) Patrno, že průměry R_{13}, R_{31} jsou totožny; dospíváme zajisté k téže přímce, stanovíme-li ke průměru R sdružený průměr R_1 křivky Γ_1 a k tomu sdružený průměr R_{13} křivky Γ_3 anebo dříve ke průměru R sdružený průměr R_3 křivky Γ_3, k tomu pak sdružený průměr R_{31} křivky Γ_1. Lze tedy obrátiti pořádek přípon 1, 3. Tak mají se i přípony 2, 3, nikoli však přípony 1, 2.

tím průměr $\alpha'\beta'$ kružnice K, poněvadž, jak svrchu již připomenuto, body α, β jsou spolu sdruženy vzhledem k hyperbole Υ. Průměr $\alpha'\beta'$ není v obrazci 1. sestrojen; za to stanoven bod q', kterýž odpovídaje společnému bodu q_∞ přímek P_k, U_∞ jest čtvrtým průsečíkem křivek K, Υ. Polárou bodu q_∞ vzhledem ku Γ_1 jest průměr R_3 této křivky sdružený s R_{31} a tedy souměrný k R vzhledem k ose A neb i B; polárou bodu q_∞ vzhledem ku Γ_2 jest průměr $\mathfrak{R}_{132}$ této křivky pravoúhelný ku P_k neb i k R_{13}. Oba průměry R_3, $\mathfrak{R}_{132}$ sekou se v žádaném bodě q'.

Nekončeně vzdálené body r_∞, q_∞ přímek R_1, P_k jsou spolu sdruženy vzhledem k hyperbole Υ; bodům těm odpovídají vzhledem ku Γ_1, Γ_2 body o_2, q', jež tedy omezují průměr křivky Υ. Poněvadž i P_k jest průměrem křivky Υ, sekou se oba průměry $o_2 q'$, P_k ve středu c hyperboly Υ; zároveň $\overline{o_2 c} = \overline{cq'}$.

Bod q' náleží kružnici K a jest tedy krajním bodem určitého průměru této křivky; sestrojme druhý bod krajní téhož průměru. Tu jest nám stanoviti na přímce P_k bod sdružený s bodem q_∞ vzhledem ku křivce Υ; tím jest však střed c křivky Υ. Sestrojíme-li tedy poláru $\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$ bodu c vzhledem ku $\begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{Bmatrix}$, jest průsečík c' obou těchto polár druhým krajním bodem průměru žádaného.

Ze průměru $q'c'$ sestrojí se kružnice K; na kontrolu lze užiti známé vlastnosti kuželoseček, že kružnice K, opsaná o polový trojúhelník xyz kuželosečky Γ_1, seče pravoúhelně kružnici $\Gamma_1^\dagger$, která jest soustředna s Γ_1 a má poloměr $\sqrt{a^2 + b^2}$, jsou-li a, b poloosy křivky Γ_1. Jest-li Γ_1 hyperbola, třeba položiti b^2 se znaménkem negativným; kdyby Γ_1 byla parabola, nastoupila by na místo kružnice $\Gamma_1^\dagger$ řídící přímka paraboly, kterážto přímka pak obsahuje střed kružnice K.

Obraťme se nyní ke kuželosečce Π_0, která jest dané křivce základní Γ_1 podobna a stejně s ní položena, která tedy obsahuje společné body křivky Γ_1 a přímky U_∞.

Jest-li Γ_1 hyperbola, seče přímku U_∞ ve dvou realných bodech ε_∞, φ_∞; sestrojíme-li pak body ε', φ' sdružené s oněmi vzhledem ku Γ_1 i Γ_2*), jest $\varepsilon'\varphi'$ přímka P_0, jíž odpovídá křivka Π_0 síti (xyz). Jest-li Γ_1 ellipsa, seče přímku U_∞ ve dvou imaginarných bodech ε, φ; jsou to samodružné body involuční řady (U_∞) sdružených polů křivky Γ_1; dvojinami této řady jsou nekončeně vzdálené body sdružených průměrů křivky Γ_1. Za jednu dvojinu průměrovou zvolme osy A, B, jež určují dvojinu bodovou u_∞, v_∞; druhá dvojina průměrová buď R, R_1, jež určuje dvojinu bodovou p_∞, r_∞. S těmito čtyřmi body sdruženy jsou vzhledem ku Γ_1 i Γ_2 příslušně body v_∞, u_∞, p', o_2 vesměs už stanovené; pro příčiny, jež vytkli jsme ve článku 1., jest společný bod α_0 paprsků $v_\infty p'$, $u_\infty o_2$ jedním, společný bod β_0 paprsků $v_\infty o_2$, $u_\infty p'$ druhým bodem žádané přímky P_0. Tato jest vzhledem k hyperbole Υ polárou bodu r_∞, v němžto se protínají paprsky $v_\infty u_\infty$, $p'o_2$; jest tedy P_0 průměrem hyperboly sdruženým s $\mathfrak{R}_2$, což ostatně vychází také z toho, že $\mathfrak{R}_2$ a P_0 jsou úhlopříčné obdélníka $o_2\alpha_0 p'\beta_0$. Znamenajíce písmenem R_{23} průměr kuželosečky Γ_3 sdružený s paprskem $\mathfrak{R}_2$, můžeme říci, že jest P_0 rovnoběžna s průměrem R_{23}.

Kdybychom sestrojili body α'_0, β'_0 sdružené s α_0, β_0 vzhledem ku Γ_1, Γ_2, dostali bychom průměr křivky Π_0, protože body α_0, β_0 jsou spolu sdruženy vzhledem ku křivce Υ.

Přímky P_t, P_0 sekou se v bodě c; proto jest c' čtvrtý společný bod křivek K, Π_0. Sestrojme průměr křivky Π_0, jehož jedním bodem krajním jest c'. Poněvadž s bodem c sdružen jest vzhledem k Υ nekončeně vzdálený bod q_∞ přímky P_0, třeba sestrojiti bod q' sdružený s q_∞ vzhledem ku Γ_1, Γ_2. Polárou bodu q_∞ vzhledem ku Γ_1 jest průměr R_{231} křivky Γ_1 sdružený s P_0 neb i s R_{23}; polárou bodu q_∞ vzhledem ku Γ_2 jest průměr $\mathfrak{R}_3$ pravoúhelný ku P_0 neb i ku R_{23} a tedy sdružený s R vzhledem ku Γ_3. Průměry R_{231}, $\mathfrak{R}_3$ sekou se v bodě q', a $c'q'$ jest žádaný průměr křivky Π_0.

Nekončeně vzdálené body r_∞, q_∞ přímek $\mathfrak{R}_2$, P_0 jsou spolu sdruženy vzhledem k hyperbole Υ; proto jim odpovídají vzhledem ku Γ_1, Γ_2 krajní body o_1, q' průměru hyperboly Υ. Přímka o_1q' nebo R_{231} obsahuje tedy střed c hyperboly Υ, a úsečka

*) Jak patrno, jsou body ε', φ' pravoúhelné projekce bodu o_2 v asymptoty hyperboly Γ_1.

$o_1 \mathfrak{q}'$ rozpoluje se bodem c. Z toho však seznáváme, že jest $o_1 o_2 \mathfrak{q}' q'$ rovnoběžník v hyperbolu Υ vepsaný. Zároveň patrno, že poněvadž c jest na R_{231}, polára C_1 bodu c vzhledem ku Γ_1 obsahuje pol $\mathfrak{q}_\infty$ průměru R_{231} jsouc tedy rovnoběžna s P_0 a pravoúhelna k R_3 neb i k $o_2 \mathfrak{q}'$. Že polára C_2 bodu c vzhledem ku Γ_2 jest pravoúhelna k $o_2 q'$, netřeba dokládati.

Seznali jsme, že přímky P_k, P_0 jsou poláry bodů r_∞, $\mathfrak{r}_\infty$ vzhledem k hyperbole Υ; proto jsou $r_\infty q_\infty$, $\mathfrak{r}_\infty \mathfrak{q}_\infty$ dvěma dvojinami involuční řady (U_∞) sdružených polů křivky Υ. Mysleme si, že tato řada se promítá v hyperbolu Υ z bodu p' této křivky; tím vzniká na hyperbole Υ involuční řada (Υ), jež má involuční osu U_∞ a involuční střed c. Body r_∞, $\mathfrak{r}_\infty$ promítají se tu v o_1, o_2; poněvadž pak v řadě (Υ) sdružen jest bod $\begin{Bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{Bmatrix}$ s bodem $\begin{Bmatrix} \mathfrak{q}' \\ q' \end{Bmatrix}$, musí býti bod $\mathfrak{q}'$ průmětem bodu q_∞, bod q' průmětem bodu $\mathfrak{q}_\infty$. Paprsek $p'q'$ jest tedy rovnoběžný s P_0 a pravoúhelný k R_3; obdobně jest $p'\mathfrak{q}'$ rovnoběžný s P_k. V tom obsažena jest nová konstrukce bodů q', $\mathfrak{q}'$.

Dosud obírali jsme se první částí úlohy odvozujíce určovací částky kuželoseček K, Π_0; onano stanovena jest průměrem $q'c'$, tato průměrem $\mathfrak{q}'c'$. Jde tedy o sestrojení tří toliko bodů: q', $\mathfrak{q}'$, c', což nejvýhodněji vykonati lze takto. Ke společnému průměru R křivek Γ_1, Γ_2 sestrojme sdružené průměry R_1, $\mathfrak{R}_2$, R_3 kuželoseček Γ_1, Γ_2, (AB); pak průměr $\mathfrak{R}_3$ křivky Γ_2 rovnoběžný s R_3. Průměry R_1, $\mathfrak{R}_2$ sekou se v bodě p', jehožto pravoúhelná projekce q' ve průměr R_3 jest jedním z bodů žádaných. Bodem q' veďme paprsek rovnoběžný s průměrem R; paprsek ten seče se s průměrem $\mathfrak{R}_3$ v bodě $\mathfrak{q}'$, druhém to bodě žádaném. Pak ustanovme střed c rovnoběžníka $o_1 o_2 \mathfrak{q}' q'$ a sestrojme poláry C_1, C_2 bodu c vzhledem ku křivkám Γ_1, Γ_2 (tu jest nám odvoditi jediný jen bod každé poláry, poněvadž C_1 jest pravoúhelna k $o_1 q'$, C_2 k $o_2 q'$). Společný bod c' polár C_1, C_2 jest třetím bodem žádaným. —

Obraťme se nyní ke druhé části úlohy. Obě křivky K, Π_0 obsahují bod c'; jde pak o tři ostatní společné jejich body x, y, z. Kružnici K sestrojme; křivky Π_0 netřeba rejsovati. Pokládejme kuželosečky Γ_1, Π_0 za sdružené spolu útvary dvou podobných a stejně položených soustav rovinných $[\Gamma_1]$, $[\Pi_0]$ a sestrojme jeden z obou středů podobnosti těchto soustav. K tomu konci veďme průměr křivky Γ_1 rovnoběžný s průměrem $c'q'$ křivky Π_0, poznamenejme krajní jeho body písmeny c_1, q_1 a veďme paprsky $c'c_1$, $q'q_1$; společný bod ω těchto paprsků jest žádaným středem podobnosti. (Směníme-li vzájem písmena c_1, q_1, dostaneme druhý střed podobnosti). Kružnici K, kterou přisuďme soustavě $[\Pi_0]$, odpovídá v soustavě $[\Gamma_1]$ kružnice K_1, jejížto průměr $c_1 q_1$ ze průměru $c'q'$ křivky K snadně odvodíme. (Bod c_1 již máme; paprsek $c_1 q_1$ jest rovnoběžný s $c'q'$ a bod q_1 jest na paprsku $\omega q'$). Kružnice K_1 jdouc bodem c_1 seče křivku Γ_1 ještě v bodech x_1, y_1, z_1; těm odpovídají v soustavě $[\Pi_0]$ hledané body x, y, z, jež jsou obsaženy jednak ve kružnici K, jednak v paprscích ωx_1, ωy_1, ωz_1 a tedy snadně se odvodí. Tím pak úloha řešena jest úplně.

3. Zbývá nám ještě vyšetřiti, jak řešení se modifikuje, jest-li základní křivkou plochy kuželové *parabola* (obr. 2.).

Buď A osa, a vrchol, e ohnisko, D řídící přímka paraboly Γ_1, d průsečík přímek D, A, konečně $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pravoúhelné projekce bodu o_2 ve přímky A, D.

Jest-li $\mathfrak{b}_1$ bod položený na přímce D souměrně k bodu $\mathfrak{b}$ vzhledem ku d, jde průměr R_3 bodem $\mathfrak{b}_1$ a jest rovnoběžný s A; průměr R_{31} jest sice nekonečně vzdálen, ale třeba mu přisouditi směr pravoúhelný k $e\mathfrak{b}_1$; průměr $\mathfrak{R}_{312}$ jde tedy bodem o_2 rovnoběžně s $e\mathfrak{b}_1$. Průměry R_3, $\mathfrak{R}_{312}$ sekou se v bodě q'. Rozpolovací bod c úsečky $\overline{o_2 q'}$ obsažen jest patrně na ose A paraboly základní, jakož pak průměr R_{321}, na němž jest střed c hyperboly T, s osou A se sjednocuje. Zároveň patrno, že $\overline{\mathfrak{a}c} = \overline{ed}$. Polára C_1 bodu c vzhledem ku Γ_1 jest pravoúhelna k A a seče tuto přímku v bodě m' určeném tím, že $\overline{m'a} = \overline{ac}$ neb i $\overline{m'e} = \overline{dc}$; polára C_2 bodu c sestrojí se známým spůsobem v obr. 2. naznačeným. Poláry C_1, C_2 sekou se v bodě c', a kružnice K určena jest zase průměrem $c'q'$. Netřeba dotýkati, že střed kružnice obsažen jest na přímce D.

Jde dále o kuželosečku Π_0 křivce Γ_1 podobnou a stejně s ní položenou. Parabola Γ_1 dotýká se přímky U_∞ v bodě u_∞ osy A, s nímžto jest vzhledem ku Γ_1, Γ_2 sdružen bod v_∞ přímky

D; proto dotýká se přímka P_0 hyperboly T v bodě v_∞, sjednocujíc se tedy s příslušnou asymptotou $v_\infty v_\infty$, t. j. přímka P_0 jde bodem c rovnoběžně s D. Bod c' náleží parabole Π_0, nejinak i bod m' jakožto pol přímky P_0 vzhledem ku Γ_1. Bychom ustanovili bod m přímky P_0, jemuž odpovídá bod m' křivky Π_0, pomysleme si z vrcholů trojúhelníka $m'o_2c$ kolmice k protějším stranám; kolmice tyto protínají se, jak známo, v jediném bodě i. Posouvneme-li tento trojúhelník pravoúhelně k A tak, aby vrchol m' sjednotil se s bodem c', sjednotí se paprsek $m'i$ s paprskem C_2 (který jde bodem c' a jest pravoúhelný k co_2); bod i nabude polohy f, kterýžto bod jest patrně polem přímky A vzhledem ku Γ_2; paprsek ic stane se v nové své poloze polárou bodu m' vzhledem ku Γ_2 (tato polára zajisté jde bodem f a jest pravoúhelna k $m'o_2$). Tato polára seče přímku P_0 v žádaném bodě m, který jsa novou polohou bodu c hoví rovnici $\overline{cm} = \overline{m'c'}$.

Tak sestrojili jsme jednu hlavní tetivu $m'c'$ paraboly Π_0; osa A_0 této křivky jde rozpolovacím bodem n_0 této tetivy. Bychom sestrojili vrchol n' paraboly Π_0, uvažme, že dvojiny bodové $m'c'$, $n'u_\infty$ na parabole Π_0 rozdělují se harmonicky; proto dělí se harmonicky i příslušné dvojiny mc, nv_∞ na přímce P_0. Bod n, sdružený vzhledem ku Γ_1 i Γ_2 s vrcholem n' paraboly Π_0, rozpoluje tedy úsečku $\overline{cm}$ a položen jest na ose A_0. Polára bodu n vzhledem ku Γ_1 jde bodem m' a jest pravoúhelna ku přímce ed_0, znamená-li písmě d_0 společný bod přímek A_0, D; tato polára seče osu A_0 ve vrcholu n'.

Z podobnosti trojúhelníků $n'n_0m'$, d_0de vyplývá úměra

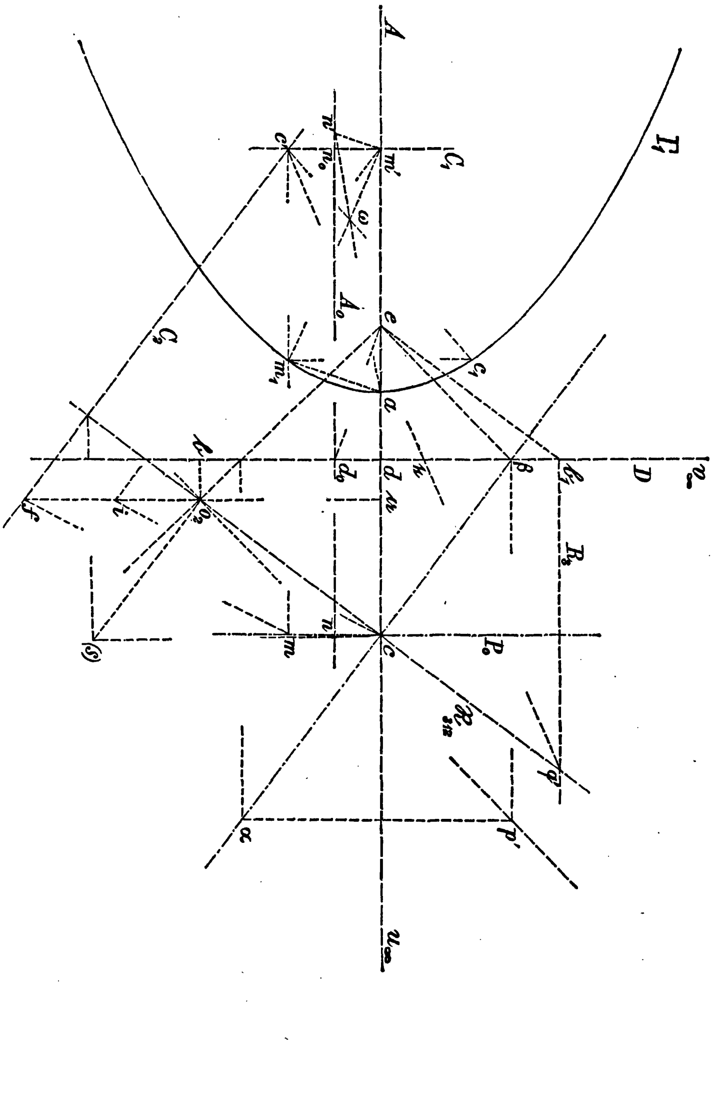
$$\frac{\overline{n'n_0}}{\overline{n_0m'}} = -\frac{\overline{d_0d}}{\overline{de}}$$

neb i

$$\overline{n_0m'}^2 = -\overline{de}\,.\,\overline{n'n_0}\,.$$

To znamená, že paraboly Γ_1, Π_0 obráceny jsou v protivné strany a že parametr paraboly Π_0 rovná se polovici parametru paraboly základní Γ_1.

Odvodivše určovací částky paraboly Π_0 pokládejme křivky Γ_1, Π_0 za sdružené útvary dvou rovinných soustav $[\Gamma_1]$, $[\Pi_0]$ podobných a stejně položených; veďme vrcholem a tetivu am_1 paraboly Γ_1 rovnoběžnou s $m'n'$; paprsky $m'm_1$, $n'a$ sekou se



Obr. 2.

ve středě ω podobnosti obou soustav. Poněvadž $am_1 \perp ed_0$, jest A_0 průměr paraboly Γ_1 sdružený s tetivou am_1; bod m_1 obsažen jest tedy na přímce $c'm$. Vedeme-li pak tetivu m_1c_1 paraboly Γ_1 pravoúhelnou k ose A, jest c_1 bod soustavy $[\Gamma_1]$, jenž odpovídá bodu c' soustavy $[\Pi_0]$. Střed podobnosti dostaneme tedy také paprsky $m'm_1$, $c'c_1$ a netřeba nám strojiti vrcholu n'. Zároveň seznáváme, že $\overline{m'\omega} = \frac{1}{3}\overline{m'm_1}$.

Jest-li tedy Γ_1 parabola, řeší se úloha prostě takto.

Sestrojme pravoúhelnou projekci a bodu o_2 v osu A a ustanovme na této ose bod c tak, aby $\overline{ac} = \overline{ed}$. Bod q' obsažen jest na přímce o_2c tak, že $\overline{cq'} = \overline{o_2c}$. K bodu c sestrojme bod sdružený c' vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2; tím ustanovíme průměr $c'q'$ kružnice K. Bodem c' veďme přímku pravoúhelnou k ose A a přímku rovnoběžnou s touto osou; tato přímka protne parabolu Γ_1 v bodě m_1, onano ustanoví na ose A bod m'. Středem ω podobnosti soustav $[\Gamma_1]$, $[\Pi_0]$ jest koncový bod první třetiny úsečky $\overline{m'm_1}$. Středu ω užije se pak spůsobem svrchu vyloženým a v obr. 1. znázorněným. —

Připomenutí. Není-li základní křivka Γ_1 plochy kuželové úplně zobrazena, lze užiti spůsobem obdobným jiné obecné kuželosečky Γ_0 úplně sestrojené. Úloha řeší se zase kružnicí K a kuželosečkou Π_0, která však jest nyní ku křivce Γ_0 podobna a stejně s ní položena. —

4. Na konec ještě vyložme, jak úlohu řešiti *křivkou řádu třetího*. Řešení to po stránce theoretické ovšem zůstává za řešením svrchu vyloženým; prakticky však není bez výhody, běží-li o to, bychom rychle sestrojili jednu osu X plochy kuželové, na př. onu, která jest obsažena v nitru plochy, její bod základní x tedy v nitru křivky základní. Konstrukce obou ostatních os jest pak úlohou stupně druhého.

Obírajíce se ve článku 1. kuželosečkami Π, ježto jsou vzhledem ku dvěma kuželosečkám Γ_1, Γ_2 sdruženy s přímkami P téže roviny, vyložili jsme, že náležejí-li přímky P témuž svazku paprskovému (q), náležejí příslušné křivky Π svazku $(xyzq')$ kuželoseček. Dodožme k tomu, že svazek paprskový (q) a svazek kuželosečkový $(xyzq')$ jsou projektivné; pročež sdružené prvky jejich se protínají v bodech křivky Φ řádu třetího. Křivka Φ obsahuje střed q svazku paprskového a základní body x, y, z, q' svazku kuželoseček; v bodě q dotýká se paprsku qq', který náleží ke kuželosečce jdoucí bodem q; v každém z bodů x, y, z, q' dotýká se příslušné kuželosečky, jež odpovídá paprsku qx, qy, qz, qq'. Paprsku qq' odpovídá kuželosečka $xyzq'q$, jež tedy se dotýká křivky Φ v bodě q'. Kuželosečky, jež odpovídají paprskům qx, qy, qz, skládají se každá ze dvou přímek; tak odpovídá na př. paprsku qx kuželosečka složená ze přímek yz, xq' (s bodem x sdruženy jsou zajisté vzhledem ku Γ_1, Γ_2 všecky body přímky yz, která tedy jest částí příslušné kuželosečky; druhá část této kuželosečky jest také přímá a obsahuje jednak bod q' sdružený s q, jednak bod x sdružený s průsečíkem přímek qx, yz). Proto dotýká se paprsek xq' křivky Φ v bodě x, a obdobně jsou paprsky yq', zq' tečnami křivky Φ v bodech y, z. A t. d.

Pomysleme si kterýkoli paprsek P svazku (q) a příslušnou kuželosečku Π svazku $(xyzq')$. Paprsek P obsahuje tři body křivky Φ: bod q a průsečíky f, g paprsku P s kuželosečkou Π. Body f, g jsou spolu sdruženy vzhledem k oběma daným křivkám Γ_1, Γ_2; poněvadž zajisté bod f náleží $\left\{\begin{matrix}\text{přímce P}\\ \text{křivce }\Pi\end{matrix}\right\}$, obsažen jest bod sdružený g na $\left\{\begin{matrix}\text{křivce }\Pi\\ \text{přímce P}\end{matrix}\right\}$. Ku křivce Φ dospějeme tedy také, sestrojíce na každém paprsku P svazku (q) dvojinu bodů f, g sdružených vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2. — Měníme-li bod q, mění se i křivka Φ; body x, y, z však náležejí všem křivkám Φ. Sestrojíme-li jedinou ze křivek Φ, k ní pak tečny příslušným bodem q', jsou body dotyčné žádanými základními body x, y, z os X, Y, Z plochy kuželové.

Obraťme se nyní k řešení samému. Za bod q zvolme nekonečně vzdálený bod u_∞ osy A křivky základní Γ_1; nekonečně vzdálený bod v_∞ druhé osy B jest pak bodem q'; příslušná křivka Φ_u dotýká se přímky U_∞ v bodě u_∞ a seče ji v bodě v_∞, dotýkajíc se tu hyperboly T; asymptota $v_\infty v_\infty$ této hyperboly jest zároveň asymptotou křivky Φ_u.

Body křivky Φ_u na jednotlivých paprscích svazku (u_∞) strojíme, určujíce na každém paprsku P body f, g sdružené spolu vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2 zároveň; jsou to samodružné body dvou řad involučních na přímce P: řady sdružených polů křivky Γ_1 a řady sdružených polů křivky Γ_2. Seče-li paprsek P křivku Γ_1 v bodech realných m_1, m_2, dostaneme na něm žádané body f, g rozpolíce úhly přímek sm_1, sm_2 plochy kuželové; rozpolovací paprsky jsou spolu sdruženy vzhledem ku ploše kuželové $(s\Gamma_1)$ a poněvadž jsou vzájemně pravoúhelné, sdruženy také vzhledem ku ploše kuželové $(s\Gamma_2)$; rozpolovací tyto paprsky pronikají tedy rovinu základní v bodech f, g sdružených vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2.

Zvolíme-li naopak bod v_∞ za bod q, vznikne týmž způsobem křivka Φ_v, jež má vlastnosti zcela obdobné.

Tečny křivky Φ_u v bodech x, y, z procházejí bodem v_∞, tečny křivky Φ_v v týchž bodech jdou naopak bodem u_∞; křivky Φ_u, Φ_v protínají se tedy v bodech x, y, z pravoúhelně. Na tom založme své řešení.

Dejme na př. tomu, že jest Γ_1 ellipsa a že jest nám určiti osu X plochy kuželové $(s\Gamma_1)$, obsaženou v nitru plochy. Tu protněme ellipsu Γ_1 několika paprsky rovnoběžnými s jednou osou A této křivky a sestrojme na nich body křivky Φ_u, pokud jsou položeny v nitru ellipsy, rozpolíce příslušné úhly při středu s.*) Že křivka Φ_u jde vrcholy ellipsy položenými na druhé ose B, netřeba dokládati. Veďme stanovený tak oblouk křivky Φ_u a k němu tečnu rovnoběžnou s osou B. Tato tečna protne ellipsu Γ_1 v bodech n_1, n_2, a rozpolíme-li příslušný úhel paprsků sn_1, sn_2, dostaneme tím bod dotyčný x. Ku kontrole veďme bodem x tetivu rovnoběžnou s A, jež protne ellipsu Γ_1 v bodech p_1, p_2, a přesvědčme se, rozpoluje-li přímka sx také příslušný úhel paprsků sp_1, sp_2.

Vše to vykonati lze rychle a snadně. Žádá-li se také obou ostatních os Y, Z, sestrojme poláru bodu x vzhledem ku křivkám Γ_1, Γ_2, na ní pak body y, z sdružené vzhledem k oběma křivkám Γ_1, Γ_2.

*) Přirovnej: Olivier, Cours de géométrie descriptive.