Karel Zahradník

O jisté biracionální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 6--25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123495

O jisté biracionální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.

Napsal Dr. K. Zahradník.

(Dokončení.)

29. Poukázal jsem [1]) na jednoduchou biracionální příbuznost, která je vyjádřena rovnicemi [2])

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}, \qquad y = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}, \tag{3}$$

z nichž opět plyne

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Geometrické přidružení bodů $M(x \mid y)$, $M_1(x_1 \mid y_1)$ bylo na zmíněném místě vyloženo a vyšetřen byl obraz přímky

$$(M_1) \equiv ax_1 + by_1 + c = 0.$$

---

[1]) Viz Časopis math. a f. sv. 34. pag. 105, jakož i Sitzungsb. d. k. Akad. der Wissenschaften Wien 1904 moje pojednání: *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung.* Toto pokračování vyšlo v týchž zprávách akademie pod náslovem: *Über eine birationale kubische Verwandtschaft und deren Anwendung.* Wien, Bd. CXIV, Mai 1905.

[2]) Viz *Salmon-Fiedler*: Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Leipzig, 1882. II. Aufl. pg. 394, 404. Přímkám odpovídají dle transformace (1) cirkulární křivky třetího stupně se společným dvojným bodem a společnými tečnami v tomto bodě. Mají tudíž dvojný bod a čtyři jednoduché body společné. Při transformaci (3) nejsou ty křivky třetího stupně cirkulární. Místo imaginárných kruhových bodů nastoupí zde úběžné body os souřadnic jako pevné body. Tečny společného dvojného bodu, jenž je osamotnělý bod, jsou isotropické přímky. Rovnice příbuznosti (1) a (3) můžeme též vyjádřiti:

$$(x_1 + iy_1)\ (x + iy) = ixy,$$

aneb

$$rr_1 e^{i(\varphi + \varphi_1)} = xy\, e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Srovnej »Časopisu« sv. 34. čl. 28. tohoto pojednání. Na str. 341. má na 9tém řádku zdola místo polárou státi polem. Obrazce v pokračování tohoto pojednání Časopis díl 34. pg. 330, 339, 340 mají býti označeny pořadem 7, 8, 9.

V následujícím vyšetříme transformaci křivky n-ho stupně vůbec a kuželosečky zvláště. Při tom upotřebíme následujícího označení. Je-li u_h homogenní funkce h-ho stupně proměnlivých x, y, označíme v_h funkci, která z u_h vznikne, zaměníme-li x s y_1 a y s x_1. Je-li tedy $u_h = f(x, y)$, je $v_h = f(y_1, x_1)$. Dále je $u_0 = v_0$,

30. Křivka n-ho stupně

$$(M) \equiv u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

přechází transformací (3) ve křivku $3n$-ho stupně

$$(M_1) \equiv (x_1^2 + y_1^2)^n v_n + (x_1^2 + y_1^2)^{n-1} x_1 y_1 v_{n-1} + \ldots + (x_1^2 + y_1^2)\, x_1^{n-1} y_1^{n-1} v_1 + x_1^n y_1^n v_0 = 0, \quad (41')$$

vezmeme-li pól transformace za počátek souřadnic.

Transformovaná křivka (M_1) má v pólu transformace $2n$-násobný bod; n tečen toho bodu splývají s jednou osou souřadnic a druhých n tečen s druhou osou souřadnic. Imaginárné kružné body jsou pro křivku (M_1) n-násobné body.

Že je pól O bodem $2n$-*násobným křivky zobrazené, jest* geometricky patrno, neb *každému průsečníku křivky (M) s osou* souřadnic odpovídá společně pól transformace O. Z rovnic (1) vysvítá, že je křivka (M_1) racionální, je-li ji křivka (M).

Je-li nyní pól transformace k-násobný bod křivky (M), je

$$u_h = 0, \quad h = 0, 1, 2 \ldots n - 1,$$

a rovnice transformované křivky přejde po zkrácení činitelem $(x_1^2 + y_1^2)^k$ ve

$$(M_1) \equiv (x_1^2 + y_1^2)^{n-k} v_n + (x_1^2 + y_1^2)^{n-k-1} x_1 y_1 v_{n-1} + \ldots + (x_1^2 + y_1^2) x_1^{n-k-1} y_1^{n-k-1} v_{k+1} + x_1^{n-k} y_1^{n-k} v_k = 0. \quad (42)$$

Je-li tedy O bodem k-násobným křivky (M), je týž bod $(2n - k)$-násobným bodem transformované křivky (M_1), kteráž je v tomto případě stupně $3n - 2k$.

Je-li úběžný bod osy X, potažmo osy Y bodem l-, potažmo m-násobným křivky (M), sníží se stupeň křivky transformované o $l + m$ jedniček; vyskytne se totiž $x^l y^m$ jako společný faktor rovnice transformované křivky.

Má-li tudíž křivka (M) v pólu transformace k-násobný bod a úběžné body osy X, potažmo osy Y za body l-násobné, potažmo m-násobné, je křivka transformovaná (M_1) stupně $3n - 2k - l - m$ a má v pólu transformace O bod $2n - k - l - m$ násobný.

Stupeň transformované křivky sníží se o další dvě jednotky, jsou-li isotropické přímky tečnami k-násobného bodu křivky (M).

31. Tak se transformuje přímka obecně v cirkulární křivku třetího stupně s dvojným bodem v pólu transformace, je tudíž cissoidalou.

Je-li přímka (M) rovnoběžná s osou souřadnic, je její transformovaná kruh; probíhá-li však přímka (M) pólem O, je její transformovaná křivka přímka jdoucí bodem O.

Tak transformuje se *kubická duplikatrix Longchamps-a* [1])

$$x^3 = 2p\,(x^2 + y^2) \tag{43}$$

ve křivku druhého stupně, neb je zde $n = 3$, $k = 2$, $m = 1$, a isotropické přímky jsou tečny bodu dvojného od duplikatri x Rovnice transformované křivky je

$$y_1^2 = 2px_1.$$

Upotřebíme-li na tuto parabolu znova transformaci (3), obdržíme *cissoidu*

$$y_2 = x_2 \sqrt{\frac{x_2}{2p - x_2}}.$$

Transformovaná křivka cissoidy

$$y = x \sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

je *„folium simple“* [2])

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3. \tag{44}$$

Křivky (43) a (44) jsou ve vztahu inversním vzhledem k počátku O jako středu inverse. Pomocí těchto křivek řešiti můžeme *„delický problém“*, stavíme-li $a = \frac{p}{2}$, neb je úsečka průsečníku jejich $x = p\sqrt[3]{2}$.

---

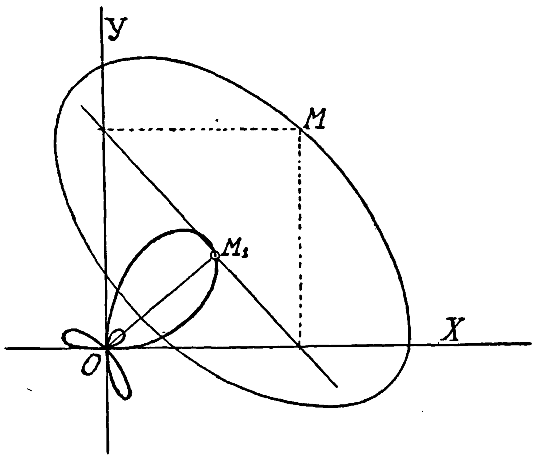
1) Dr. *Gino Loria*: »Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven«, překlad od F. Schütte-ho. Lipsko, Teubner 1902, pg. 89.

2) Ibid. pg. 317.

Zobrazení kuželosečky.

32. Dána budiž kuželosečka

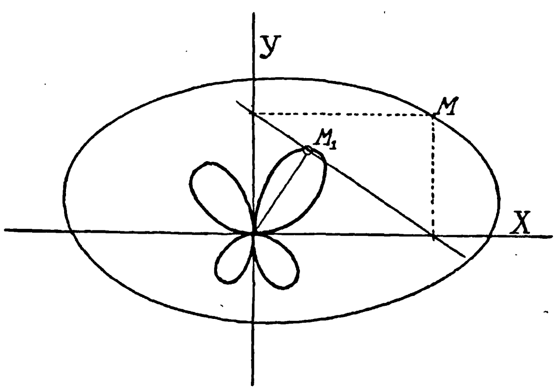
$$(M) \equiv u_2 + u_1 + u_0 = 0;$$



Obr. 10.

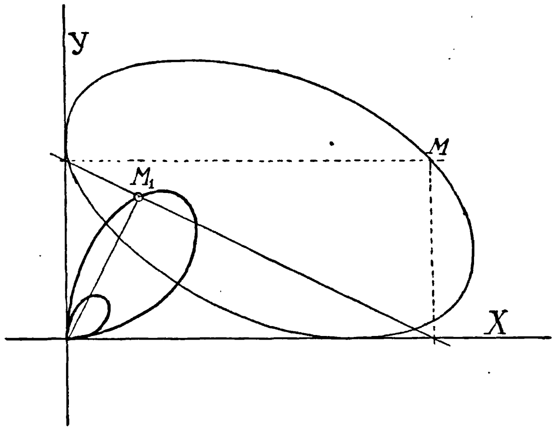
její křivka transformovaná, čili obraz její jest

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2)^2 v_2 + (x^2 + y^2) xy v_1 + x^2y^2 v_0.$$



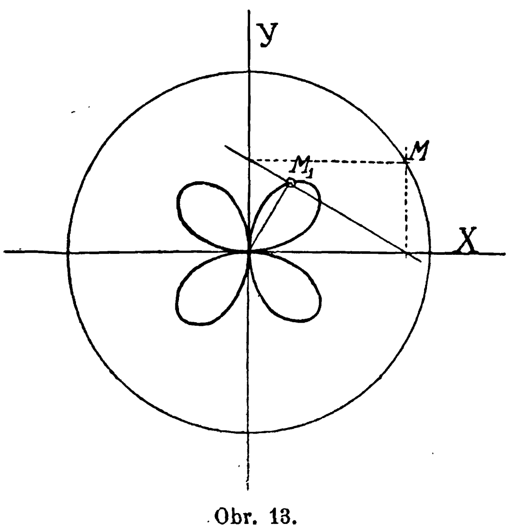
Obr. 11.

α) Vezmeme napřed $v_0 \neq 0$, t. j. že pól transformace neleží na kuželosečce (M). Transformovaná je bicirkulární, racionální křivka šestého stupně. Je-li (M) ellipsou, kteráž protíná osy souřadnic v reálných bodech, má křivka transformovaná tvar čtyřlistu (obr. 10., 11.), jehož jeden list neb dva listy se



Obr. 12.

redukují na bod O, dotýká-li se ellipsa jedné neb obou os souřadnic (obr. 12.).



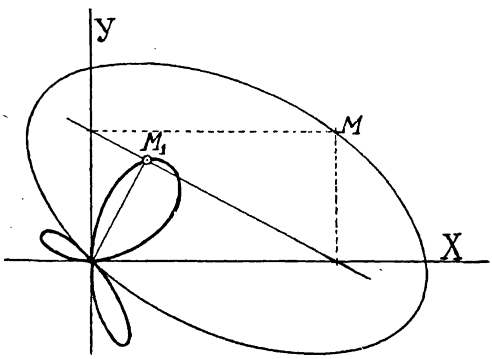
Obr. 13.

Jsou-li průseky ellipsy (M) s osami souřadnic imaginárné, je transformovaná křivka *ovála* s isolovaným čtyřnásobným bodem v pólu transformace, jehož tečny po dvou splývají s osami souřadnic.

β) Je-li ellipsa (M) kruhem se středem v počátku souřadnic, je transformovaná křivka *rhodonea* (obr. 13.).

γ) Probíhá-li ellipsa (M) pólem transformace, tedy je-li $u_0 = v_0 = 0$, padají dva její průseky s osami souřadnic do pólu O; jedna smyčka redukuje se na bod a transformovaná křivka (M_1) je zde trojlist, jenž je racionální cirkulární křivkou čtvrtého stupně, s trojnásobným bodem v pólu transformace (obr. 14.) a rovnice jeho jest

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2)\, v_2 + xy\, v_1 = 0.$$



Obr. 14.

Křivka tato je bicirkulární, je-li (M) kruhem [1]).

δ) Je-li (M) kruh, jenž se dotýká osy Y v pólu transformace, tudíž $u_1 = ax$, $u_0 = 0$, je transformovaná křivka (M_1) *přímý dvojlist* [2]) o rovnici

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2) + axy^2 = 0.$$

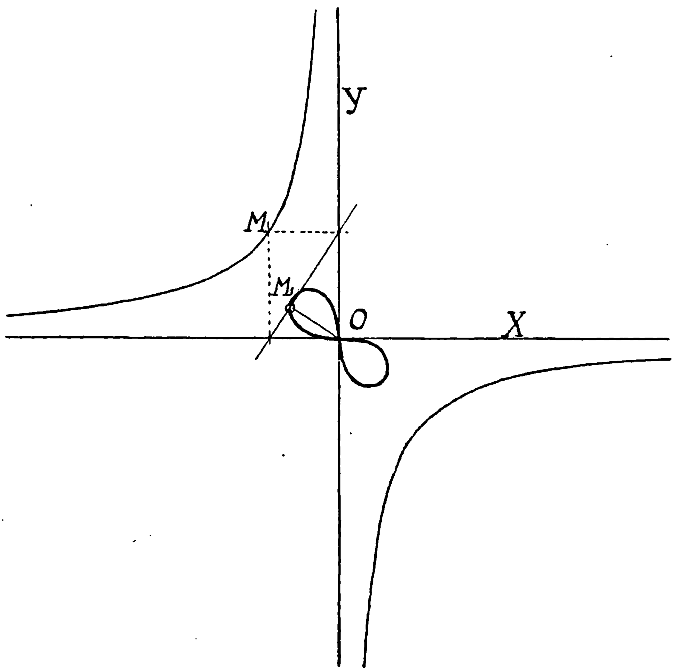
ε) Je-li daná křivka (M) hyperbolou, jejíž jedna asymptota je rovnoběžná k jedné z os souřadnic, je její transformovaná (M_1) racionální bicirkulární křivka pátého stupně s trojnásobným

[1]) Leží-li střed kruhu (M) na symmetrále os souřadnic, obdržíme přímý trojlist. Srovnej *Loria-Schütte* l. c. pg. 157, rov. (5').

[2]) *Loria-Schütte* l. c. pg. 159. Na tuto křivku se vrátíme v následujícím článku.

bodem v pólu transformace, jehož dvě tečny s jednou osou souřadnic splývají a jehož třetí tečna je druhá osa souřadnic.

ζ) Jsou-li obě asymptoty hyperboly (M) rovnoběžné s osami souřadnic, je její transformovaná křivka (M_1) bicirkulární racionální křivka čtvrtého stupně s dvojným bodem v pólu transformace. Tečny toho dvojného bodu jsou osy souřadnic.



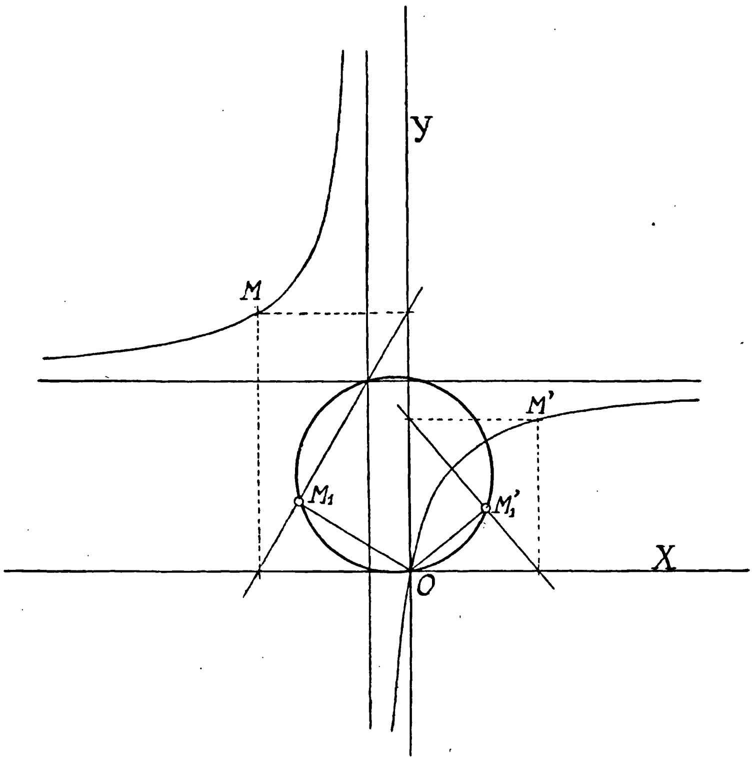
Obr. 15.

η) Je-li mimo to $u_1 = 0$, t. j., jsou-li asymptoty hyperboly (M) osami souřadnic, je křivka transformovaná *lemniskata* (obr. 15.).

ϑ) Probíhá-li hyperbola (M) pólem transformace, je její transformovaná křivka (M_1) cirkulární racionální křivka čtvrtého stupně s trojnásobným bodem v pólu transformace.

ι) Transformovaná (M_1) je *cissoidálou,* když mimo to jedna asymptota hyperboly (M) je rovnoběžná s osou souřadnic.

$\varkappa$) Transformovaná křivka (M_1) je při $u_0 = 0$ *kruhem* (obr. 16.), jsou-li obě asymptoty hyperboly (M) rovnoběžné s osami souřadnic.



Obr. 16.

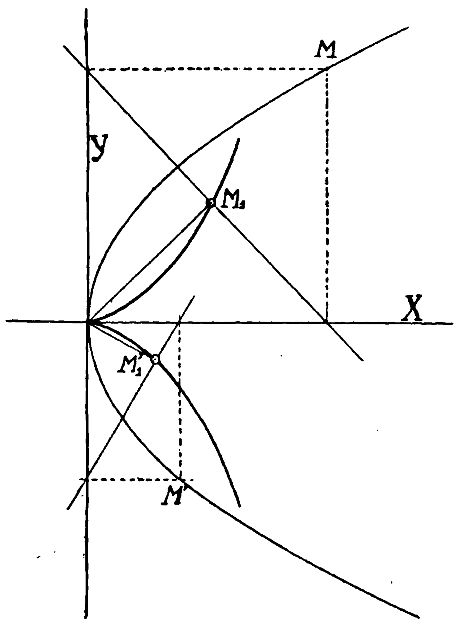
λ) Je-li daná křivka (M) parabolou, jejíž osa je rovnoběžná s jednou osou souřadnic, je transformovaná křivka (M_1) racionální bicirkulární křivka pátého stupně s trojným bodem v pólu transformace, jehož dvě tečny s onou osou souřadnic splývají, kteráž je rovnoběžná s osou paraboly; třetí tečnou je druhá osa souřadnic.

μ) Probíhá-li mimo to parabola (M) pólem O transformace, je transformovaná křivka (M_1) cirkulární racionální křivka třetího stupně, tudíž *cissoidála.*

ν) Ta křivka stává se *cissoidou*, splývá-li osa paraboly (obr. 17I) s jednou z os souřadnic.

33. Ku konci vyšetříme blíže transformovanou křivku kuželosečky

$$(M) \equiv y^2 + qx^2 - 2px = 0.$$



Obr. 17.

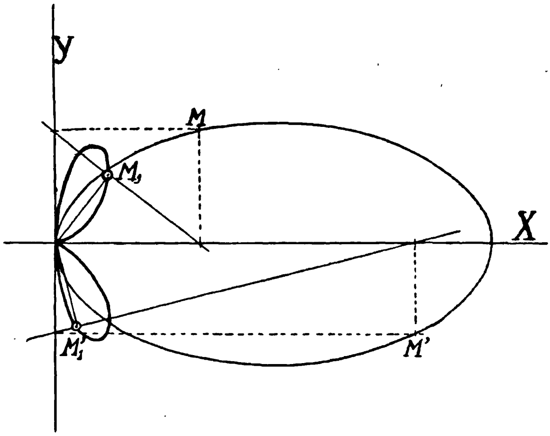
Rovnice transformované (obr. 18.) zní:

$$(M_1) \equiv (x^2 + qy^2)(x^2 + y^2) - 2pxy^2 = 0,$$

je tudíž racionální cirkulární křivka čtvrtého stupně. Za $q = 0$ je (M_1) cissoidou

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2p - x}},$$

a za $q = 1$ je přímým dvojlistem. Transformovaná křivka (M_1) zahrnuje tudíž cissoidu a přímý dvojlist jako případy zvláštní.



Obr. 18.

Sestrojení tečny transformované křivky (M_1).

34. Bodu M křivky (M) odpovídá tečna Π obálky (Π) a bod M_1 transformované křivky (M_1). Známe-li bod dotyku M' tečny Π, je i sestrojení tečny bodu M_1 křivky (M_1) jako úpatnice křivky (Π) pro pól v bodě O dáno.

Tak můžeme tečnu bodu M_1 lemniskaty

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$$

sestrojiti, neb lemniskata je transformovaná křivky

$$(M) \equiv xy - a^2 = 0.$$

Rovnice obálky (Π) jest

$$(\Pi) \equiv xy - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0.$$

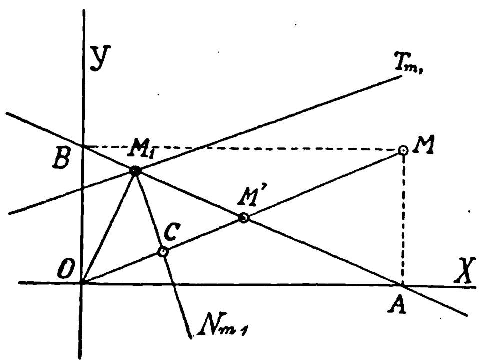
Je-li tedy M_1 bod lemniskaty, obdržíme přímku Π jako kolmici v bodě M_1 na průvodiči $\overline{OM_1}$. Tato protíná osy souřadnic v bodech A, B a střed délky $\overline{AB}$ je bod dotyku M' tečny Π. Je-li nyní C střed délky $\overline{OM'}$, je (obr. 19.) $\overline{CM_1}$

normála a kolmice v bodě M_1 na $\overline{CM_1}$ je hledaná tečna lemniskaty[1]).

Kdyby byl M_1 bod cissoidy

$$(M_1)\dots y = \sqrt{\frac{x}{2p - x}}$$

je
$$(M) \equiv y^2 - 2px = 0,$$
a
$$(\Pi) \equiv y^2 + 8px,$$



Obr. 19.

tudíž je cissoida úpatnice paraboly (Π). Je-li M' bod dotyku tečny Π, je jeho úsečka (obr. 20.)

$$x = OP' = AO,$$

neb $\overline{AP'} = 2x$ je délka subtangenty v bodě M'. Jelikož $\overline{OA}$ jako úsek tečny Π na ose X známe, platí totéž i pro úsečku $\overline{OP'}$, čímž je bod dotyku M' určen. Je-li C střed délky $\overline{OM'}$,

---

[1]) Hyperbolu (M) můžeme parametricky vyjádřiti

$$x = at, \quad y = \frac{a}{t}.$$

Pak je rovnice lemniskaty (M_1), parametricky vyjádřená

$$x_1 = \frac{at}{1 + t^4}, \quad y_1 = \frac{at^3}{1 + t^4},$$

as nejjednodušší. Srovnej Dr. Em. Weyr: Die Lemniskate in rationaler Behandlung. Praha, 1873. Abhandl. d. kg. böhm. Ges. d. Wissenschaften. VI. Folge Bd. 6.

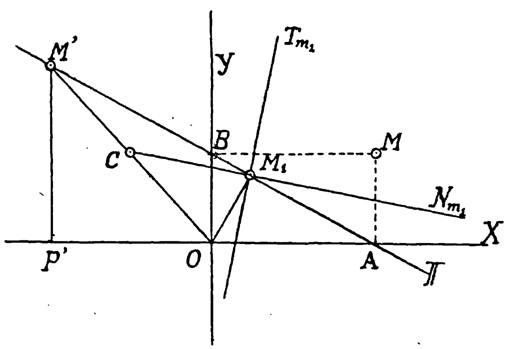
je $\overline{CM_1}$ normála a kolmice v bodě M_1 na $\overline{CM_1}$ je tangentou bodu M_1 cissoidy (obr. 20.).

Rovněž tak jednoduché je sestrojení tečny rhodoney.

35. Bod dotyku M' tečny Π můžeme též určiti, známe-li tečnu bodu M. Pro $M(x \mid y)$ je

$$\Pi \equiv y\xi + x\eta - xy = 0,$$

$$d\Pi \equiv dy\,.\,\xi + dx\,.\,\eta - (x\,dy + y\,dy) = 0.$$



Obr. 20.

Jelikož je M^1 průsek od $\Pi = 0$ a $d\Pi = 0$, jsou jeho souřadnice

$$\xi = -\frac{x^2y'}{y - xy'}, \quad \eta = \frac{y^2}{y - xy'}.$$

Je-li T_m tečna bodu M křivky (M) a $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ její úseky na ose X vztažmo na ose Y, je (obr. 21.)

$$OB' = y - xy' = -\overline{OA'}\,tg\,\alpha,$$

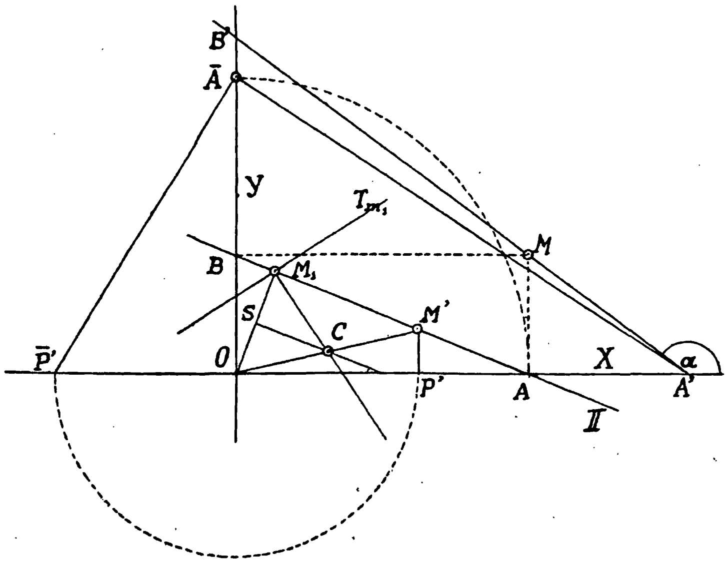
tudíž je

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{\overline{OA^2}\,.\,tg\,\alpha}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA^2}}{\overline{OA'}}, \\ \eta &= \frac{\overline{OB^2}}{\overline{OB'}}. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Známe-li tečnu bodu M křivky (M), třeba jen ξ neb η jako třetí úměrnou sestrojiti, čímž obdržíme bod dotyku M'

tečny Π, tudíž též tečnu sdruženého bodu M_1 křivky (M_1). Znaménko od ξ potažmo od η souhlasí se znaménkem od $\overline{OA'}$, potažmo od $\overline{OB'}$.

Na tento způsob můžeme snadně sestrojiti tečnu bodu přímého dvojlistu.



Obr. 21.

Obrácená transformace.

36. Rovnicemi (1) dána jest obrácená transformace, dle které je křivka (M) obrazem křivky (M_1). Je-li tudíž

$$(M_1) \equiv u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

rovnice dané křivky, je rovnice jejího obrazu:

$$(M) \equiv x^n y^n v_n + x^{n-1} y^{n-1} (x^2 + y^2)\, v_{n-1} + \ldots$$
$$+ xy(x^2 + y^2)^{n-1} v_1 + (x^2 + y^2)^n\, v_0 = 0.$$

Není-li pól transformace bodem křivky (M_1), je křivka transformovaná křivkou $3n$-ho stupně s $2n$-násobným bodem v pólu transformace, jehož tečny jsou n-násobné isotropické přímky.

Úběžné body os souřadnic jsou n-násobné body křivky transformované.

Jsou-li imaginárné body kruhové k-násobné body křivky (M_1), sníží se stupeň křivky transformované (M) o $2k$ jednotky. Je-li mimo to pól transformace s-násobným bodem dané křivky (M_1), sníží se stupeň transformované křivky (M) o další $2s$ jednotky.

Stupeň transformované křivky sníží se ještě o l, potažmo o m jednotek, splyne-li l tečen bodu O s osou Y a m tečen téhož bodu s osou X.

Má-li tudíž křivka n-ho stupně (M_1) v pólu O, jejž vezmeme za počátek souřadnic, bod s-násobný, jehož l tečen s osou Y, m tečen s osou X splyne a má-li imaginární kružné body za k-násobné body, je stupeň transformované křivky (M)

$$3n - 2s - l - m - 2k$$

a pól transformace je pro tuto křivku bodem

$$2n - s - l - m - 2k$$

násobným. Na př. je-li (M_1) lemniskata o rovnici

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0,$$

je $n = 4$, $s = 2$, $k = 2$, $l = m = 1$, tudíž je transformovaná křivka druhého stupně, tedy kuželosečkou, jejíž je rovnice

$$xy - a^2 = 0,$$

jak jsme dříve našli.

Je-li (M_1) *trifolium*, jehož rovnice

$$(M_1) \equiv (x^2 + y^2)^2 - (ax + by)\, xy = 0,$$

je transformovaná křivka za příčinou $n = 4$, $s = 3$, $l = m = 1$, $k = 1$ kuželosečkou a sice kruhem, jehož je rovnice

$$(M) \equiv x^2 + y^2 + ay + bx = 0.$$

Je-li (M_1) parabolou o rovnici

$$(M_1) \equiv y^2 - 2px = 0,$$

je její transformovaná křivka (M) *kubická duplikatrix*, jejíž je rovnice

$$(M) \equiv x^3 - 2p\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Sestrojení tečny transformované křivky (M).

37. Ve článku 35. seznali jsme, že lze tečnu křivky (M_1) v bodě M_1 sestrojiti na základě relací (45), známe-li tečnu v bodě sdruženém M křivky (M). Obráceně je-li tečna křivky (M_1) v bodě M_1 známá, určíme bod dotyku M' od Π, tím, že půlícím bodem S délky $\overline{OM_1}$ vedeme rovnoběžku ku Π, kteráž normálu bodu M_1 protíná v bodě C (obr. 21.). Spojnice $\overline{OC}$ protíná přímku Π v jejím bodě dotyku M'. Známoť je, že tečna bodu M_1 je táž, ať již jej považujeme za bod křivky (M_1), aneb jako bod kruhu opsaného trojúhelníku OM_1M', jenž má bod C za svůj střed.

Dle formule 45. je nyní

$$OA' = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OP'}},$$

kdež je $\overline{OP'} = \xi$ úsečkou bodu M'. Tím známe průsečík A' tečny bodu M transformované křivky s osou X, tudíž i tečnu $\overline{MA'}$ samu.

Tímto způsobem můžeme snadně tečnu „*Kreuzkurve*“ určiti. Zde je (M_1) kruh, a M_1 splyne s M', tudíž je $\overline{OP'}$ úsečkou bodu M_1.

Podobně lze tečnu bodu M kubické duplikatrix (M) jako obrazu (čl. 36.) paraboly (M_1) určiti.

O křivkách (M) a (M_1) sdružených ku dané křivce (Π).

38. Přímka Π je jednoznačně určena, známe-li její vzdálenost p od pólu O a úhel α, jejž ta přímka uzavírá s positivním směrem osy X. Veličiny p, α můžeme tudíž považovati jako souřadnice přímky Π a

$$p = f(\alpha)$$

jako rovnici křivky (Π) v těchto tangenciálních souřadnicích. Jelikož je (obr. 22.) křivka (M_1) úpatnicí křivky (Π) pro pól O, je

$$OM_1 = p = r_1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi_1.$$

tudíž je rovnice křivky (M_1) v polárních souřadnicích

$$r_1 = f\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right),$$

a rovnice [1]) křivky (M) je

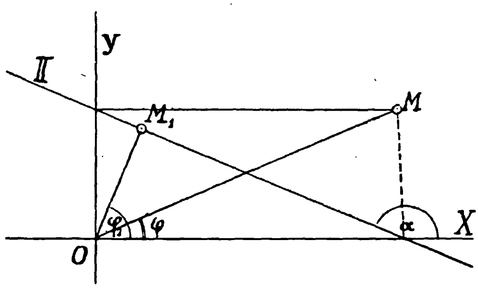
$$r = \frac{f(\pi - \varphi)}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

39. Tak jest

$$p = a \sin 2\alpha$$

rovnicí asteroidy jako křivky (Π), a polární rovnice jí příslušné křivky (M_1) je

$$r_1 = a \sin 2\varphi_1,$$



Obr. 22.

což jest známá čtyřlistá *Rhodonea* [2]) a polární rovnice křivky (M) je zde

$$r = 2a.$$

Křivka (M) je tudíž kruh, jenž má pól O za svůj střed.

40. Je-li křivka (Π) parabolou, kteráž má bod O za vrchol a v tom bodě z pravé strany osy Y se dotýká, je její rovnice

$$p = -\frac{a}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

a rovnice příslušné křivky (M_1) je

$$r_1 = -\frac{a}{2}\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos\varphi_1},$$

---

[1]) Viz Časopis 34, pg. 340.

[2]) Viz l. c. pg. 333. *Loria-Schütte*: Spezielle algebraische ebene und transscendente Kurven. Leipzig, p. 297.

a rovnice transformované křivky je

$$r = -\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Křivka (M_1) je *cissoida* a přidružená křivka (M) je kruh, jak již ve čl. 32. vytknuto [1]).

41. Je-li R poloměr pevného kruhu a ϱ poloměr valícího se kruhu epicykloidy potažmo hypocykloidy, je při

$$\frac{\varrho}{R} = m = \frac{1-n}{2n}, \quad R = na, \quad \varrho = \frac{1-n}{2}a$$

tangenciální rovnicí epi- po případě hypocykloidy

$$p = a \sin n\alpha.$$

Za $n = 3$ obdržíme *Steinerovu hypocykloidu*. Vezmeme-li tuto za křivku (Π), jejíž je tedy rovnice

$$p = a \sin 3\alpha,$$

je rovnicí křivky (M_1)

$$r_1 = -a \cos 3\varphi_1,$$

t. j. *trojlistá rhodonea* a její transformovaná křivka (M) je

$$r = \frac{a \sin 3\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Křivka (M) je racionální cirkulární křivka třetího stupně s isolovaným dvojným bodem v počátku souřadnic. Rovnice její v souřadnicích bodových je

$$x(x^2 + y^2) - a(3x^2 + y^2) = 0.$$

Křivka tato je *cissoidalou* [2]), jejíž základní kuželosečka je kruh, totiž

$$C_2 \equiv x^2 + y^2 + 4ax = 0,$$

a přímka P má rovnici

$$P \equiv x + a = 0.$$

Tím je konstrukce křivky dána. Můžeme však její rovnici psáti:

$$r = 3a\cos\varphi - a\frac{\sin^2\varphi}{\cos a}.$$

---

[1]) Loria-Schütte l. c. p. 146 ff.

[2]) Viz l. c. pg. 338.

Stavme nyní

$$\varrho_1 = 3a \cos \varphi,$$

$$\varrho_1 = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

a sestrojme tyto křivky, z nichž prvá je kruh $\left(0 \,\middle|\, \frac{3a}{2} \,\middle|\, \frac{3a}{2}\right)$

a druhá je cissoidou, jejíž základní kruh je $\left(0 \,\middle|\, -\frac{a}{2} \,\middle|\, \frac{a}{2}\right)$.

Každá přímka polem O vedená protíná kruh v bodě K, a *cissoidu* v bodě Z, pak je M bod naší křivky, daný relací

$$OM = OK - OZ,$$

čímž opět docházíme do jednoduché konstrukce křivky (M).

42. Obráceně, je-li rovnice křivky (M_1) v polárních souřadnicích

$$r_1 = f(\varphi_1),$$

je tangenciální rovnice křivky (Π) jako její negativní úpatnice

$$p = f\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

a rovnice transformované křivky (M) bude v polárních souřadnicích

$$r = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

Je-li (M) kruhem, jehož je rovnice

$$r = 2a \cos \varphi,$$

je rovnice křivky (M_1)

$$r_1 = 2a \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1.$$

Křivka (M_1) je tudíž přímý dvojlist [1]). Co se tkne příslušné křivky (Π), je její tangenciální rovnice

$$p = 2a \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha,$$

aneb v souřadnicích bodových

$$x = 2a \cos^2 \alpha \cos 2\alpha$$
$$y = -2a \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

---

[1]) Čl. 32, δ, čl. 33.

Stavíme-li

$$t = -\, tg\, \alpha = tg\, \varphi,$$

obdržíme

$$x = \frac{2a(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2},$$

$$y = \frac{4at^3}{(1 + t^2)^2}.$$

Rovnice tyto obdrželi bychom i přímo, když bychom upotřebili parametru $t = tg\, \varphi$ pro souřadnice bodu kruhu (M). Obdržíme takto pro přímku Π

$$\Pi \equiv (1 + t^2)\, tx + (1 + t^2)\, y - 2at = 0.$$

Křivka (Π) je racionální bicirkulární křivka čtvrtého stupně a třetí třídy a jelikož se jí úběžná přímka v cyklických bodech dotýká, je Steinerovou hypocykloidou. Tato má osu X za osu symmetrie. Pól O půlí větev křivky, kteráž má bod $O'(2a \mid 0)$ kruhu (M) za bod vratu. Ostatní body vratu leží symmetricky k ose X. Souřadnice jejich jsou

$$\left(-\frac{a}{2},\ \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}\, a\right).$$

Společný průsek tečen bodů vratu, jež jsou osami symmetrie křivky, je $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$.

O křivce (Π) a jejích přidružených křivkách (M) a (M_1) při libovolně vzatém pólu.

43. Zvolíme-li $O'(x_0 \mid y_0)$ za nový pól a pošineme li do toho pólu osy souřadnicové, přejde rovnice křivky

$$p = f(\alpha)$$

ve

$$p_1 = p - x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha = f(\alpha) - x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha.$$

Liší-li se tudíž rovnice dvou křivek v tangenciálních souřadnicích $p,\ \alpha$ pouze o binom $a \cos \alpha + b \sin \alpha$, vyjadřují touž křivku.

Tak jsme viděli, že, vezmeme-li pól O jako v předcházejícím článku, je rovnice Steinerovy hypocykloidy

$$p = 2a \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Volíme-li však průsek os symmetrie $\left(\frac{a}{2} \,\middle|\, 0\right)$ za pól, bude její rovnice*)

$$p = \frac{a}{2} \sin 3\alpha$$

a učiníme-li bod vratu $(2a \mid 0)$ Steinerovy hypocykloidy pólem, bude její tangenciální rovnice

$$p = -2a \sin^3 \alpha.$$

V prvním případě je (M) *kruh* a (M_1) *přímý dvojlist* (čl. 42.). V případě druhém je (M_1) *trojlistá rhodonea* a (M) je *cissoidala*. V třetím případě je (M_1) *„folium simple"* (čl. 37.) a křivka (M) je *cissoida*. Tím je dána souvislost křivek folium simple, přímého dvojlistu a Steinerovy hypocykloidy, jakož i kruhu, cissoidaly a cissoidy.

O jisté grupě rovinných kollineací.

Dr. B. Bydžovský.

I. Transformace kubické křivky.

1. Obecná křivka kubická reprodukuje se osmnácti kollineacemi [1]). Této okolnosti lze velmi výhodně užíti pro studium některých vlastností křivky [2]). S theorií grupy G_{18} těchto kollineací totiž souvisí především theorie jistých skupin bodových na křivce a v rovině vůbec; vedle toho lze studiem grupy dospěti ku velmi všeobecným větám, platícím pro všechny projektivně význačné body křivky [3]).

---

*) Srovnej čl. 41.

[1]) F. Klein, Math. Ann. IV. pg. 354.

[2]) Některé z řady vět zde odvozených jsou již známy odjinud; vytknu je na příslušných místech. Je však zajímavo, že v žádném případě autoři těchto vět neudávají pravý jejich kořen, tkvící právě ve vlastnostech grupy. Souvisí to s tím, že pro geometrické studium kubické formy ternárné nebylo těchto vlastností soustavně užito.

[3]) V. kap. IV. odd. 3.