# Příspěvek k plochám pseudosférickým.

Napsal **Fr. Velísek** v Praze.

Budiž dán lineární element plochy ve tvaru

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

geodetické křivosti čar souřadných buďtež $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$. Tyto jsou dle formulí Bonnetových (Bianchi: Differentialgeometrie str. 150) dány

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right],$$

$$\frac{1}{\varrho_v} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{e}}\right) - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right].$$

Pro případ, že čáry souřadné dělí plochu v infinitesimální kosočtverce, jest

$$e = g = \varepsilon^2, \quad f = \varepsilon^2 \cos\omega,$$

kde $\omega$ jest úhel sevřený křivkami souřadnými. Předpokládáme $\omega$ konstantním:

$$\cos\omega = k.$$

Klademe-li $\varrho_u = c_1$, $\varrho_v = c$, kde $c_1$ a $c$ jsou konstanty, obdržíme za daných podmínek

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - k\frac{\partial\varepsilon}{\partial v} = -\,c_1\varepsilon^2 k_1, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial v} - k\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} = -\,c\,\varepsilon^2 k_1,$$

$$\text{při } k_1 = \sin\omega.$$

Klademe-li krátce

$$\alpha = ck + c_1, \quad \beta = c_1 k + c,$$

obdržíme integrací

$$\varepsilon = \frac{k_1}{\alpha u + \beta v}. \tag{1}$$

Plochy tak vznikající jsou pseudosférické. Dosadíme-li totiž do vzorce Liouville-ova pro totální křivost

$$K = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{e}}{\varrho_v}\right)\right],$$

obdržíme

$$K = -\frac{1}{k_1^2}(c^2 + c_1^2 + 2cc_1k).$$

Označíme písmenou $R$ poloměr plochy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{k_1}\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1k}. \tag{2}$$

Zavedeme nový systém souřadnic křivočarých tím, že vztáhneme plochu na systém čar geodetických a jich orthogonálních trajektorií. Pro řešení této úlohy stačí najíti geodetické čáry, které vycházejí ze společného bodu plochy v nekonečnu, a systém na ně kolmých rovnoběžných křivek konstantní geodetické křivosti $\frac{1}{R}$, poněvadž na základě tohoto systému možno určiti pomocí konformního zobrazení plochy naší na rovinu všechny čáry geodetické.

Označíme-li $\Theta$ úhel, který svírají čáry geodetické tohoto druhu s čarami $v = konst.$, platí

$$\sin\Theta = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e}}\frac{dv}{ds} \text{ neb } tg\,\Theta = \sqrt{eg - f^2}\,\frac{dv}{e\,du + f\,dv},$$

kde $du$, $dv$ jsou přírůsty souřadnic $u$, $v$ podél čáry geodetické, $ds$ pak jest ve tvaru

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Jest tudíž rovnice pro čáry geodetické

$$A) \quad e\sin\Theta\,du + (f\sin\Theta - \sqrt{eg - f^2}\cos\Theta)\,dv = 0,$$

orthogonálních trajektorií pak

$$B) \quad e\cos\Theta\,du + (f\cos\Theta + \sqrt{eg - f^2}\sin\Theta)\,dv = 0.$$

Dle Bonnet-ovy formule (Bianchi, Differentialgeometrie str. 150) vyjádříme, že geodetická křivost čar $A)$ jest 0, čar $B)$ pak $\frac{1}{R}$. Po příslušné redukci obdržíme pro úhel $\Theta$ rovnice

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = -\frac{\varepsilon}{R}\sin\Theta - \left(k\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)\frac{1}{k_1\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} = -\frac{\varepsilon}{R}\sin(\Theta - \omega) - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - k\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)\frac{1}{k_1\varepsilon},$$

kde

$$\varepsilon = \frac{k_1}{\alpha u + \beta v}.$$

Podmínka integrability jest splněna, jak snadno se ukáže, použijeme-li výrazu

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1 k}}{k_1}.$$

Použijeme-li výrazu pro $\varepsilon$, obdržíme:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = -\frac{\varepsilon}{R} \sin \Theta - c\varepsilon, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = -\frac{\varepsilon}{R} \sin (\Theta - \omega) + c_1 \varepsilon. \quad (3)$$

Integrací první rovnice (3) plyne

$$\frac{R}{\sqrt{1 - R^2 c^2}}\, l \frac{1 + Rc \sin \Theta - \sqrt{1 - R^2 c^2} \cos \Theta}{Rc + \sin \Theta}$$
$$+ \frac{k_1}{\alpha}\, l(\alpha u + \beta v) = \varphi(v).$$

dosazením do druhé rovnice (3) pak

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\varepsilon k_1^2}{\alpha R} \frac{1 + cR \sin \Theta + \sqrt{1 - R^2 c^2} \cos \Theta}{Rc + \sin \Theta},$$

a z předchozí rovnice obdržíme, poněvadž

$$\frac{R}{\sqrt{1 - R^2 c^2}} = \frac{k_1}{\alpha},$$

$$e^{\frac{\alpha \varphi}{k_1}} = \frac{k_1}{\varepsilon} \frac{1 + Rc \sin \Theta - \sqrt{1 - R^2 c^2} \cos \Theta}{Rc + \sin \Theta}.$$

Násobením obou výrazů obdržíme

$$e^{\frac{\alpha \varphi}{k_1}} d\varphi = \frac{k_1^3}{\alpha R},$$

z čehož

$$e^{\frac{\alpha \varphi}{k_1}} = \frac{k_1^2 v}{R} + C, \text{ kde } C \text{ konstanta.}$$

Má tudíž systém (3) řešení

$$(\alpha u + \beta v) \frac{1 + Rc \sin \Theta - \sqrt{1 - R^2 c^2} \cos \Theta}{Rc + \sin \Theta} = \frac{k_1^2 v}{R} + C. \quad (4)$$

Výraz jest reelní, poněvadž

$$\sqrt{1 - R^2c^2} = \frac{ck + c_1}{\sqrt{c^2 + c_1^2 + 2cc_1k}} = \frac{ck + c_1}{\sqrt{(ck + c_1)^2 + c_1^2k_1^2}}.$$

Rovnici (4) obdrželi bychom ve tvaru poněkud jiném, použijeme-li nejprve druhé rovnice (3). Použijeme-li vztahů

$$\begin{aligned} \sin\Theta &= k_1 \cos(\Theta - \omega) + k \sin(\Theta - \omega), \\ \cos\Theta &= k \cos(\Theta - \omega) - k_1 \sin(\Theta - \omega), \end{aligned}$$

obdržíme podobným způsobem jako dříve

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v) \frac{1 - c_1 R \sin(\Theta - \omega) - \sqrt{1 - c_1^2R^2} \cos(\Theta - \omega)}{\sin(\Theta - \omega) - c_1 R} \\ = C - \frac{k_1^2}{R} u. \end{aligned}$$

Z rovnice (4) určíme $\sin\Theta$ a $\cos\Theta$ a dosadíme do rovnic $A$), $B$), jichž integrací obdržíme hledaný systém čar souřadných.

Z rovnic (3) plyne

$$d\Theta = \varepsilon(c_1\, dv - c\, du) - \frac{\varepsilon}{R}[\sin\Theta\, du + \sin(\Theta - \omega)\, dv].$$

Pro čáry geodetické poslední člen v závorce mizí, tedy

$$\begin{aligned} d\Theta &= \varepsilon(c_1\, dv - c\, du), \\ \sin\Theta\, du + \sin(\Theta - \omega)\, dv &= 0. \end{aligned}$$

Pomocí výrazu (4) obdržíme z těchto rovnic

$$\frac{k_1\, dv}{k_1^2 v + CR} = \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{\alpha R - k_1 \cos\Theta},$$

integrací pak

$$\frac{k_1^2 v + CR}{\alpha R - k_1 \cos\Theta} = konst., \tag{5}$$

jako rovnici čar geodetických, kde dlužno za $\cos\Theta$ dosaditi výraz ze (4).

Použijeme věty, že orthogonální trajektorie čar geodetických možno stanoviti quadraturou, známe-li differenciální rovnici čar geodetických (Bianchi str. 168) ve tvaru

$$M\, du + N\, dv = 0.$$

Jsou totiž jich orthogonální trajektorie při lineárním elementu

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

dány rovnicí

$$(eN - fM)\,du + (fN - gM)\,dv = 0,$$

a při použití Bonnetovy formule pro geodetickou křivost pro čáry geodetické plyne, že výraz

$$\frac{eN - fM}{\sqrt{eN^2 - 2f\,MN + gM^2}}\,du + \frac{fN - gM}{\sqrt{eN^2 + 2f\,MN + gM^2}}\,dv$$

jest úplným differenciálem. Poněvadž v našem případě

$$M = \sin\Theta,\quad N = \sin(\Theta - \omega),\quad e = g = \varepsilon^2,\quad f = \varepsilon^2 k,$$

plyne pro orthogonální trajektorie rovnice

$$konst. = -\int \varepsilon\left(\cos\Theta\,du + \cos(\Theta - \omega)\,dv\right). \tag{6}$$

Můžeme však týž systém orthogonálně geodetický (5), (6) odvoditi pomocí specielního řešení rovnic (3). Tyto jsou nejjednodušeji splněny pro

$$\sin\Theta_0 = -cR,\quad \cos\Theta_0 = -\frac{R}{k_1}(ck + c_1), \tag{7}$$

neb

$$tg\,\Theta_0 = \frac{k_1 c}{ck + c_1}.$$

Tedy rovnice čar geodetických $A$) nabude tvaru

$$c\,du - c_1\,dv = 0,$$

z toho

$$cu - c_1 v = \frac{\varrho_2}{R}, \tag{8}$$

klademe-li integrační stálou $\frac{\varrho_2}{R}$. Rovnice čar $B$) přejde ve

$$\alpha\,du + \beta\,dv = 0,$$

a tedy při integrační stálé $\frac{\varrho_1}{R}$

$$l\varepsilon = \frac{\varrho_1}{R}. \tag{9}$$

Obdržíme pak pro lineární element tvar parabolický

$$ds^2 = d\varrho_1^2 + e^{2\varrho_1/R}\, d\varrho_2.$$

Položíme-li $\varrho' = -Re^{-\varrho_1/R}$, nabude předchozí výraz tvaru

$$ds^2 = \frac{R^2}{\varrho'^2}(d\varrho'^2 + d\varrho_2^2), \tag{10}$$

charakteristického pro plochy Liouville-ovy, pro které možno geodetické čáry obecně určiti. Tážeme-li se po orthogonálně geodetickém systému vlastnosti dřívější, obdržíme z rovnic $A$) a $B$), uzavírají-li čáry geodetické s křivkami $\varrho_2 = konst.$ úhel $\psi$, výrazy pro $\psi$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho'}\left(\frac{\sin\psi}{\varrho'}\right) - \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{\cos\psi}{\varrho'}\right) = 0$$

pro čáry geodetické, a

$$\frac{\partial}{\partial\varrho'}\left(\frac{\cos\psi}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{\sin\psi}{\varrho'}\right) = -\frac{1}{\varrho'^2}$$

pro jich orthogonální trajektorie. Řešením těchto rovnic dle $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho'}, \frac{\partial\psi}{\partial\varrho_2}$ plyne

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varrho'} = \frac{\sin\psi}{\varrho'}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varrho_2} = \frac{1-\cos\psi}{\varrho'},$$

tedy integrací pro $C'$ jako integrační stálou

$$tg\,\frac{\psi}{2} = \frac{\varrho'}{C' - \varrho_2},$$

z toho

$$\cos\psi = \frac{(C'-\varrho_2)^2 - \varrho'^2}{(C'-\varrho_2)^2 + \varrho'^2}, \qquad \sin\psi = \frac{2\varrho'(C'-\varrho_2)}{(C'-\varrho_2)^2 + \varrho'^2}.$$

Čáry geodetické dány jsou pak rovnicí

$$\sin\psi\, d\varrho' - \cos\psi\, d\varrho_2 = 0, \tag{$A'$}$$

orthogonální trajektorie

$$\cos\psi\, d\varrho' + \sin\psi\, d\varrho_2 = 0. \tag{$B'$}$$

Poněvadž

$$d\psi = \frac{1}{\varrho'}(\sin\psi\, d\varrho' - \cos\psi\, d\varrho_2 + d\varrho_2),$$

plyne pro $(A')$

$$tg\,\frac{\psi}{2}\,d\psi = \frac{d\varrho_2}{C' - \varrho_2},$$

a tudíž integrací

$$\frac{cos^2\frac{\psi}{2}}{C' - \varrho_2} = \frac{C' - \varrho_2}{(C' - \varrho_2)^2 + \varrho'^2} = konst. \qquad (5')$$

Pro orthogonální trajektorie $(B')$ obdržíme jako dříve integrujícího činitele ve tvaru $-\frac{R}{\varrho'}-$, a křivky tedy dány jsou rovnicí

$$konst. = R\int\frac{1}{\varrho'}\,(cos\,\psi\,d\varrho' + sin\,\psi\,d\varrho_2) = R\,l\,\frac{\varrho'}{(C' - \varrho_2)^2 + \varrho'^2}. \qquad (6')$$

Abychom určili souvislost konstant $C'$ a $C$ ve výrazu (5) a (5'), dosaďme do rovnice předchozí pro čáry geodetické 5') za $\varrho'$, $\varrho_2$ z rovnic (8) a (9). Pak jest pro $\Theta = \Theta_0 + \psi$

$$\frac{k_1^2\,v + CR}{\alpha R - k_1\,cos\,\Theta} = \frac{1}{2R}\,\frac{(k_1^2\,v + CR)\,[(C' - \varrho_2)^2 + \varrho'^2]}{(C' - \varrho_2)\,[\alpha C' - \alpha\varrho_2 - k_1\,c\varrho']}$$

$$= \frac{1}{2R}\,\frac{(C' - \varrho_2)^2 + \varrho'^2}{C' - \varrho_2}\,\frac{k_1^2\,v + CR}{\alpha C + Rv\,(c\beta + \alpha c_1)}$$

$$= \frac{1}{2R^2}\,\frac{(C' - \varrho_2)^2 + \varrho'^2}{C' - \varrho_2}\cdot\frac{CR + k_1^2\,v}{R\alpha C' + k_1^2\,v}.$$

Klademe-li tudíž

$$C = \alpha C',$$

shodují se systémy čar (5), (5'), (6), (6') úplně.

Podobně jako při systému čar orthogonálně geodetickém můžeme si předložiti otázku, neexistují li na ploše křivky konstantní geodetické křivosti, odvozené z původního systému čar této vlastnosti lineární transformací souřadnic, o úhlu sevřeném konstantním, obecně od pravého různém. Za tím účelem položíme

$$u_1 = \alpha u + \beta v, \quad v_1 = \gamma u + \delta v, \qquad (11)$$

kde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ značí konstanty, $u_1$, $v_1$ nové souřadnice křivočaré; $\alpha$, $\beta$ mají pro okamžik jiný význam než v předchozím.

Z elementu lineárního v souřadnicích $u_1$, $v_1$ obdržíme jako podmínku pro kosočtverečné dělení plochy křivkami souřadnými

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2k\alpha\beta} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2 - 2k\gamma\delta} = M, \tag{12}$$

a označíme-li úhel mezi čarami souřadnými $\omega_1$, dán jest tento relací

$$\cos \omega_1 = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma)\,k}{M^2},$$

a při spojitém přechodu od transformace identické $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$M^2 \sin \omega_1 = k_1 (\alpha\delta - \beta\gamma). \tag{13}$$

Označíme-li geodetické křivosti čar $u_1$, $v_1$, resp. $\varrho_{u_1}$, $\varrho_{v_1}$, obdržíme dle Bonnetovy formule

$$-\varrho_{u_1} k_1 \varepsilon^2 = \frac{\alpha - k\beta}{M} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} + \frac{\beta - \alpha k}{M} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v},$$

$$-\varrho_{v_1} k_1 \varepsilon^2 = \frac{\gamma - k\delta}{M} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} + \frac{\delta - \gamma k}{M} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v},$$

neb provedeno

$$\varrho_{u_1} = \frac{\alpha c_1 + \beta c}{M}, \quad \varrho_{v_1} = \frac{\gamma c_1 + \delta c}{M}. \tag{14}$$

Lineární element dán jest výrazem

$$ds^2 = \frac{\sin^2 \omega_1}{[(\varrho_{v_1} \cos \omega_1 + \varrho_{u_1})\, u_1 + (\varrho_{u_1} \cos \omega_1 + \varrho_{v_1})\, v_1]^2}$$
$$(du_1^2 + 2 \cos \omega_1\, du_1\, dv_1 + dv_1^2).$$

Konstanty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ mají splňovati jen jedinou podmínku (12). Zároveň ovšem substituční determinant $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ jest od 0 různý. Možno tudíž lineární transformací souřadnic obdržeti z původního systému $\infty^1$ systémů žádaných vlastností.

(Dokončení.)