Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Poznámka k theorii křivek 2. řádu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 1, 65--75

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123484`

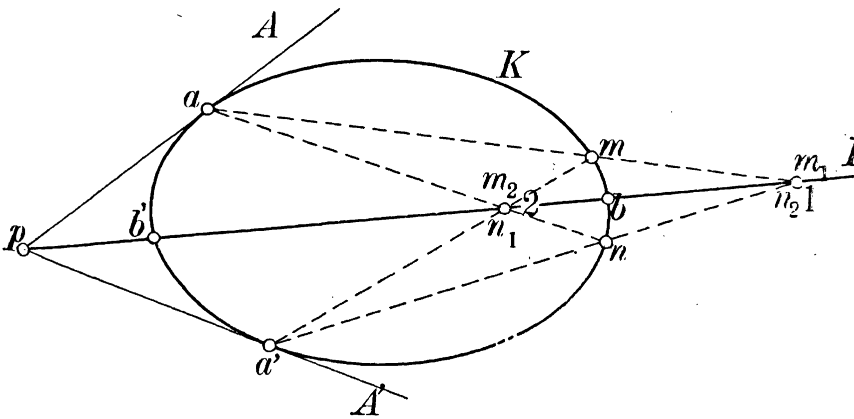
Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Poznámka k theorii křivek 2. řádu.

Pro studující napsal **Vilém Jung.**

1. Projektivné vlastnosti křivek *2.* řádu, jakožto výtvorů dvou projektivných svazků paprskových, ležících ve společné rovině, vyjadřují se v různých formách.

Jednou z nich jest na př. *Pascal*-ův theorém o šestiúhelníku vepsaném do křivky *2.* řádu.



Obr. 1.

Transformací tohoto theorému dospějeme k jisté involutorní vlastnosti křivek *2.* řádu, které se dá výhradně užíti při různých konstrukcích. Mimo to lze této vlastnosti užíti jako společného východiska k jednoduchému odvození analytických výrazů pro všechny tři druhy křivek *2.* řádu v jistých parallelních soustavách souřadničních.

Zvolme na křivce K (obr. 1.) dva body a, a'; tečny v nich buďtež $A \equiv \overline{a\,{}^1a}$, $A' \equiv \overline{a'\,{}^1a'}$, při čemž označujeme bod soumezný s bodem a symbolem ${}^1a$, bod soumezný s bodem a'

symbolem ${}^1a'$. Průsečík p těchto tečen jest pólem tětivy $\overline{aa'}$; veďme jím libovolnou přímku P.

Pozorujme šestiúhelník $a\,{}^1a\,m\,a'\,{}^1a'\,n$ do křivky K vepsaný; průsečíky jeho protějších stran $p[\overline{a\,{}^1a}, \overline{a'\,{}^1a'}]$, $1[\overline{{}^1am}, \overline{{}^1a'n}]$, $2[\overline{ma'}, \overline{na}]$ leží na přímce P.

Ježto $1 \equiv m_1 \equiv n_2$, $2 \equiv n_1 \equiv m_2$, vznikne na přímce P obyčejná bodová involuce.

Máme tedy větu: Promítnutím křivky 2. řádu ze dvou její bodů a, a' na přímku P procházející, pólem p tětivy $\overline{aa'}$, vznikne obyčejná bodová involuce *).

---

*) Analytickým výrazem jedno-jednoznačné souvislosti čili projektivnosti dvou soumístných řad bodových jest bilineární rovnice

$$ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d = 0, \qquad (1)$$

kde jsou součinitelé a, b, c, d čísla konečná od nully se lišící; při tom značí x_1, x_2 vzdálenosti sdružených bodů x_1, x_2 od určitého bodu o na přímce P, tedy $\overline{ox_1} = x_1$, $\overline{ox_2} = x_2$.

Je-li $ad - bc \gtrless 0$, přiřaďují se rovnicí (1) k proměnným hodnotám x_1 taktéž proměnné hodnoty x_2.

Buďtež x_1, x_2 a y_1, y_2 dva páry sdružených bodů projektivného vztahu, vyjádřeného rovnicí (1).

Je-li $b \gtrless c$ a zvolíme-li bod y_1 v bodě x_2, nepadne bod y_2 do bodu x_1; rovnice (1) vyjadřuje v tom případě *obyčejný vztah projektivný*. Je-li však $b = c$, jest rovnice (1) vůči proměnným x_1 a x_2 souměrnou a lze ji psáti ve tvaru

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + d = 0. \qquad (2)$$

Leží-li bod y_1 v bodě x_2, leží bod y_2 v bodě x_1; rovnice (2) vyjadřuje *involutorní projektivnost bodovou* na přímce P.

Je-li $x_1 = x_2 = \xi$, nazýváme příslušný bod přímky P *samodružným* čili *dvojným* bodem involuce bodové.

K stanovení jeho máme rovnici

$$a\xi^2 + 2b\xi + d = 0, \qquad (3)$$

z níž plyne

$$\xi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ad}}{a}.$$

Má tedy obyčejná involuce bodová *dva* dvojné body.

Je-li $b^2 - ad > 0$, jsou dvojné body *reálné různé*, involuce jest *hyperbolickou*.

Je-li $b^2 - ad = 0$, *stotožňují* se oba dvojné body, involuce jest *parabolickou*.

Je-li $b^2 - ad < 0$, jsou oba dvojné body *imaginární*, involuce jest *elliptickou*.

Je-li $\overline{au} \| P$ (obr. 2., 3., 4.), dostaneme centrum o této involuce, promítneme-li bod u křivky K z bodu a' na přímku P.

Dvojnými body této involuce jsou oba průsečíky b a b' přímky P s křivkou K.

Jsou-li tyto body *reálné různé* (obr. 2.), leží kterékoliv dva sdružené body m_1 a m_2 na *téže straně* involučního centra o; součin úseček $\overline{om_1}$ a $\overline{om_2}$ jest *kladný* a platí tu

$$\overline{om_1} \,.\, \overline{om_2} = \overline{ob}^2 = \overline{ob'}^2; \tag{1}$$

involuce jest *hyperbolickou.*

Bod sdružený s úběžným bodem přímky P nazývá se centrem involuce. Položíme-li v rovnici (2) $\lim x_2 = \infty$, dostaneme pro úsečku centra involučního

$$x_1 = -\frac{b}{a}.$$

Přeložíme-li počátek o do tohoto centra, musí jeho úsečka rovnati se nulle a tedy

$$b = 0.$$

Z rovnice (2) pak plyne

$$x_1 x_2 = -\frac{d}{a}; \tag{4}$$

pro úsečky dvojných bodů pak dostaneme z rovnice (3)

$$\xi^2 = -\frac{d}{a},$$

tak že lze rovnici (4) psáti ve tvaru

$$x_1 x_2 = \xi^2. \tag{5}$$

Jsou-li a, d znamení souhlasného, jest involuce *elliptickou*; jsou-li znamení nesouhlasných, jest involuce *hyperbolickou*; je-li $d = 0$, jest involuce *parabolickou.*

Přeložme počátek o do jednoho z dvojných bodů, předpokládajíce, že jsou různé reálné; v tom případě musí míti rovnice (3) jeden kořen nullový, proto $d = 0$.

Rovnice (2) má pak tvar

$$a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) = 0. \tag{6}$$

Druhý dvojný bod má úsečku

$$\xi = -\frac{2b}{a}.$$

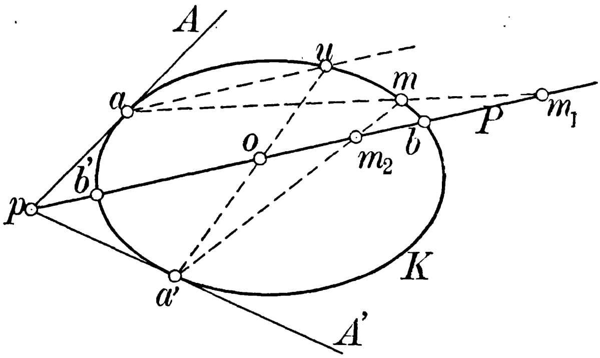
Je-li $a = 0$, jest tento dvojný bod úběžným bodem přímky P.

Z rovnice (6) pak plyne

$$x_1 = -x_2, \tag{7}$$

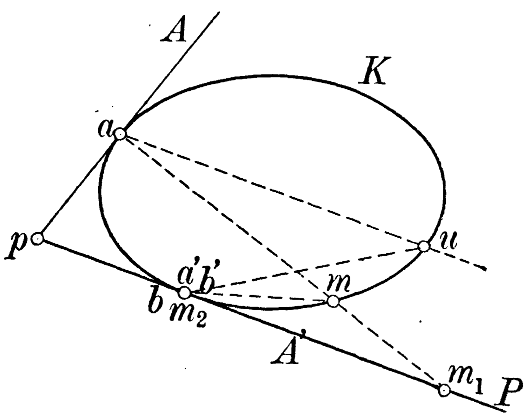
což značí *bodovou souměrnost* na přímce P; jejím středem jest dvojný bod v konečnu.

Dotýká-li se přímka P křivky K v bodě a' (obr. 3.), tak že $P \equiv A'$, jest $b \equiv b' \equiv o \equiv a'$; tento bod jest sdružen s kterýmkoliv bodem m_1 této přímky, involuce jest *parabolickou.*



Obr. 2.

Neprotíná-li přímka P křivku K, jsou dvojné body *imaginární* (obr. 4.); kterékoliv dva sdružené body m_1 a m_2 leží

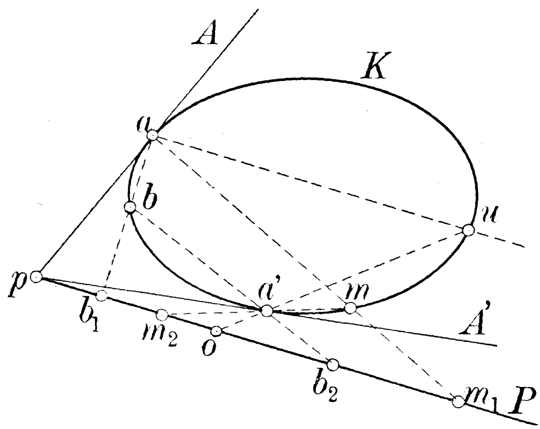


Obr. 3.

na ***různých stranách*** involučního centra o. Součin délek $\overline{om_1}$ a $\overline{om_2}$ jest *záporný* a platí tu

$$\overline{om_1} \cdot \overline{om_2} = \overline{ob_1} \cdot \overline{ob_2} = -\overline{ob_1}^2 = -\overline{ob_2}^2, \qquad (2)$$

jsou-li b_1 a b_2 ty dva sdružené body, jež jsou od involučního centra stejně vzdáleny, ležíce na jeho různých stranách. Je-li involuční centrum a tedy také jeden dvojný bod v nekonečnu, přejde involuce v souměrnost, jejímž středem jest dvojný bod v konečnu. To na př. nastane, je-li K parabolou a přímka P jejím průměrem ($\parallel$ s osou paraboly), aneb je-li K *hyperbolou* a přímka P rovnoběžná s některou její asymptotou.



Obr. 4.

2. Buďtež $\overline{aa'}$ a $\overline{bb'}$ sdruženými průměry *ellipsy* (obr. 5.), jež zvolíme za osy X, Y soustavy parallelních souřadnic x, y.

Budiž

$$\overline{a'o} = \overline{oa} = a, \ \overline{b'o} = \overline{ob} = b;$$

$$\overline{pm} \parallel \overline{ob}, \ \overline{op} = x, \ \overline{pm} = y.$$

Promítneme-li bod m křivky K z krajních bodů průměru $\overline{a'a}$ do průměru $\overline{b'b}$, dostaneme jeden pár sdružených bodů m_1, m_2 involuce na ose Y, jejímiž dvojnými body jsou krajní body b a b' sdruženého průměru.

Dle rovnice (1) platí

$$\overline{om_1} \,.\, \overline{om_2} = b^2;$$

Z obr. 5, patrno, že

$$\frac{\overline{om_1}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{oa}}{\overline{pa}}, \text{ z čehož } om_1 = \frac{a}{a-x}\,y,$$

$$\frac{\overline{om_2}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{a'o}}{\overline{a'p}}, \text{ z čehož } \overline{om_2} = \frac{a}{a+x}\,y.$$

Jest tedy

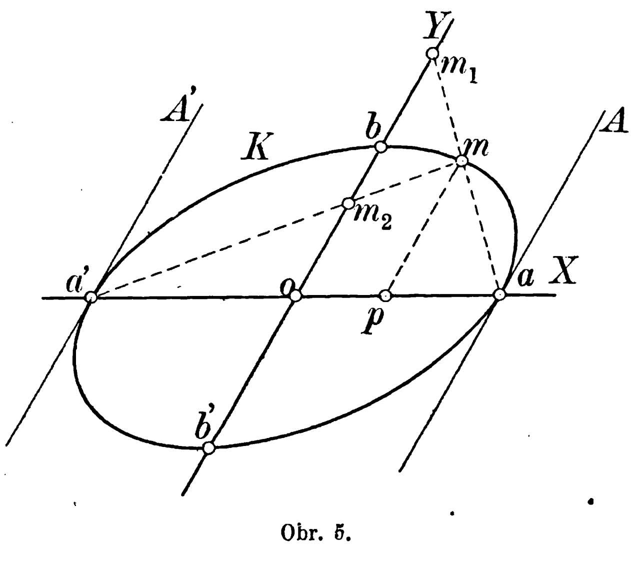
$$\frac{a^2}{a^2-x^2}\,y^2 = b^2,$$

čili

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2, \qquad (3)$$

aneb

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$



Obr. 5.

jakožto rovnice *ellipsy,* vztažené na sdružené průměry. Pošineme-li osu Y rovnoběžně do bodu a, po případě do bodu a', musíme v rovnici (3) místo x psáti $x + a$, po případě $x - a$, čímž dostaneme rovnici

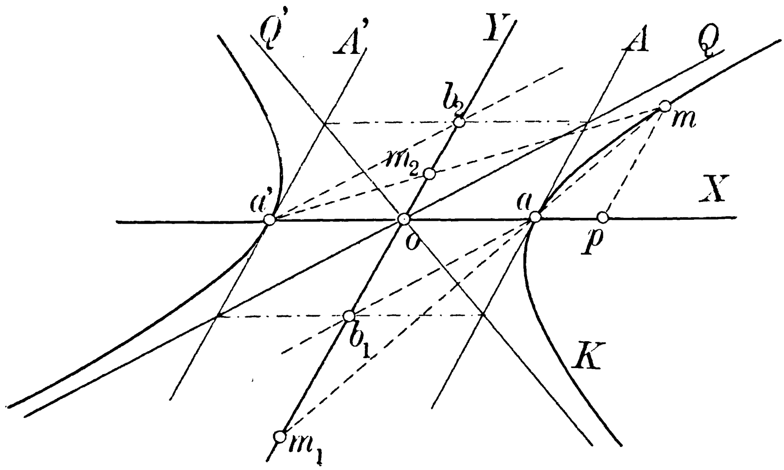
$$y^2 = -2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2, \qquad (5)$$

po případě

$$y^2 = b\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \tag{6}$$

jakožto rovnici *ellipsy*, vztažené na průměr a tečnu v některém jeho krajním bodě, jakožto osy souřadné.

3. Buďtež X, Y sdružené průměry *hyperboly* (obr. 6.), jejímiž asymptotami jsou přímky Q a Q'.



Obr. 6.

Nechť průměr X protíná hyperbolu v reálných bodech a, a'. Průměr Y neprotíná hyperbolu v reálných bodech a jest rovnoběžný s tečnami A, A', jež se dotýkají hyperboly v bodech a, a'. Průsečíky těchto tečen s asymptotami jsou vrcholy rovnoběžníku, jehož dvě protější strany leží na tečnách A, A' a druhé dvě protější strany jsou rovnoběžné s průměrem X. Průsečíky těchto stran s průměrem Y jsou body b_1 a b_2.

Budiž

$$\overline{a'o} = \overline{oa} = a, \quad \overline{b_1 o} = \overline{ob_2} = b,$$
$$\overline{pm} \parallel \overline{ob_2}, \quad \overline{op} = x, \quad \overline{pm} = y.$$

Promítneme-li bod m hyperboly z krajních bodů průměru $\overline{aa'}$ do průměru Y, dostaneme jeden pár m_1, m_2 sdružených bodů elliptické involuce, jejímž centrem jest bod o. Promítneme-li některý z obou úběžných bodů hyperboly z bodu a, a' do osy Y, dostaneme pár sdružených bodů b_1, b_2, jež jsou od centra o stejně vzdáleny.

Dle rovnice (2) tu platí

$$\overline{om_1} \, . \, \overline{om_2} = - b^2.$$

Z obr. 6. patrno, že

$$\frac{\overline{m_1 o}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{oa}}{\overline{ap}}, \text{ z čehož } \overline{om_1} = - \frac{a}{x - a} y,$$

$$\frac{\overline{om_2}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{a'o}}{\overline{ap}}, \text{ z čehož } \overline{om_2} = \frac{a}{x + a} y.$$

Jest tedy

$$- \frac{a^2}{x^2 - a^2} y^2 = - b^2,$$

čili

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2, \tag{7}$$

aneb

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jakožto rovnice *hyperboly*, vztažené na sdružené průměry. Pošineme-li souřadnou osu Y rovnoběžně do bodu a, po případě do bodu a', musíme v rovnici (7) místo x psáti $x + a$, po případě $x - a$, čímž dostaneme rovnici

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2, \tag{9}$$

po případě

$$y^2 = - 2 \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2, \tag{10}$$

jakožto rovnici *hyperboly*, vztažené na průměr a tečnu v některém jeho krajním bodě, jakožto osy souřadné.

4. Zvolme dále asymptoty *hyperboly* za osy souřadné X, Y (obr. 7.). Budiž $\sphericalangle (X, Y) = 2\alpha$; je-li P reálnou osou hyperboly, platí

$$\sphericalangle (X, P) = \sphericalangle (P, Y) = \alpha.$$

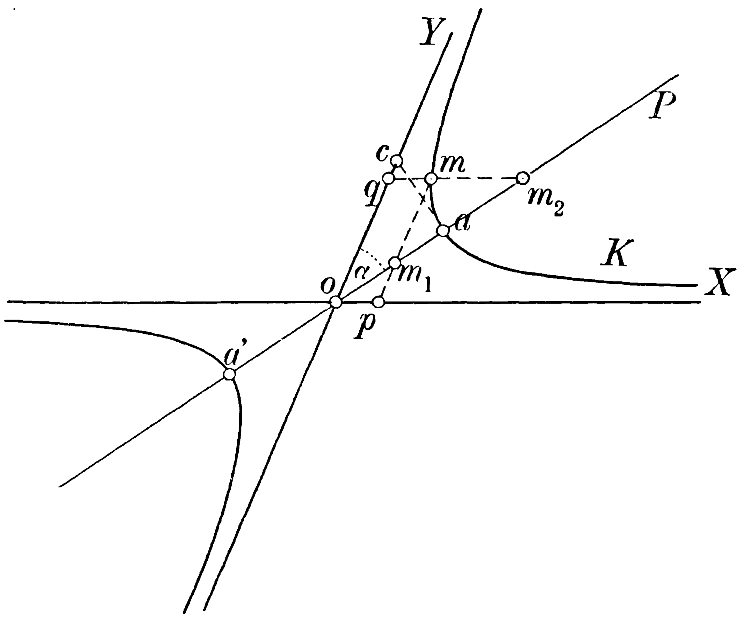
Průsečíky a, a' přímky P s hyperbolou jsou její vrcholy; položme

$$\overline{a'o} = \overline{oa} = a,$$

i jest pak

$$\overline{oc} = c = \frac{\overline{oa}}{\cos\alpha}$$

lineární výstřednost hyperboly.



Obr. 7.

Promítneme-li bod m hyperboly z její úběžných bodů do přímky P, dostaneme jeden pár m_1, m_2 sdružených bodů involuce, jejímiž dvojnými body jsou vrcholy a, a' hyperboly; při tom jest $\overline{mm_2} \parallel X$, $\overline{mm_1} \parallel Y$.

Pro tuto involuci platí relace

$$\overline{om_1} \cdot \overline{om_2} = \overline{oa}^2 = a^2.$$

Dále budiž

$$\overline{pm} \parallel Y,\ \overline{op} = x,\ \overline{pm} = y.$$

Z obr. 7. patrno, že

$$\overline{om_1} = 2\overline{op} \cdot \cos\alpha = 2x\cos\alpha,$$

$$\overline{om_2} = 2\overline{oq} \cdot \cos\alpha = 2\overline{pm} \cdot \cos\alpha = 2y\cos\alpha.$$

Jest tedy

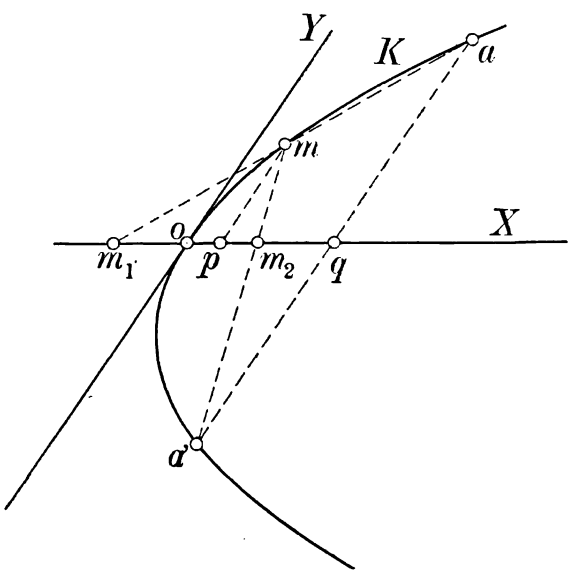
$$2x \cos\alpha \,.\, 2y \cos\alpha = a^2,$$

čili

$$xy = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{c^2}{4},$$

jakožto rovnice hyperboly, vztažené na její asymptoty jakožto osy souřadné.

5. Budiž X průměr procházející bodem o paraboly (obr. 8.) a Y její tečna v tomto bodě.



Obr. 8.

Zvolme dva body a, a' paraboly tak, aby $\overline{a'a} \parallel Y$. Promítneme-li z bodů a, a' body paraboly do průměru X, dostaneme involuci, jejíž jeden dvojný bod leží v bodě o a druhý i s involučním centrem leží v úběžném bodě průměru X, tak že involuce tu přejde v souměrnost.

Pro tento případ platí

$$\overline{m_1 o} = \overline{o m_2} = u.$$

Dále budiž

$$\overline{pm} \parallel \overline{a'a} \parallel Y,\ \overline{oq} = x_1,\ \overline{qa} = y_1,\ \overline{op} = x,\ \overline{pm} = y.$$

Z obr. 8. vysvítá, že

$$\frac{\overline{m_1 p}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{m_1 q}}{\overline{qa}},\ \text{čili}\ \frac{u+x}{y} = \frac{u+x_1}{y_1},\ \text{z čehož}\ u = \frac{xy_1 - x_1 y}{y - y_1},$$

$$\frac{\overline{pm_2}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{m_2 q}}{\overline{a'q}},\ \text{čili}\ \frac{u-x}{y} = \frac{x_1 - u}{y_1},\ \text{z čehož}\ u = \frac{xy_1 + x_1 y}{y + y_1}.$$

Srovnáním obou výrazů pro u dostaneme rovnici

$$\frac{y+y_1}{y-y_1} = \frac{xy_1 + x_1 y}{xy_1 - x_1 y},$$

z níž plyne

$$\frac{y}{y_1} = \frac{xy_1}{x_1 y},\ \text{čili}\ \frac{y^2}{x} = \frac{y_1^2}{y_1} = 2p.$$

Jest tedy

$$y^2 = 2px \tag{12}$$

rovnicí *paraboly*, vztažené na průměr a tečnu v jeho krajním bodě jakožto osy souřadné.

Poznámka. Rovnice (5) a (6) ellipsy, (9) a (10) hyperboly a rovnice (12) paraboly mají společnou formu

$$y^2 = 2px + qx^2. \tag{13}$$

α) Je-li $p \gtrless 0$, značí rovnice (13) *vlastní* křivku 2. řádu, vztaženou na průměr a tečnu v jednom z jeho krajních bodů reálných, jakožto osy souřadné.

Je-li $q < 0$, značí rovnice (13) *ellipsu*; je-li $q = 0$, značí *parabolu*; je-li $q > 0$, značí *hyperbolu*.

β) Je-li $p = 0$, značí rovnice (13) *nevlastní* čili *degenerovanou* křivku 2. řádu a to:

1. pro $q = 0$ dvě *reálné různé* přímky, procházející počátkem o;

2. pro $q = 0$ dvě *reálné stotožněné* přímky, spadající do souřadné osy X;

3. pro $q < 0$ dvě *imaginární* přímky, jichž *reálný* průsečík leží v počátku souřadnic.