Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Poznámka k přibližným kvadraturním methodám

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 1, 23--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123448

obyčejná platí za jednu podmínku, platí inflekční za dvě; i máme celkem 8 nezávislých podmínek, jež s požadavkem, aby C_4^3 měla dvojný bod, tvoří devět nutných podmínek.

Třetí bod inflekční je dán jako průsek přímky J s tečnou inflekční.

Dvojný bod čáry snadno pak sestrojíme. Sestrojíme oba body a a b, o nichž byla řeč výše, a spojnice $\overline{ap_3}$ a $\overline{bp_1}$ se protne v bodě o_1. Další postup jako nahoře.

V. **Křivka reciproká.**

Vše, co v předešlých odstavcích bylo řečeno o křivce C_4^3, lze reciprokým způsobem vyložiti o křivce C_3^4, t. j. o křivce st. čtvrtého s třemi body úvratu.

Mimo jiné zajímavé výsledky, k nimž bychom takovým způsobem došli, vytýkám zvláště ten, jenž je obsažen v oddíle posledním, jenž totiž podává návod, jak sestrojiti dvojnou tečnou křivky C_3^4, jsou-li dány body úvratu i s tečnami.

Do podrobností není třeba zacházeti.

Poznámka k přibližným kvadraturním methodám.

Napsal **Vilém Jung**, professor v Praze.

1. *Simpson*-ovo kvadraturní pravidlo jest jen zvláštním případem *Newton-Cotes*-ovy kvadraturní methody, která jest starší a obecnější. Základní myšlenku této methody sdělil *Newton* (1642—1727) v druhém svém dopise ze dne 24. října 1676 s *Leibnitz*-em (1646—1716).*)

Praví tam **), že lze přibližným způsobem pohodlně provésti kvadraturu

$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$

---

*) Viz na př.: *M. Cantor*, „*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*". III. Bd., pag. 358. Leipzig, 1898.

**) Pro stručnost užito nynějšího způsobu psaní.

křivky $$y = f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k,$$

nahradí-li se tato pomocnou křivkou racionální stupně n-ho, mající s danou křivkou $n+1$ bodů společných, což jest v podstatě interpolace na základě $n+1$ známých funkčních hodnot $y_r = f(x_r)$, $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Ve svém spise „*Methodus differentialis*“, vydaném r. 1711 *William*-em *Jones*-em, doporučuje *Newton*, aby se volily argumentní hodnoty x_r v arithmetické řadě *1*-ho stupně, totiž

$$x_r = a + \frac{rv}{n}, \quad v = b - a.$$

Hodnota integrálu

$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$

stanoví se pak obecně vzorcem

$$P = v \sum_{r=0}^{n} \alpha_r y_r$$

buď *přesně*, je-li $f(x)$ celistvou funkcí nanejvýše stupně n-ho, tedy $m \leqq n$, aneb *přibližně**), je-li stupně vyššího, t. j. $m > n$, anebo není-li celistvou funkcí racionální a dá se v příslušných mezích vyjádřiti nekonečnou konvergentní řadou stoupající dle celistvých a kladných mocnin argumentu x, tak že $\lim m = \infty$.

Přitom jsou α_r *číselné konstanty*, nezávislé na koefficientech a_k ve funkci $f(x)$ se vyskytujících, jakož i nezávislé na mezích a, b integrálu této funkce.

Tyto konstanty hoví relaci $\alpha_r = \alpha_{n-r}$; stačí tedy vypočítati pro sudé $n = 2\mu$ pouze $\mu + 1$ konstant, na př.

$$\alpha_{2\mu}, \alpha_{2\mu-1}, \ldots \alpha_\mu;$$

*) Zajímavo jest, že tento vzorec, odvozený pro sudé $n = 2\mu$ použitím lichého počtu $n + 1 = 2\mu + 1$ funkčních hodnot y_r *platí přesně* také ještě pro funkce nejblíže vyššího lichého stupně $n + 1 = 2\mu + 1$; kdežto tento vzorec, odvozený pro liché $n = 2\mu + 1$ použitím sudého počtu $n + 1 = 2\mu + 2$ funkčních hodnot *neplatí již přesně* pro funkce nejblíže vyššího sudého stupně $n + 1 = 2\mu + 2$. Viz mé pojednání: »*Příspěvek k* **Newton-Cotes**-*ově kvadraturní methodě*«, pag. 11. (Rozpr. české akad. cís. Frant. Josefa, r. VIII., tř. II., č. 17., 3. února 1899.)

pro liché $n = 2\mu + 1$ taktéž $\mu + 1$ konstant, na př.

$$\alpha_{2\mu+1}, \alpha_{2\mu}, \ldots \alpha_{\mu+1}.$$

Newton udal hodnoty těchto číselných konstant pro případ $n + 1 = 4$ funkčních hodnot. *)

Roger Cotes (1652—1716) uvádí ve svém spise „*De methodo differentiali Newtoniana*" hodnoty těchto konstant pro případy až do $n + 1 = 11$ funkčních hodnot, avšak neuvádí methodu, dle níž je vypočítal.

Th. Simpson (1710—1761) sestrojil svůj kvadraturní vzorec **) na témž základě a uveřejnil r. 1741; rozdělil interval $v = b - a$ na $2n$ stejných dílů $h = \frac{v}{2n}$, nahradil danou křivku řadou n parabolických oblouků 2-ho stupně a obdržel vzorec

$$P = \frac{h}{3} \{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\}.$$

Gauss (1777—1855) oceniv význačným způsobem *Cotes*-ovy zásluhy v tomto směru, odvodil jeho methodu pomocí *Lagrange*-ova interpolačního vzorce a ukázal, kterak lze počítati chyby při této methodě vznikající.

V pojednání „*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*" odvodil *Gauss* novou methodu, při které volil argumentní hodnoty x_r zvláštním způsobem (jsou to kořeny jisté algebraické rovnice $(n + 1)$-ho stupně), tak že použitím určitého počtu funkčních hodnot docílil takové přesnosti, jaké se docílí při *Cotes*-ově methodě použitím dvojnásobného počtu funkčních hodnot. Duchaplnou methodu podal *Čebyšev*, uděliv rovnici křivky pomocné zvláštní formu. ***)

---

*) Tamtéž pag. 361—362.

**) V úvodě k dotyčnému pojednání praví *Simpson* sám, že nepodává nic nového, že vzorec ten odvodil již *Newton*. Upravil jej pouze, aby byl jasnější a k praktickému počítání příhodnější.

***) Viz na př.: *Dr. E. Heine*, „*Handbuch der Kugelfunktionen.*" II. T., pag. 1—31. Berlin 1881.

2. V pojednání *) „*Über eine neue Formel der Kombinatorik*" podává *prof. dr. Fr. Studnička* pro k-tou *Cotes*-ovu konstantu při zvoleném n vzorec ve formě determinantní.

V pojednání **) „*Über die Berechnung der Cotesischen Zahlen bei genäherten Quadraturen*" odvozuje *prof. dr. G. Blažek* pro *Cotes*-ova čísla vzorce ve tvaru obecném, v nichž se vyskytují *potenční* čili *Vandermonde*-ovy determinanty; mimo to uvádí jisté rovnice, obsahující prvních $\mu + 1$ *Cotes*-ových čísel lineárně pro sudé $n = 2\mu$, jakož i pro liché $n = 2\mu + 1$. Dále praví, že, kdyby se determinanty v jeho vzorcích obsažené transformovaly na základě *Fiore*-ovy ***) věty determinantní, dospělo by se k početnímu způsobu, jenž úzce přiléhá k methodě, již *Gauss* podal pro počítání *Cotes*-ových čísel.

V pojednání †) „*Příspěvek k Newton-Cotes-ově kvadraturní methodě*" odvodil jsem pro *Cotes*-ova čísla obecný vzorec ve tvaru nezávislém

$$\alpha_r = \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} \dfrac{n^k}{k+1} K_{r\ \ n-1}^{(n-k)}}{r!\,(n-r)!},$$

*) Král. česká Spol. nauk, 25. ledna 1878.

**) Tamtéž, 7. března 1879.

***) *V. Fiore*, „*Dimonstrazione d'una transformazione di determinanti*". Batt. G. X. pag. 170. 1872.

Obecnější větu o potenčních determinantech odvodil *induktivním* způsobem *prof. dr. Frant. Studnička* ve spise: „*O determinantech mocninných a sestavných*". (Č. IX. spisů poctěných jubilejní cenou Král. české Spol. nauk v Praze 1897.)

Tuto větu determinantní odvodil *deduktivním* způsobem již *H. Nägelsbach* ve spise: „*Über eine Klasse symmetrischer Funktionen*". Pr. Zweibrücken 1871.

Ještě obecnější větu determinantní platnou pro determinanty formy

$$\begin{vmatrix} \varphi(x_1), & \psi(x_1), & \chi(x_1), & \dots \\ \varphi(x_2), & \psi(x_2), & \chi(x_2), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(x_n), & \psi(x_n), & \chi(x_n), & \dots \end{vmatrix}$$

kde φ, ψ, χ značí celistvé funkce racionální, odvodil jsem v pojednání „*Příspěvek k theorii determinantů mocninných*". (Rozpr. české akad. cís. Frant. Josefa, r. VIII., tř. II., č. 38., 26. května 1899.)

†) Rozpr. české akad. cís. Frant. Josefa, r. VIII., tř. II., č. 17., 3. února 1899.

v němž $K_{\substack{r\\n-1}}^{(n-k)}$ znamená součet všech kombinací bez opakování $(n-k)$-té třídy veškerých $(n-1)$ čísel přirozené řady od 1 do n, vyjímajíc číslo r; při tom jest $K^{(o)} = 1$. Pomocí tohoto vzorce lze počítati veškeré konstanty α_r, vyjímajíc α_o, avšak $\alpha_o = \alpha_n$.

Na př. pro $n = 2$, tedy vzhledem ke 3 funkčním hodnotám y_o, y_1, y_2 máme

$$K_{\substack{2\\1}}^{(1)} = 1,\ K_{\substack{2\\1}}^{(0)} = 1;\ K_{\substack{1\\1}}^{(1)} = 2,\ K_{\substack{1\\1}}^{(0)} = 1,$$

tak že

$$\alpha_2 = \alpha_o = \frac{1}{2!\,0!}\left\{(-1)^3\frac{2^1}{2}.1 + (-1)^4\frac{2^2}{3}.1\right\} = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1!\,1!}\left\{(-1)^2\frac{2^1}{2}.2 + (-1)^3\frac{2^2}{3}.1\right\} = \frac{2}{3}.$$

Jest tedy

$$P = \frac{v}{6}\{y_o + 4y_1 + y_2\}.$$

Položíme-li $v = 2h$, dostaneme

$$P = \frac{h}{3}\{y_o + 4y_1 + y_2\}$$

jakožto základ k odvození *Simpson*-ova pravidla.

Vypočtěme dle zmíněného vzorce konstanty α_r *Cotes*-ovy methody pro $n = 6$, tedy vzhledem k $n + 1 = 7$ funkčním hodnotám.

Sestavením potřebných vedlejších výpočtů dostaneme*)

1, 2, 3, 4, 5, (6); $K_0 = 1$, $K_1 = 15$, $K_2 = 85$, $K_3 = 225$, $K_4 = 274$, $K_5 = 120$.

1, 2, 3, 4, (5), 6; $K_0 = 1$, $K_1 = 16$, $K_2 = 95$, $K_3 = 260$, $K_4 = 324$, $K_5 = 144$.

---

*) Uzávorkování číslice znamená, že tato má se při tvoření součtů kombinací vynechati. Součty

$$K_{\substack{6\\5}}^{(m)},\ K_{\substack{5\\5}}^{(m)},\ K_{\substack{4\\5}}^{(m)},\ K_{\substack{3\\5}}^{(m)},\ K_{\substack{2\\5}}^{(m)},\ K_{\substack{1\\5}}^{(m)}$$

tvoří arithmetickou řadu m-ho stupně.

Poslední 2 řádky netřeba počítati.

1, 2, 3, (4), 5, 6: $K_0 = 1$, $K_1 = 17$, $K_2 = 107$, $K_3 = 307$, $K_4 = 396$, $K_5 = 180$.

1, 2, (3), 4, 5, 6; $K_0 = 1$, $K_1 = 18$, $K_2 = 121$, $K_3 = 372$, $K_4 = 508$, $K_5 = 240$.

1, (2), 3, 4, 5, 6; $K_0 = 1$, $K_1 = 19$, $K_2 = 137$, $K_3 = 461$, $K_4 = 702$, $K_5 = 360$.

(1), 2, 3, 4, 5, 6; $K_0 = 1$, $K_1 = 20$, $K_2 = 155$, $K_3 = 580$, $K_4 = 1044$, $K_5 = 720$

$$\alpha_6 = \alpha_0 = \frac{-\frac{6}{2}.120 + \frac{6^2}{3}.274 - \frac{6^3}{4}.225 + \frac{6^4}{5}.85 - \frac{6^5}{6}.15 + \frac{6^6}{7}.1}{6!\ 0!} = \frac{41}{840},$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 = \frac{\frac{6}{2}.144 - \frac{6^2}{3}.324 + \frac{6^3}{4}.260 - \frac{6^4}{5}.95 + \frac{6^5}{6}.16 - \frac{6^6}{7}.1}{5!\ 1!} = \frac{216}{840},$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 = \frac{-\frac{6}{2}.180 + \frac{6^2}{3}.396 - \frac{6^3}{4}.307 + \frac{6^4}{5}.107 - \frac{6^5}{6}.17 + \frac{6^6}{7}.1}{4!\ 2!} = \frac{27}{840},$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{6}{2}.240 - \frac{6^2}{3}.508 + \frac{6^3}{4}.372 - \frac{6^4}{5}.121 + \frac{6^5}{6}.18 - \frac{6^6}{7}.1}{3!\ 3!} = \frac{272}{840}.$$

Hodnoty tyto shodují se s hodnotami, jež vypočítal *Cotes* pro případ vztahující se k 7 funkčním hodnotám.

Máme tedy

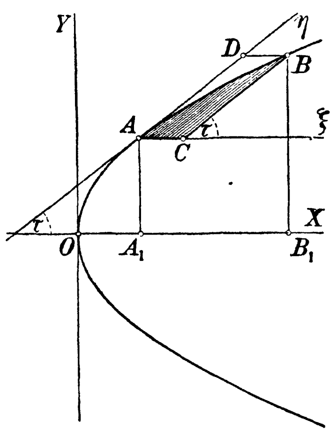
$$P = \frac{v}{840}\{41(y_0 + y_6) + 216(y_1 + y_5) + 27(y_2 + y_4) + 272 y_3\},$$

při tom jest v celý integrační interval, $h = \frac{v}{6}$ pak šířka jednoho proužku.

3. *Simpson*-ovo pravidlo lze snadno beze všech umělůstek, což se pro začátečníky doporučuje, odvoditi obecně takto.

Budiž v obr. 1.

$OA_1 = x_1$, $A_1A = y_1$; $OB_1 = x$, $B_1B = y$; $AC = \xi$, $CB = \eta$.



Obr. 1.

Transformujme vrcholovou rovnici paraboly

$$y^2 = 2ax \tag{1}$$

na kosoúhlou soustavu, v níž jest osa $A\xi$ rovnoběžná s osou paraboly a osa $A\eta$ jest tečnou paraboly v novém počátku A, jenž leží na parabole.

Ježto $tg\ \tau = \frac{a}{y_1}$, platí

$$y_1 \sin \tau = a \cos \tau\,; \tag{2}$$

mimo to

$$y_1^2 = 2ax_1. \tag{3}$$

Na základě transformačních vzorců

$$x = x_1 + \xi + \eta \cos \tau, \quad y = y_1 + \eta \sin \tau$$

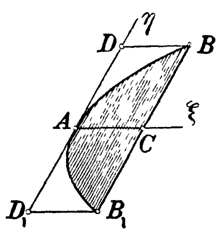
a se zřetelem k rovnicím (2) a (3) dostaneme

$$\eta^2 = 2 \frac{a}{\sin^2 \tau} \xi = 2a_1 \xi \tag{4}$$

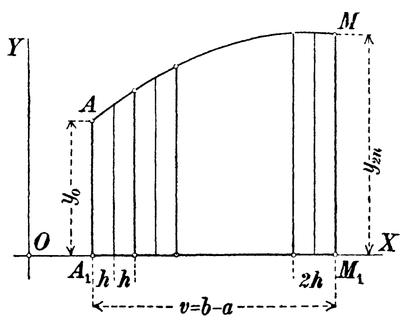
jakožto rovnici paraboly, vztažené na průměr a s ním sdruženou tečnu v bodě A.

Patrno, že

$$\text{pl. } ACBA = \sin \tau \int_0^{\xi} \eta d\xi = \sin \tau \int_0^{\xi} \sqrt{2a_1 \xi}\, d\xi = \tfrac{2}{3} \xi \sqrt{2a_1 \xi} \,.\, \sin \tau$$
$$= \tfrac{2}{3} \xi \eta \sin \tau = \tfrac{2}{3} \text{pl. } ACBDA.$$



Obr. 2.



Obr. 3.

Dle předeslaného platí tedy pro parabolickou úseč obecně (obr. 2.)

$$CB = -CB_1, \; D_1 D \,||\, B_1 B; \; DB \,||\, AC \,||\, D_1 B_1.$$

$$\text{pl. } B_1 BAB_1 = \tfrac{2}{3} \text{ pl. } B_1 BDD_1 B_1.$$

Rozdělme interval (obr. 3.) $A_1 M_1 = v$ na $2n$ stejných dílů $h = \frac{v}{2n}$ a nahraďme danou křivku řadou n parabolických oblouků 2-ho stupně, proloživše pokaždé třemi sousedními body parabolu 2-ho stupně, jejíž osa jest rovnoběžná s osou pořadnic Y a to buď ve směru kladném nebo záporném.

Stanovme plochu p dvojitého proužku $A_1B_1C_1CBAA_1$ (obr. 4. a 5.). Budiž $A_1A = y_0$, $B_1B = y_1$, $C_1C = y_2$; $A_1C_1 = 2h$.

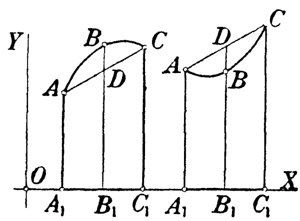
Patrno, že

$$B_1D = \frac{y_0 + y_2}{2}$$

a tedy

$$DB = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}.$$

Je-li $B_1B > B_1D$, jest $DB > 0$ (obr. 4.), je-li $B_1B < B_1D$, jest $DB < 0$ (obr. 5.).



Obr. 4. a 5.

V 1. případě se plocha parab. úseče $ADCBA$ přičítá ku ploše lichoběžníku $A_1C_1CAA_1$, v 2. případě odečítá. Máme tedy pro oba případy

$$p = h(y_0 + y_2) + \frac{2}{3} . 2h . \overline{DB} = h(y_0 + y_2)$$
$$+ \frac{4}{3} h \left\{ y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} \right\},$$

$$p = h(y_0 + y_2) + \frac{2}{3} h \{2y_1 - y_0 - y_2\}$$
$$= \frac{h}{3} \{y_0 + 4y_1 + y_2\}.$$

Sečtením veškerých n dvojitých proužků dostaneme

$$P = \frac{h}{3} \{y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots$$
$$+ y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\},$$

tedy

$$P = \frac{h}{3}\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\}. \quad (5)$$

O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

Výtvarného zákona křivek kvadratickou transformací odvozených můžeme použíti k sestrojení jejich tečen a středu křivosti. *) Geometrie kinematická poskytuje nám k tomu všecky pomůcky, abychom bezprostředně dospěli k cíli i v případech nejobecnějších.

1. Předpokládejme jakožto základ této transformace nějakou křivku 2. stupně K, mimo ni bod s jakožto pol a vedle tohoto ještě dva body ${}^1s$ a ${}^2s$ ležící na křivce K. K libovolnému bodu m nějaké křivky M, již chceme transformovati, sestrojíme v této soustavě bod sdružený ${}^1m$ tak, že sestrojivše průvodiče $Q \equiv sm$, protneme jej paprskem S svazku ${}^2s$ procházejícím bodem m', v kterém protíná křivku K paprsek svazku ${}^1s$ bodu m příslušící.

Na tento druh kvadratické transformace soumístní poukázal pan ředitel c. k. české reálky v Brně, *Václav Jeřábek* ve své přednášce konané dne 15. února 1902 ve schůzi brněnských členů Jednoty českých mathematiků: „*O jedné transformaci kvadratické a jejím významu v deskriptivní geometrii*" a dospěl, pokládaje dané útvary rovinné za průměty jistých útvarů prostorových k zajímavým výsledkům, jež hodlá v nejbližší době tiskem uveřejniti.

Tato transformace jeví se jako obecnější výraz vztahu jedno- a dvouznačných geometrických elementárních útvarů,

---

*) „*Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*" uveřejnil professor *Alois Strnad* ve výroční zprávě c. k. reálky v Hradci Králové z roku školního 1886—7.