Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 1, 32--36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123444

tedy

$$P = \frac{h}{3}\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\}. \quad (5)$$

O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou.

Napsal prof. **Bedřich Procházka**.

Výtvarného zákona křivek kvadratickou transformací odvozených můžeme použíti k sestrojení jejich tečen a středu křivosti. *) Geometrie kinematická poskytuje nám k tomu všecky pomůcky, abychom bezprostředně dospěli k cíli i v případech nejobecnějších.

1. Předpokládejme jakožto základ této transformace nějakou křivku 2. stupně K, mimo ni bod s jakožto pol a vedle tohoto ještě dva body ${}^1s$ a ${}^2s$ ležící na křivce K. K libovolnému bodu m nějaké křivky M, jiï chceme transformovati, sestrojíme v této soustavě bod sdružený ${}^1m$ tak, že sestrojivše průvodiče $Q \equiv sm$, protneme jej paprskem S svazku ${}^2s$ procházejícím bodem m', v kterém protíná křivku K paprsek svazku ${}^1s$ bodu m příslušící.

Na tento druh kvadratické transformace soumístní poukázal pan ředitel c. k. české reálky v Brně, *Václav Jeřábek* ve své přednášce konané dne 15. února 1902 ve schůzi brněnských členů Jednoty českých mathematiků: „*O jedné transformaci kvadratické a jejím významu v deskriptivní geometrii*“ a dospěl, pokládaje dané útvary rovinné za průměty jistých útvarů prostorových k zajímavým výsledkům, jež hodlá v nejbližší době tiskem uveřejniti.

Tato transformace jeví se jako obecnější výraz vztahu jedno- a dvouznačných geometrických elementárních útvarů,

*) „*Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*“ uveřejnil professor *Alois Strnad* ve výroční zprávě c. k. reálky v Hradci Králové z roku školního 1886—7.

o kterých jedná *Dr. Emil Weyr* ve svém díle: „*Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*“ *). Předpokládáme-li totiž, že v právě uvedené kvadratické transformaci jest útvar M křivkou 2. stupně bodem ^1s procházející, dosáhneme onen žádoucí vztah útvarů jedno- a dvouznačných, dle kterého dospějeme ke křivce ^1M jakožto křivce 3. stupně s jedním bodem dvojným.

Bod ^1m sdružený s bodem m jeví se při naší transformaci kvadratické jako průsečík paprsků Q a R svazku s, resp. ^2s a můžeme, zvolivše rychlost bodu m v tečně Tm křivky M, stanoviti směr i rychlost pohybu bodu onoho jakožto tečny ke křivce ^1M, kterou vytvořuje.

2. Předpokládejme, že se přímka Q otáčí určitou rychlostí, při níž bod m se pohybuje na př. rychlostí $\overline{m1} \perp Q$. Z této rychlosti odvodíme si rychlost $\overline{m2}$, kterou se pohybuje bod m přímky Q jakožto průsečík s křivkou M v této křivce, vedeme-li bodem 1 přímku $12 \parallel Q$, protínající tečnu Tm křivky M v bodě 2. Znajíce rychlost bodu m v tečně Tm, můžeme odvoditi rychlost, kterou se pohybuje přímka R stále bodem m při jeho pohybu procházející. Omezíme-li totiž přímku $m3 \perp R$ přímkou $23 \parallel R$, obdržíme v délce $\overline{m3}$ rychlost, kterou se pohybuje bod m při otáčení přímky R. Bod m', ve kterém přímka R křivku K protíná, pohybuje se při otáčení této přímky rychlostí $\overline{m'4}$, již přímka $^1s3$ v přímce $m'4 \perp R$ omezuje. Z rychlosti této odvodíme si rychlost $\overline{m'5}$, kterou se při tomto otočení přímky R pohybuje bod m' v tečně Tm' křivky K, vedeme-li přímku $45 \parallel R$, kteráž v tečně této délku $\overline{m5}$ vymezuje. Úsečka $\overline{m'6} \perp R$ omezená přímkou $56 \parallel R$, představuje rychlost, kterou se pohybuje bod m' při otáčení přímky S svazku ^2s, neustále bodem m' procházející. Na rychlosti $\overline{m'6}$ bodu m' při otáčení přímky S závisí i rychlost $\overline{^1m7}$ bodu ^1m sdruženého kvadratickou transformací s bodem m, kterou obdržíme, omezíme-li $^1m7 \perp S$ přímkou $^2s6$.

Také z rychlosti $\overline{m1}$ bodu m, kterou jsme si předem zvolili při otáčení přímky Q odvodíme si zároveň rychlost $\overline{^1m8}$ bodu ^1m téže přímky, omezíme-li přímku $^1m8 \perp Q$ spojnicí $s1$.

*) Leipzig. B. G. Teubner. 1869.

Znajíce takto obě rychlosti $\overline{m7}$ a $\overline{{}^1m8}$ bodu ${}^1m$, průsečného přímek Q a S, příslušící jemu při otáčení těchto přímek za vytvořování křivky ${}^1M$, obdržíme směr a velikost rychlosti $\overline{{}^1m9}$ výsledného pohybu bodu ${}^1m$ jakožto tečnu T^1m křivky ${}^1M$, když body 7 a 8 vedeme přímky $79 \parallel S$ a $89 \parallel Q$, kteréž se v bodě 9 protínají.

3. Sestrojení této tečny T^1m dá se však usnadniti, jelikož lze dokázati, že tečna prochází bodem x, ve kterém přímka F, spojující bod m' s bodem m'' — průsečným bodem přímky $U \equiv u\,{}^1m$ s křivkou K — protíná tečnu Tm.*)

Za tím účelem předpokládejme, že útvar M jest zastoupen přímkou, t. j. tečnou Tm této křivky v bodě m se dotýkající a hledejme tečnu T^1m k útvaru L odpovídajícímu této tečně Tm.

Útvar tento L, jakožto určený dvěma projektivnými svazky s a ${}^2s$ jest v tomto případě křivkou 2. stupně, procházející mimo body s a ${}^2s$ zároveň bodem u a oběma průsečíky t a v (reálními nebo imaginárními) tečny Tm s křivkou K a jest proto těmito pěti body dokonale určena.

Jelikož křivky K a L náležejí svazku křivek 2. stupně, jehož základními body jsou body u, ${}^2s$, t a v, možno tečnu v bodě ${}^1m$ křivky ${}^1M$ sestrojiti takto: Křivky tohoto svazku křivek 2. stupně určují v přímkách U a S základními body u a ${}^1s$ procházejících projektivné řady bodů v poloze perspektivné se nalézající (bod ${}^1m$ jest samodružným) a proto spojnice F bodů m' a m'', jež přímky S a U v křivce K určují, protínají se s tečnou T^1m v témž bodě x na tečně Tm s přímkou $O \equiv {}^2su$ také jednu křivku tohoto svazku představující.

4. Vzhledem k výtvarnému zákonu křivky ${}^1M$ a k sestrojení její tečny jest také možno užíti kinematické geometrie při sestrojení její středu křivosti. Jedná se o to, abychom k sestrojení rychlosti $\overline{{}^1m9}$, kterou se bod ${}^1m$ v tečně T^1m křivky ${}^1M$ pohybuje, sestrojili rychlost, kterou se tato tečna otáčí.**)

---

*) Bod u jest druhý průsečík přímky $s\,{}^1s$ křivkou K.

**) Rozpravy České Akademie: „Kinetický způsob sestrojování tečen a středů křivosti křivek 2. stupně“. Napsal Bedřich Procházka. III. ročník. Třída II., čís. 19. odst. 2.

Jelikož tečna T^1m stále prochází průsečíkem x tečny Tm a přímky $F \equiv m'm''$, jde nám jen o pohyb tohoto bodu x. Pohyb jeho jest závislý na pohybu otáčení tečny Tm a na pohybu přímky F.

Pohyb otáčení tečny Tm křivky M, jejíž střed křivosti o příslušný bodu m jest dán, odvodíme si na přímce $2n \perp Tm$ ze stanovené rychlosti $\overline{m2}$ bodu m v této tečně, spustíme-li s bodu m kolmici mn ke spojnici $\overline{o2}$ středu křivosti o s bodem 2. Úsečka $\overline{x16} \perp Tm$ omezená přímkou mn nám představuje rychlost, kterou se pohybuje bod x při tomto otáčení tečny Tm.

Podobně určíme rychlost bodu x při otáčení přímky F procházející v křivce K se pohybujícími body m' a m''.

Rychlost bodu m' v tečně Tm' sestrojené v tomto bodě ke křivce K byla již stanovena v délce $\overline{m'5}$. Zbývá tedy ještě stanoviti rychlost bodu m'' v tečně Tm''.

Pohyb tohoto bodu závislý jest na pohybu otáčení přímky U kol bodu u procházející bodem ${}^1m$, pohybujícím se v tečně T^1m stanovenou rychlostí $\overline{{}^1m9}$. Z rychlosti této odvodíme rychlost otáčení bodu ${}^1m$ přímky U, když přímku ${}^1m10 \perp U$ omezíme přímkou $9\,10$ rovnoběžnou s U. Z rychlosti té stanovíme rychlost $\overline{m''11}$ bodu m'' při otáčení téže přímky U, jestli přímku $\overline{m''11} \perp U$ omezíme přímkou $u10$. Přímkou $\overline{11\,12} \parallel U$ odvodíme si v tečně Tm'' v bodě m'' ke křivce K sestrojené hledanou rychlost $m''12$, kterou se bod m'' jakožto průsečík přímky U s tečnou Tm'' v této tečně pohybuje.

Z rychlosti $\overline{m5}$ bodu m' v tečně Tm' a rychlosti $\overline{m''12}$ bodu m'' v tečně Tm'' odvodíme si kolmé rychlosti $\overline{m'13}$ a $\overline{m''14}$, kterými se body tyto při otáčení přímky F pohybují tím, že omezíme přímky $m'13$ a $m''14$ kolmé k přímce F přímkami $5\,13$ a $12\,14$ rovnoběžnými s přímkou F. Spojnice $13\,14$ představuje pohyb otáčení přímky F a úsečka $\overline{x15} \perp F$ omezená touto přímkou $13\,14$ představuje rychlost bodu x při otáčení přímky F.

Z rychlosti $\overline{x15}$ a rychlosti $\overline{x16}$ dříve stanovené bodu x při otáčení tečny Tm a přímky F určíme rychlost $\overline{x17}$ tohoto bodu jakožto jejich průsečíku, vedeme-li $15\,17 \parallel F$ a $\overline{16\,17} \parallel Tm$, které se v bodě 17 protínají. Z této rychlosti odvodíme rychlost

$\overline{x18}$ kolmou k tečně T^1m, omezíme-li přímku $x18 \perp T^1m$ přímkou $\overline{17\,18} \parallel T^1m$.

Spustíme-li konečně s bodu 9 (na tečně T^1m ležícího) kolmici na přímku ${}^1m\,18$, protíná tato normálu v bodě ${}^1m$ křivky ${}^1M$ sestrojenou v hledaném středu křivosti o' této křivky.

O jedné větě pro racionální křivky třetího stupně.

Napsal **K. Petr.**

Budiž c_3 racionální křivka třetího stupně o dvou různých tečnách t_1, t_2 ve dvojném bodě. Tyto tečny nechť protínají přímku inflexních bodů v bodech A_1, A_2. Budiž k jakákoliv kuželosečka dotýkající se tečen t_1, t_2 v bodech A_1, A_2. Kuželosečka tato protíná c_3 v šesti bodech. Těchto šest bodů lze rozložiti ve dvě trojiny bodové B_1, B_2, B_3; B'_1, B'_2, B'_3. Označme za tím účelem inflexní body I_1, I_2, I_3. Zvolíme si kterýkoliv ze šesti bodů, ku př. B_1, a promítneme-li postupně ze tří inflexních bodů I_1, I_2, I_3 tento bod B_1 na kuželosečku k, dostaneme body B'_1, B'_2, B'_3 jedné trojiny a to jiné než té, ke které patří B_1. Podobný výrok lze učiniti ovšem též o B_2 a o B_3. Zvolíme-li si vhodně označení u zmíněných trojin, pak přímky

$$
\begin{array}{llll}
\overline{B_1B'_1},\ \overline{B_2B'_3},\ \overline{B_3B'_2} & \text{procházejí bodem} & I_1, & \\
\overline{B_1B'_3},\ \overline{B_2B'_2},\ \overline{B_3B'_1} & \quad\text{"} \qquad \text{"} & I_2, & \qquad \text{(I)} \\
\overline{B_1B'_2},\ \overline{B_2B'_1},\ \overline{B_3B'_3} & \quad\text{"} \qquad \text{"} & I_3. &
\end{array}
$$

Pojmenujeme dvě trojiny B_1, B_2, B_3; B'_1, B'_2, B'_3 takto určené trojinami sdruženými. Mezi svazek kuželoseček dotýkajících se tečen t_1, t_2 v bodech A_1, A_2 náleží jako jednoduchý případ kuželosečka k_0, jež se křivky c_3 dotýká ve třech bodech K_1, K_2, K_3 (bodech to zároveň, kde lze sestrojiti kuželosečku mající s křivkou c_3 šestibodový styk). Při této kuželosečce splývají obě trojiny bodové. Prochází pak tečna v K_1 ku c_3 bodem I_1, přímka $\overline{K_2K_3}$ inflexním bodem I_1 atd., kteréžto známé vztahy jeví se jakožto specielní případ věty (I).