Bohumil Bydžovský
Inflekční přímka kubické křivky racionálné

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 1, 1--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123442

Inflekční přímka kubické křivky racionálné.

Dr. B. Bydžovský.

Úvod.

Analytické studium unikursálných čar je usnadněno podstatně tou okolností, že souřadnice jejich lze vyjádřiti co racionálné funkce jednoho parametru;*) to má ten smysl geometrický, že lze body těchto čar uvésti ve vztah jedno-jednoznačný s body přímky nebo kuželosečky. A tato okolnost zase má za následek, že geometrické studium unikursálných čar je v mnohém směru snadnější než studium čar rodu vyššího než 0. Otázku o jedno-jednoznačných transformacích geometrických rozřešil všeobecně — ne ovšem způsobem čistě synthetickým — Cremona svým proslulým dílem; jeho theorie byla doplněna a zároveň zjednodušena větou, že každou Cremonovu transformaci lze nahraditi řadou transformací kvadratických.**)

I lze postupným užíváním kvadratické transformace na kuželosečku zkoumati vlastnosti čar stupně libovolně vysokého s touž všeobecností, jakou dovoluje užití všeobecné transformace Cremonovy. V tomto zjednodušení hodí se theorie těchto transformací zvláště dobře pro úvahy synthetické, kde nelze projednávati obecnou čáru stupně n-ho, nýbrž nutno znenáhla postupovati ve studiu čar zvláštních od stupně nižšího k vyššímu.

Kvadratickou nazýváme takovou jedno-jednoznačnou transformaci, při níž bodu odpovídá zase bod (obecně), přímce však kuželosečka.***)

---

*) Srv. řadu článků v minulém ročníku Čas.

**) Větu tu současně nalezli Clifford (Proc. math. Soc. 3), Nöther (Gött. Nachr. 1870; Math. Ann. 3) a Rosanes (Crelle's J. f. M. 73).

***) Lze ovšem úvahou reciprokou dojíti ke konstrukci kvadratické transformace, v níž přímce odpovídá přímka, bodu (jakožto středu svazku paprsků) kuželosečka (jakožto křivka obalená svazkem 2-ho stupně).

Kvadratický vztah dvou rovinných polí sestrojíme nejjednodušeji takto: volíme v jedné rovině tři body o_1, o_2, o_3, v druhé tři body o'_1, o'_2, o'_3 a přiřadíme projektivně svazek (o_1) (totiž o středu o_1) svazku (o'_1), podobně (o_2) atd., ale tak, aby paprsku $\overline{o_1 o_2}$ odpovídal paprsek $\overline{o'_1 o'_3}$, paprsku $\overline{o_2 o_1}$ paprsek $\overline{o'_2 o'_3}$ atd. Bližší úvaha ukáže, že vztah takto konstruovaný má tyto vlastnosti:

1. Každému bodu v obecné poloze odpovídá jediný bod.

2. Výjimku tvoří vrcholy obou třírohů právě zavedených, jež nazýváme hlavními; vrcholu jednoho z nich totiž odpovídají všechny body té strany druhého třírohu, která leží proti vrcholu stejně označenému, tedy na př. vrcholu o_1 strana $\overline{o'_2 o'_3}$ atd.

3. Přímce v obecné poloze odpovídá kuželosečka, jdoucí vrcholy příslušného třírohu; všeobecně odpovídá čáře st. n-ho čára st. $2n$-ho, mající v každém vrcholu třírohu bod n-násobný. Prochází-li čára původní některým vrcholem třírohu své roviny, sníží se stupeň čáry transformované o tolik jednotek, kolikráte čára oním vrcholem prochází.

Tuto všeobecnou transformaci*) lze v několika směrech specialisovati; k velmi jednoduché formě dospějeme, myslíme-li si, že obě přidružené roviny splynou, a oba hlavní třírohy padnou na sebe svými vrcholy stejně označenými. Pak svazku paprsků v o_1 odpovídá zase svazek o středu o_1, a sice tak, že paprsku $\overline{o_1 o_2}$ odpovídá paprsek $\overline{o_1 o_3}$, ať jej počítáme do kterékoli z obou rovin; z toho plyne, že oba svazky tvoří involuci.**) To je důležitá výhoda oproti transformaci všeobecné.

Transformace v tomto zjednodušeném tvaru užijeme na kuželosečku; čára transformovaná je racionálná čára st. 4-ho, mající v bodech o_1, o_2, o_3 body dvojné. Prochází-li kuželosečka

*) V jiném tvaru poprvé sestrojil tento vztah Steiner, k jehož jménu se zpravidla připíná synthetická theorie kvadratických transformací. V. Steiner „Systematische Entwicklung etc.“ 2. Th. § 59., kde zároveň vystižen již význam těchto transformací pro studium čar racionálných.

**) V tomto tvaru je kvadratická transformace totožna se vztahem, který obdržíme, přiřadíme-li bodu roviny bod k němu konjugovaný vzhledem ke svazku kuželoseček (v. na př. Küpper-Bobek: „Einl. in die proj. Geom.“ etc. nebo Reye „Geometrie der Lage“); sem spadá také ta transformace roviny, která vznikne otočením dvou svazků paprsků.

bodem o_1, rozpadne se tato čára stupně čtvrtého v čáru stupně třetího s dvojným bodem v o_1 a přímku $\overline{o_2 o_3}$. To je podklad pro studium racionálné čáry stupně třetího, jež je třídy všeobecně čtvrté, což je vyznačeno symbolem C_4^3.

Opírajíce se o tuto transformaci, snadno dokážeme větu, jež je základní pro theorii čar C_4^3:

1. Dvojice průseků čáry C_4^3 s paprsky svazku, jehož střed x leží na čáře, promítají se z dvojného bodu o_1 paprskovou involucí, jejíž jeden pár jsou obě tečny v dvojném bodě, a paprsky dvojné ty, které promítají dotyčné body obou tečen z bodu x k C_4^3 vedených.*)

Z této věty ihned vyplývá věta další:

2. Dotyčné body tečen, vedených postupně z jednotlivých bodů čáry C_4^3 k této čáře, promítají se z dvojného bodu páry paprskové involuce, jejíž dvojné elementy jsou obě tečné v bodě dvojném.

Problémem zvláště zajímavým je studium inflekčních bodů křivky C_4^3 a různých vztahů, jež s nimi souvisí. Theorie dospěla v té věci k těmto výsledkům:

Racionálná křivka st. 3-ho má obecně 3 body inflekční, z nichž jeden jen je reálný v případě, že dvojný bod je uzlový, všechny tři v případě, že dvojný bod je isolovaný. Je-li dvojný bod bodem úvratu, má křivka vůbec jediný bod inflekční.

Inflekční body křivky C_4^3 leží na přímce, kterou lze rovněž zváti inflekční. Důkaz této důležité věty vyplývá ihned z věty všeobecnější, že tečnové body tří bodů na přímce ležících opět leží na přímce. Tento důkaz, tak přirozený a jednoduchý, je potud neúplný, že nijak nás nepoučuje o poloze inflekční přímky vzhledem k ostatním bodům křivky a nepodává tedy nijaký návod, kterak sestrojiti inflekční přímku z elementů, které křivku C_4^3 určují. Chceme-li dospěti k takové konstrukci inflekční přímky, musíme voliti k důkazu věty svrchu uvedené postup jiný, při němž by stále byla patrna souvislost bodů inflekčních s ostatními body křivky. Tím způsobem podaří se nám nalézti, v čem tkví význačné postavení inflekční přímky; zároveň do-

*) V. na př. Em. Weyr: „Theorie d. mehrdeutigen geom. Elementargebilde“, Leipzig 1869 a jinde.

spějeme k mnoha větám, jež osvětlují některé stránky všeobecné theorie racionálných čar 3-ho st.

I. Konstrukce inflekční přímky.

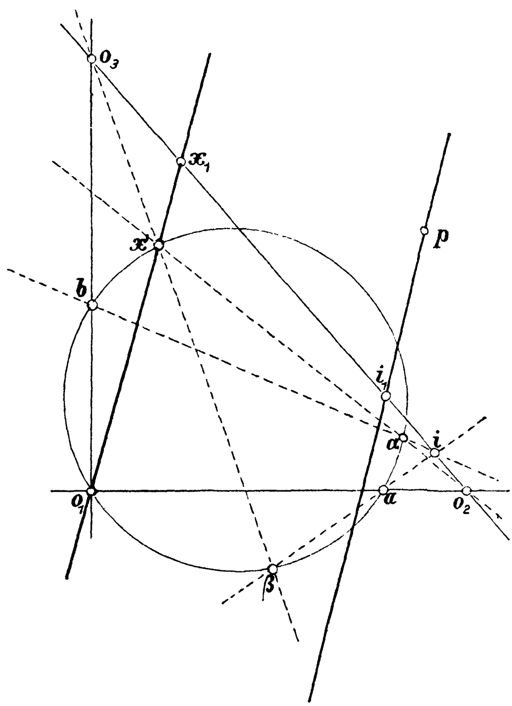
1. Vytkněme na C_4^3 dva libovolné body o_2, o_3 a zvolme je spolu s dvojným bodem o_1 za hlavní body kvadratické transformace Steinerovy o splývajících hlavních třírozích. Touto transformací přejde C_4^3 v kuželosečku K, jež prochází bodem o_1. Libovolnému bodu x na C_4^3 odpovídá určitý jediný bod x' na K, až na známé výjimky.

Oběma tečnám, které lze vésti z bodu x ke křivce, odpovídají v soustavě transformované obě kuželosečky, vedené body o_1, o_2, o_3, x' a dotýkající se kuželosečky K. Dotyčné body obou těchto kuželoseček obdržíme snadno jako dvojné body involuce, kterou na K vytíná svazek kuželoseček vedený body o_1, o_2, o_3, x'. Střed i této involuce leží na $\overline{o_2 o_3}$; najdeme jej, když z bodu o_1 i x' promítáme na K body o_2, o_3 (v. obr. 1.); tím vzniknou na K body a, b; α, β. Oba paprsky $\overline{a\beta}$, $\overline{\alpha b}$ pak se protínají na spojnici $\overline{o_2 o_3}$ v bodě i.

Když bod x' probíhá křivou řadu na K, mění se poloha bodu i na $\overline{o_2 o_3}$. A ježto body x' a β tvoří involuci, bod i pak opisuje řadu perspektivnou s řadou bodů β, vychází odtud, že řada bodů i je projektivná s řadou bodů x'. Zároveň probíhá polára bodu i, jež je spojnicí dvojných bodů indukované involuce, svazek projektivný s řadou bodů i a tedy také bodů x'. Střed tohoto svazku p je ovšem pól přímky $\overline{o_2 o_3}$; můžeme jej vyznačiti jako průsek kterýchkoli dvou paprsků svazku, na př. těch, z nichž jeden jde bodem o_2, druhý bodem o_3.

2. Nazveme-li konjugovanými takové dva body na C_4^3, jež mají společný bod tečnový, můžeme, užijeme-li na kuželosečku a celé rovinné pole kvadratické transformace, vysloviti větu: Kuželosečky, vedené dvojným bodem, dvěma pevnými body (totiž o_2, o_3) a vždy jedním párem bodů konjugovaných na C_4^3, tvoří svazek, jehož čtvrtý bod base (transformovaný bod p) leží na průseku těch spojnic bodů konjugovaných, z nichž jedna prochází jedním, druhá druhým bodem daným.

Budeme míti příležitost, užíti této věty, poněkud zobecněné, zajímavým způsobem v pozdějších kapitolách.



Obr. 1.

3. Svazek, promítající z bodu o_1 body x' kuželosečky, vytvoří se svazkem polár o středu p opět kuželosečku, kterou nazveme S. Ta prochází bodem o_1 a má v obecném případě v tomto bodě tečnu různou od tečny kuželosečky K; má tedy s K ještě tři body společny. Tyto tři body, z nichž je reálný buď jeden neb všechny tři, odpovídají, jak patrno, inflekčním bodům na C_4^3. Je-li totiž y jeden z průseků, pak jedna z obou kuželoseček svazku o basi o_1, o_2, o_3, y dotýká se kuželosečky K právě v bodu y, což znamená, přeneseno na C_4^3, že s tečnou, v tomto bodě vedenou. splyne ještě jedna tečna a stane se tedy inflekční. Nazveme x_1 průmět bodu x' z o_1 na $\overline{o_2 o_3}$, i_1 pak průsek poláry

bodu i s $\overline{o_2 o_3}$. Řada bodů x_1 je projektivná s řadou bodů i. Když $x_1 \equiv o_2$, jest $x' \equiv a$, $a \equiv o_1$; $\overline{ab} \equiv \overline{o_1 b}$; příslušný bod i je pak v o_3. Podobně když $x_1 \equiv o_3$, je $i \equiv o_2$. Je tedy o_2, o_3 jeden pár soumístných řad projektivných, a sice involutorní; tvoří tedy x_1, i na $\overline{o_2 o_3}$ involuci.

4. Majíce toto na paměti, zvolme na C_4^3 za o_2, o_3 dva body konjugované a transformujme na kuželosečku K. Páry konjugovaných bodů na C_4^3 tvoří necentrální involuci *), jejíž dvojné body jsou oba body nekonečně blízké dvojnému bodu čáry, t. j. body, jež se z tohoto bodu promítají oběma tečnami. To přeneseno na K znamená, že paprsky $\overline{o_1 o_2}$ a $\overline{o_1 o_3}$ oddělují harmonicky oba paprsky, jimiž se promítají z bodu o_1 průseky (ať reálné či ne) kuželosečky s $\overline{o_2 o_3}$ **), jinými slovy, body o_2, o_3 jsou sdružené póly vzhledem ke kuželosečce. Ježto bodům o_2, o_3 odpovídá na K dvojice a, b, musí bod p ležeti na spojnici $\overline{ab}$. Místo obr. 1. kreslíme tedy v tomto případě obr. 2.: zvolíme libovolně bod o_1, o_2 a směr od o_1 k o_3; kreslíme kuželosečku K bodem o_1; spojíme a, b. Polára bodu o_2 musí jíti bodem p; touto podmínkou je p stanoveno. Poněvadž pak polára bodu o_2 jde také bodem o_3, je i tento bod stanoven. Tím máme úplně sestrojen systém vzniklý transformací při oné zvláštní volbě hlavních bodů.

Kuželosečka S, o níž byla nahoře řeč, prochází v tomto zvláštním případě oběma body o_2, o_3. Neboť pro $x' \equiv a$ je $i \equiv o_3$ a tedy $i_1 \equiv o_2$. I protnou se dva paprsky svazků kuželosečku S vytvořujících v bodě o_2, podobně v bodě o_3. Ježto kuželosečce S jdoucí body o_2, o_3 odpovídá v systému čáry C_4^3 přímka, dokázali jsme tímto způsobem větu napřed uvedenou, že inflekční body čáry C_4^3 leží na přímce, kterou nazveme inflekční a označíme J.

5. V souhlase s tím, co bylo hned zpředu řečeno, nalezneme nyní snadno souvislost této přímky s ostatními body čáry.

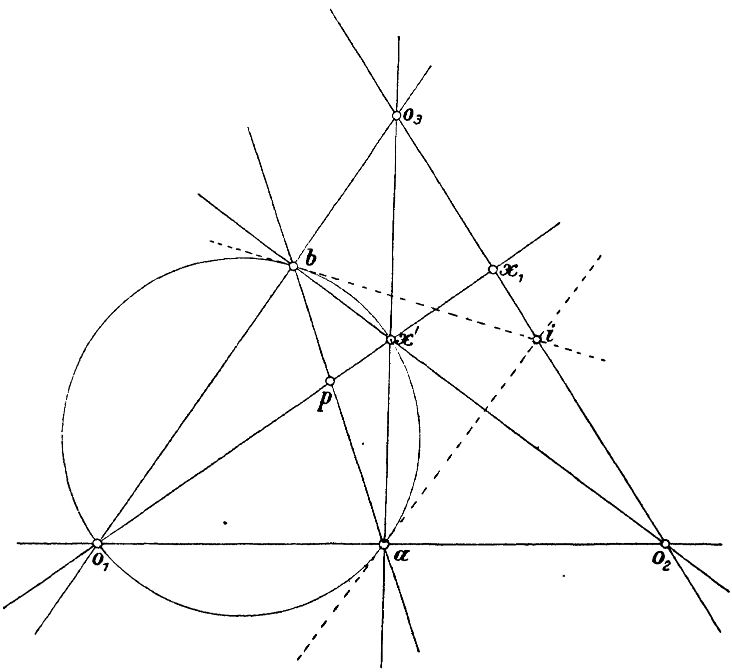
Hledejme polohu toho bodu x' na K, jenž je transformovaný společný bod tečnový obou bodů o_2, o_3 na C_4^3. Najdeme střed involuce, jejíž dvojné body jsou a, b, jež odpovídají

---

*) V. úvod, věta 2.

**) Tečnám C_4^3 v bodě o_1 odpovídají totiž, jak poučí jednoduchá úvaha, spojnice bodu o_1 s oběma průseky K s $\overline{o_2 o_3}$.

bodům o_2, o_3. Tento střed i leží na $\overline{o_2 o_3}$ tam, kde se protínají obě tečné kuželosečky K v bodech a, b vedené. Spojnice $\overline{ai}$ protne kuželosečku po druhé v známém bodu β; v našem případě $\beta \equiv a$, což je jen tak možné, když hledaný bod x' leží na K tam, kde ji protíná $\overline{ao_3}$. Leží ovšem také na $\overline{bo_2}$ (v. obr. 2.).

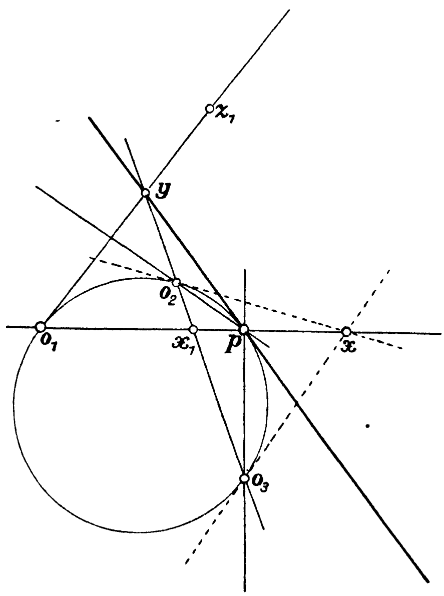


Obr. 2.

Ihned odtud následuje, že musí bod p ležeti na spojnici $\overline{o_1 x'}$, ježto je to třetí diagonálný roh úplného čtyrrohu o_1, a, x', b. Tím je konstrukce bodu x' nalezena. Ježto tedy paprsku $\overline{o_1 x'} \equiv \overline{o_1 p}$ svazku (o_1) odpovídá ve svazku (p) paprsek $\overline{pa} \equiv \overline{pb} \equiv \overline{ab}$, vychází odtud, že kuželosečka S, jdoucí body o_1, o_2, o_3, p, má v bodě p za tečnu přímku $\overline{ab}$, čímž tato kuželosečka je určena.

Přejděme nyní zpětnou transformací k čáře C_4^8. Bodům paprsku $\overline{o_1 x'}$, totiž o_1, p, x', x_1, jež tvoří harmonickou čtveřinu, odpovídá harmonická čtveřina na paprsku $\overline{o_1 x}$, v níž ovšem body o_1, x_1 vymění své místo. Tětivě $\overline{ab}$ odpovídá kuželosečka, jež jde body o_1, o_2, o_3 a má v bodech o_2, o_3 tečny společné s čarou. Ježto za body o_2, o_3 jsme vzali zcela libovolnou dvojici konjugovaných bodů, můžeme vysloviti větu:

Inflekční přímka čáry C_4^3 dotýká se všech kuželoseček, jež procházejí dvojným bodem a jednou dvojicí konjugovaných bodů,



Obr. 3.

v nichž mají tečné s čarou společné. Dotyčný bod přímky J leží na paprsku, jenž promítá z bodu dvojného bod x, společný to bod tečnový příslušné dvojice konjugovaných bodů. Onen dotyčný bod pak odděluje vzhledem k bodu dvojnému harmonicky bod x a ten bod, v němž uvedený paprsek protíná spojnici příslušné dvojice konjugovaných bodů.

Odtud ihned vychází jedna konstrukce přímky J. Z libovolného bodu x vedeme k čáře tečné; dotyčnými body o_2, o_3

a bodem o_1 vedeme kuželosečku, jež v obou bodech o_2, o_3 má s čarou společné tečny. V průseku p spojnice $\overline{o_1 x}$ s kuželosečkou zřiďme tečnu, která je totožna s přímkou J (v. obr. 3.).

Tuto konstrukci lze však formulovati ještě jinak: Z libovolného bodu x vedeme obě tečné, spojíme dotyčné body o_2, o_3; na $\overline{o_1 x}$ tím vznikne průsek x_1. Stanovíme bod p harmonicky sdružený s o_1 vzhledem k x, x_1 a najdeme paprsek harmonicky sdružený s $\overline{o_1 p}$ vzhledem k $\overline{p o_2}$, $\overline{p o_3}$. Tento paprsek je hledaná přímka J.

Budiž ještě poukázáno k tomu, že konstrukci přímky J lze provésti lineárně. V jednom z bodů, určujících C_4^3, na př. o_2, vedeme tečnu, stanovíme průsek x s čarou, vedeme druhou tečnu k čáře a máme bod o_3. Pak dle předešlého. Jak patrno, jsou to vesměs konstrukce lineární.

II. Vztahy plynoucí z konstrukce inflekční přímky.

1. Pro stručnost budu v dalším nazývati spojnici konjugovaných bodů tětivou příslušnou k společnému tečnovému bodu obou konjugovaných; tětiva protne C_4^3 ještě v jednom bodu, jejž budu nazývati třetím průsekem tětivy.

2. Tětiva $\overline{o_2 o_3}$ protne přímku J v bodě y takovém, že y, o_2, x_1, o_3 je čtveřina harmonická. Paprsek $\overline{o_1 y}$ protne čáru v bodě z_1. Je ihned patrno, že je to tečnový bod bodu x, ježto body o_2, o_3 jsou dvojné body involuce, kterou na C_4^3 indukuje bod x*) a jejímž jedním párem je x, z_1 (obr. 3.). Je to totiž ta dvojice, kterou na C_4^3 vytíná ten paprsek bodem x vedený, který splývá s tečnou v tomto bodu. Z bodu z_1 lze vésti ještě jednu tečnu; příslušný dotyčný bod x' tvoří s x dvojici konjugovaných bodů. Tětiva příslušná bodu x' musí také jíti bodem y. Kdybychom totiž podkladem konstrukce učinili bod x', musíme dojíti k téže přímce J, ale také k témuž bodu z_1, tedy i k témuž bodu y. Najdeme bod x' snadno, kreslíme-li tětivu příslušnou bodu z_1. Ta jde bodem x a bodem z'_1, jenž harmonicky odděluje o_1, y vzhledem k z_1. Spojnice $\overline{z'_1 x}$ protne J v bodě z. Z předchozího víme, že body z'_1, z oddělují harmonicky oba body x, x',

*) V. úvod věta 1.

čímž x' nalezeno. Je ihned patrno, že x' leží na tětivě příslušné bodu x; z téhož důvodu musí tedy ležeti x na tětivě bodu x', t. j. tato tětiva jest $\overline{yx}$.*)

Předchozí výsledky shrneme ve větu: Tětivy příslušné dvěma konjugovaným bodům protínají se na spojnici bodu dvojného se společným tečnovým bodem obou bodů. Společný průsek leží na přímce inflekční, a čtyři paprsky jím procházející tvoří harmonickou čtveřinu; tětiva pak, příslušná jednomu z bodů konjugovaných, prochází druhým bodem konjugovaným.

Kdybychom dále sledovali tyto vztahy, došli bychom k dalším větám, jež vesměs vyjadřují vlastnosti inflekční přímky, ale většinou by to byly jen jiné formulace základní věty právě vyslovené. Některé z nich jsou nicméně důležité, a setkáme se s nimi v dalších výsledcích.

3. Předchozí věty lze užíti zajímavým způsobem pro zjednodušení konstrukce křivky, pokud se jedná jen o to, zjednati si značný počet bodů i s tečnami.

K tomu cíli odvodíme jistou větu pomocnou.

Z věty, že tečnové body tří bodů na přímce ležících opět leží na přímce, obrácením ihned obdržíme větu: Tři páry konjugovaných bodů, jichž tři tečnové body leží na přímce, seřadí se čtyřikráte po třech na čtyřech přímkách a tvoří šest rohů úplného čtyrstranu, vytvořeného těmito přímkami.

Diagonálné strany tohoto čtyrstranu jsou ovšem příslušné tětivy. V případě, že dva z oněch tečnových bodů tvoří dvojici bodů konjugovaných, procházejí dvě z oněch diagonál těmito body konjugovanými, třetí pak se protíná s přímkou bodů tečnových na přímce inflekční. V tomto tvaru uvedené věty užijeme.

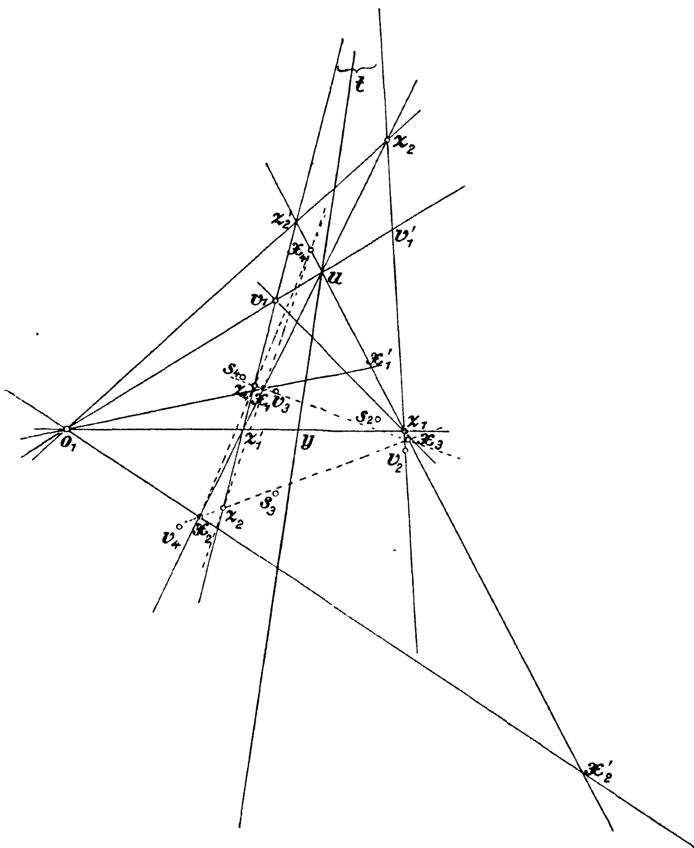
4. Předpokládejme, že máme doplniti křivku C_4^3, jež je dána dvojným bodem o_1, dvojicí konjugovaných bodů x_1, x_2, společným bodem tečnovým z_1 a tečnou v tomto bodě. Těmito podmínkami je čára určena, ježto

$$3 + 2 + 2 + 2 = 9;$$

body konjugované totiž platí v tomto případě každý za dva, ježto je známa tečna.

*) Věta poslední je známa. V. Binder. „Unicursale Plancurven etc.“ Důkaz ovšem jiný.

Sestrojíme především přímku J. Průsek tečné v bodě z_1 se spojnicí o_1u — je-li $u \equiv (J, \overline{x_1x_2})$ — je v_1, tečnový bod bodu z_1. Bod z_2, konjugovaný se z_1, obdržíme jakožto průsek



Obr. 4.

tětivy $\overline{x_1x_2}$ se $\overline{z_1v'_1}$, kde v'_1, je bod na $\overline{o_1v_1}$ harmonicky sdružený s v_1 vzhledem k o_1, u (v. obr. 4.).

Spojnice $\overline{z_1z_2}$ protne čáru po třetí v bodě v_2, konjugovaném k v_1, a J v bodě t. Dejme tomu, že jsme nalezli v_2, rovněž oba dotyčné body z_3, z_4 tečen z v_2 vedených, jež ovšem leží na spojnici $\overline{v_1 t}$ (na které také leží body z'_1, z'_2, má-li z'_1 vzhledem k z_1 týž význam, jako v'_1 vzhledem k v_1), a že jsme nalezli také dotyčné body obou tečen, vedených z bodu z_2, x_3, x_4, které nutně leží na $\overline{uz_1}$.

Dvojice konjugovaných bodů z_3, z_4; x_1, x_2; x_3, x_4 mají za společné body tečnové body v_2, z_1, z_2, jež leží na přímce. Vzhledem k větě nahoře odvozené usoudíme, že $\overline{x_1 x_3}$, $\overline{x_2 x_4}$ musí se protínati v jednom, $\overline{x_1 x_4}$, $\overline{x_2 x_3}$ ve druhém z bodů z_3, z_4. Je ihned patrno, známe-li dvě z těchto tří dvojic konjugovaných bodů, nalezneme třetí. Body x_1, z'_1, x_2, u, jež tvoří čtveřinu harmonickou, promítněme z bodu x_3 na $\overline{z_3 z_4}$; obdržíme harmonickou čtveřinu $z_3 z'_1 z_4 z'_2$, čímž jsme dokázali důležitou větu: Dvě dvojice konjugovaných bodů, příslušných co dotyčné body dvěma bodům, jež samy tvoří dvojici bodů konjugovaných, promítají se z bodu dvojného dvěma dvojicemi paprsků, jež se oddělují harmonicky.

5. Na základě předchozího můžeme pokračovati v doplňování naší čáry, na níž známe mimo body dané také bod z_2. Snadno nyní sestrojíme body x_3, x_4. Tyto body leží na $\overline{uz_1}$ a oddělují harmonicky jednak x'_1, x'_2, jednak u, z'_2. Tím x_3, x_4 nalezeno jednoduchou konstrukcí kvadratickou. Pak $z_3 \equiv (\overline{x_1 x_3}, \overline{x_2 x_4})$, $z_4 \equiv (\overline{x_2 x_3}, \overline{x_1 x_4})$. Spojnice $\overline{z_3 z_4}$ protíná J v témže bodě t jako $\overline{z_1 z_2}$; tečnový bod společný těchto dvou bodů, v_2, nalezneme na tětivě $\overline{z_1 z_2}$ z podmínky, že v_2, z'_3, t, z'_4 tvoří harmonickou čtveřinu. Z bodů z_1, z_2, z_3, z_4 najdeme v_3, v_4 (kde význam indexů je již patrný dle analogie), jako jsme z_3, z_4 nalezli z x_1, x_2, x_3, x_4. Pak najdeme tečnový bod dvojice v_1, v_2, jejž nazveme s_1; podobně s_2 k dvojici v_3, v_4. A tak postupujeme dále.

Je patrno, že při udaném zvláštním určení čáry, vykonáme-li jedinou kvadratickou konstrukci (nalezení bodů x_3, x_4), sestrojujeme pak postupně body tečnové a dotyčné střídáním dvou jednoduchých konstrukcí lineárných.

(Na základě této konstrukce je doplněn obr. 4. Pomocné paprsky jsou vynechány. Ačkoliv konstrukce jen dvakráte byla opětována, lze si učiniti o průběhu křivky dosti dobrou představu. Body jdou za sebou na čáře v tomto sledu: z_2, x_4, v_1, s_4, z_4, x_1, v_3, s_2, z_1, x_3, v_2, s_3, z_3, x_2, v_4, s_1. Poslední bod není kreslen, poněvadž padne poněkud daleko.)

Ke všem bodům známe zároveň tečné; a sice u bodů s indexy 1, 2 jsou známy všechny tři tečné, jež těmi body lze vésti; u bodů s indexy 3, 4 jen jedna. Ovšem i k těm bychom nalezli příslušné ostatní tečny i s body dotyčnými jednoduchou kvadratickou konstrukcí.

6. Kdyby C_4^3 byla určena zcela obecně, bodem dvojným a šesti dalšími body, musili bychom napřed na základě transformace, nebo konstrukcí svazku paprsků a s ním projektivné involuce paprskové nalézti ty elementy, jež naše konstrukce předpokládá. To by se stalo lineárným způsobem.

Ježto x_1, x_2; x_3, x_4 jsou dvojice téže involuce, může z těchto dvojic býti jen jedna reálná v případě, že tato involuce je hyperbolická, t. j. dvojný bod křivky uzlový, neboť paprsky o_1 (x_1, x_3, x_2, x_4) mají tvořiti čtveřinu harmonickou. V tom případě tedy střídavě dostaneme dvojice reálné a imaginárné; to ovšem konstrukci nebude na závadu. Nicméně se hodí tato konstrukce nejlépe pro případ čáry s bodem isolovaným.

III. **Inflekční přímka a tětivy křivky.**

1. Z předešlého asi již dostatečně vysvitlo, že přímka inflekční je především v úzkém vztahu s těmi přímkami, které jsme nazvali tětivami křivky. Tuto souvislost vystihneme zvláště určitě větou, již nyní odvodíme.

Především je patrno, že bodem na inflekční přímce lze vésti obecně dvě tětivy křivky. To plyne ihned z věty, která je jen jinou formulací věty dokázané dříve (II. 2):

Libovolným bodem a na přímce inflekční lze vésti dvě tětivy křivky; tyto oddělují harmonicky přímku inflekční od bodu dvojného.

Obě tětivy obdržíme takto: z bodu o_1 promítneme bod a do bodu x na C_4^3; nalezneme dotyčné body obou tečen z x vedených, na př. y_1, y_2, pak $\overline{ay_1}$, $\overline{ay_2}$ jsou hledané tětivy.

Má-li křivka uzlový bod a je-li b průsek jedné tečny v uzlovém bodu s J, lze tímto bodem vésti jedinou tětivu, právě onu tečnu.

2. Z libovolného bodu x_1 na C_4^3 lze rovněž vésti dvě tětivy; jednak tu, jež spojuje bod x_1 s jeho bodem konjugovaným x_2, jednak tu, jež obsahuje dotyčné body tečen z bodu x_2 vedených (což plyne z věty II. 2.). Je-li y společný bod tečnový dvojice x_1, x_2, průsek J s $\overline{o_1 y}$ pak u a y' bod harmonicky sdružený s y vzhledem k o_1, u, jsou obě tětivy bodem x_1 vedené $\overline{x_1 u}$ a $\overline{x_1 x_2} \equiv \overline{x_1 y'}$ a platí tedy o obou těchto tětivách věta, že spojnice bodu s bodem dvojným a jedna z obou tětiv harmonicky oddělují druhou tětivu (totiž $\overline{x_1 x_2}$) a tečnu v bodu x_1 ($\equiv \overline{x_1 y}$).

Ježto jedna z obou tětiv, totiž $\overline{x_1 x_2}$, je vždy reálná, musí býti i druhá reálná. Každým bodem na čáře jdou tedy dvě reálné tětivy. Výjimku tvoří ty body, jimiž lze vésti tětivu jedinou.

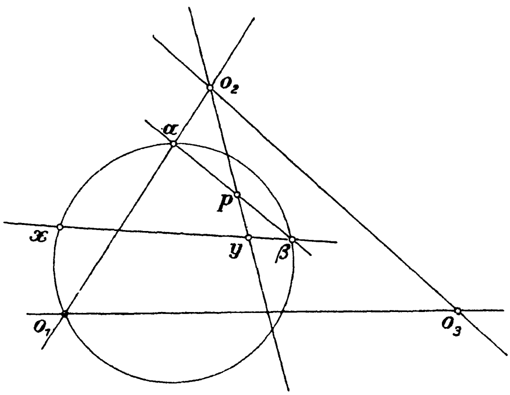
Je-li t takový bod a t' jeho konjugovaný, pak musí $\overline{tt'}$ býti zároveň tětivou příslušnou bodu t'. Ale spojnice dotyčných bodů obou tečen z bodu daného vedených prochází bodem daným jen tehdy, je-li tento bod inflekční. Bod t pak je jediný bod dotyčný, inflekčnímu bodu příslušný. Jsou tedy na čáře tři body, jimiž lze vésti jen jednu tětivu této čáry; tou je zde tečna z bodu inflekčního vedená.

3. Všechny výsledky dosud uvedené zdají se nasvědčovati tomu, že všechny tětivy čáry C_4^3 obalují kuželosečku, jež protíná J v bodech, v níž ji protínají obě tečné v bodě dvojném, a která protíná čáru ve třech uvedených bodech, majíc tam s ní tečnu společnou.

Vskutku je tomu tak, jak nás přesvědčí jednoduchý důkaz.

4. Užijeme k tomu cíli věty dříve uvedené v odst. I. 2. Oba pevné body, jež určují svazek, o němž je v oné větě řeč, zvolme za hlavní body transformace o_2, o_3 spolu s bodem o_1. V systému kuželosečky odpovídá onomu svazku svazek polár, jehož střed je pól p přímky $\overline{o_2 o_3}$. Spojnice $\overline{o_2 p}$ a $\overline{o_3 p}$ jsou ovšem dvě tětivy jdoucí oběma body, tak že transformovaný bod p můžeme definovati jako průsek těch dvou tětiv, jež jdou bodem o_2 a bodem o_3, ale na nichž tyto body nenáležejí do dvojice konjugovaných bodů. Tím je určen čtvrtý bod base uvedeného svazku kuželoseček.

Jestliže podržíme bod o_2 za pevný bod base, za druhý však béřeme postupně jiný a jiný bod x čáry, mění i čtvrtý bod base svou polohu, zůstává však stále na tětivě bodem o_2 vedené, opisuje tedy přímou řadu bodovou. Poněvadž čtvrtý bod base musí zároveň ležeti na tětivě vedené bodem x, je tato řada totožna s řadou, ve které pevnou tětivu protínají všechny ostatní tětivy.



Obr. 5.

V soustavě transformované (v. obr. 5.) odpovídá každému svazku kuželoseček, o jakých zde mluvíme, zase svazek body *) o_1, o_2, x a bodem čtvrtým, jenž leží na $\overline{o_2 p}$. Při tom vytíná tento svazek na kuželosečce K (transformované C_4^3) involuci bodovou, jež odpovídá involuci bodů konjugovaných, tedy involuci indukovanou bodem p, kde, jak víme, bod p je pól přímky $\overline{o_2 o_3}$. Avšak čtvrtý bod base svazku, který jde body o_1, o_2, x a vytíná na K involuci o středu p, snadno najdeme. Nazveme jej y; je-li a průsek K s $\overline{o_1 o_2}$, β průsek K s $\overline{xy}$, musí $\overline{a\beta}$ procházeti bodem p (dle známé konstrukce středu involuce, ve které svazek protíná pevnou kuželosečku); bod y tedy najdeme tak, že vedeme $\overline{ap}$, tím obdržíme β, a spojnice $\overline{x\beta}$ protne $\overline{o_2 p}$ v hledaném bodu y. Když x probíhá křivou řadu na kuželosečce, je bod β pevný a y opisuje na $\overline{o_2 p}$ řadu projektivní s řadou bodů x a tedy také se svazkem, jenž promítá z o_1 body x.

---

*) Označuji body transformované stejně jako původní.

Zpětnou transformací obdržíme tedy pro C_4^3 větu: Všechny tětivy čáry protnou pevnou tětivu v řadě bodové projektivné s křivou řadou, již vytvoří třetí průseky těchto tětiv (t. j. se svazkem, jenž z bodu o_1 tyto průseky promítá).

Každé dvě tětivy jsou tedy proťaty všemi ostatními tětivami ve dvou řadách projektivných, z čehož následuje, že tyto tětivy obalují kuželosečku, čímž domněnka svrchu pronesená potvrzena. Připomínám ještě, že důkaz by zůstal týž, i kdyby p nebyl pólem přímky $\overline{o_2 o_3}$; vskutku také v celém důkazu této okolnosti ani nebylo použito.

Kdyby tedy bod p ležel libovolně, dokázali bychom, že kuželosečky vedené body o_1, o_2, o_3 a vždy dvojicí bodové involuce na K indukované bodem p protínají $\overline{o_2 p}$ v řadě projektivné se svazkem (p). Odtud transformací: spojnice dvojic libovolné involuce bodové na C_4^3 protínají dvě pevné spojnice ve dvou řadách projektivných (týmž postupem, jako prve). Tím jsme však dokázali větu:

Spojnice dvojic bodové involuce obalují kuželosečku (vyjma případ, že jde o involuci centrálnou).*)

Věta předchozí pak je ovšem jen specialisace této zde.

5. Připomeneme-li si, že každé dvě tečny z bodu na inflekční přímce ke kuželosečce tětiv vedené oddělují harmonicky tuto přímku od bodu dvojného, dojdeme k větě, jež nejurčitěji vyjadřuje souvislost inflekční přímky s tětivami:

Inflekční přímka je polárou dvojného bodu vzhledem ke kuželosečce tětiv.

6. Obě tečné v bodu dvojném jsou zároveň tečnami této kuželosečky. Dvě konjugované poláry bodem o_1 vedené promítají na čáře dva body konjugované, ježto tyto body jsou harmonicky děleny tečnami v bodě dvojném. Na základě této věty nalezneme na tětivě bod, v němž se tětiva kuželosečky dotýká.

Buďtež c_1, c_2 dva body konjugované; $\overline{c_1 c_2}$ je tedy jedna tečná vedená bodem c_2 ke kuželosečce; druhá nechť se jí dotýká

---

*) Tuto větu uvádí již E. Weyr, l. c., jeho důkaz však je neúplný; dokazuje totiž jen, že každým bodem C_4^3 lze vésti dvě spojnice dvojic involuce, ne však, že lze tak učiniti každým bodem roviny.

v bodě x. Tato druhá tečná obsahuje body b_1, b_2, v nichž se čáry dotýkají tečné z c_1 vedené. Paprsek $\overline{b_1 b_2}$ protne J v bodě b, $\overline{o_1 c_1}$ pak v bodě c'_1, a čtveřina c'_1, b_1, b, b_2 je harmonická. Tedy je také harmonická čtveřina c_2, b_2, x, b_1, neboť tyto body jsou konjugované póly bodů předešlé čtveřiny.

Tím je dokázána věta: Tětiva dotýká se kuželosečky v bodě, jenž je harmonicky sdružen s třetím průsekem tětivy vzhledem k oběma konjugovaným bodům.*)

7. Je patrno, že lze užíti kuželosečky tětiv vhodným způsobem jako pomůcky ke konstrukci; rovněž bylo by zajímavo, uvažovati různé tvary kuželosečky tětiv, zvláště v tom případě, kdy inflekční přímka je v nekonečnu. To by nás však zavedlo příliš daleko. Obrátíme se ještě k jednomu užití těch vět, jež jsme o inflekční přímce nalezli.

IV. Konstrukce C_4^3 z elementů inflekčních.

1. Mezi elementy, danými k určení čáry, může býti jeden nebo několik bodů inflekčních. Abychom mohli sledovati konstrukci v tom případě, odvodíme ještě některé vztahy, v nichž hraje úlohu přímka J.

Zavedeme si přehledné označení:

o_1, jako dosud, bod dvojný;
J spojnice bodů inflekčních;
i_1, i_2, i_3 body inflekční;
J_1, J_2, J_3 tečné inflekční;
T_1, T_2, T_3 tečné vedené z bodů inflekčních k čáře;
t_1, t_2, t_3 dotyčné body těchto tečen;
T'_1, T''_1; T'_2, T''_2; T'_3, T''_3 tečné z těchto bodů vedené;
S_1, S_2, S_3 tětivy těchto tečen.

2. Vedeme-li obě tečné v jednom bodě inflekčním, na př. i_1, jest dotyčný bod jedné z nich zase i_1, druhé pak t_1. Tětiva obou tečných z t_1 vedených, totiž S_1, prochází tedy dle věty dříve uvedené bodem i_1.

*) Obdobná věta platí o čáře st. 3-ho obecné, v. Schröter „Die Theorie der ebenen Curven 3er Ordnung“, Leipzig 188?.

Uvažme dále, že body i_1, i_2, i_3 leží na přímce a že dotyčné body tečných z nich vedených musí ležeti po třech na čtyřech paprscích. Dvojice dotyčných bodů jsou: i_1, t_1; i_2, t_2; i_3, t_3. Víme, že i_1, i_2, i_3 leží na přímce. I musí na $\overline{i_1 t_2}$ ležeti t_3, podobně na $\overline{i_2 t_1}$ t_3 a na $\overline{i_3 t_1}$ t_2. Všeobecně: spojnice $\overline{t_\alpha t_\beta}$ prochází bodem i_γ, kde α, β, γ značí číslice 1, 2, 3 vzaté v libovolném pořádku.

Bodem inflekčním i_1 procházejí tedy tyto paprsky, počtem šest:

$$\overline{o_1 i_1},\ J,\ J_1,\ \overline{i_1 t_1},\ S_1,\ \overline{t_2 t_3}.$$

Obdobně bodem i_2 a i_3.

3. Mezi těmito paprsky existují jisté vztahy. Především je patrno, že $\overline{o_1 i_1}$, S_1, J, $\overline{i_1 t_1}$ tvoří harmonickou čtveřinu.

Víme dále (III. 2), že obě tětivy bodem vedené, tečna v něm a spojnice s bodem dvojným tvoří harmonickou čtveřinu. Jednou z oněch tětiv je zde T_1; tvoří tedy $\overline{o_1 i_1}$, J_1, S_1, T_1 harmonickou čtveřinu.

Další vztah nalezneme, transformujeme-li C_4^3 na kuželosečku vezmouce o_1, i_1, t_1 za body hlavní. Jak se poloha jednotlivých bodů a přímek vzhledem ke kuželosečce jeví, ukazuje obr. 6. (K vůli jednoduchosti značíme vše, jako na C_4^3.) Je ihned patrno, že $\overline{i_1 t_1}$ a S_1 harmonicky oddělují J a $\overline{t_2 t_3}$. Na čáře C_4^3: paprsky $\overline{o_1 i_1}$, J, S_1, $\overline{t_2 t_3}$ tvoří čtveřinu harmonickou.

I máme v bodě i_1 tyto tři čtveřiny harmonické:

1. $\overline{o_1 i_1}$, S_1, J, $\overline{i_1 t_1}$
2. $\overline{o_1 i_1}$, J_1, S_1, $\overline{i_1 t_1}$
3. $\overline{o_1 i_1}$, J, S_1, $\overline{t_2 t_3}$.

Z druhého a třetího vztahu plyne, že šest paprsků v bodě inflekčním tvoří involuci; dvojné její body jsou $\overline{o_1 i_1}$, S_1; páry pak J_1, $\overline{i_1 t_1}$; J, $\overline{t_2 t_3}$.

Najděme paprsky, které v této involuci jsou přidruženy paprskům čtveřiny prvé. Čtveřina tím vzniklá je rovněž harmonická. Tím nabýváme čtvrtého vztahu harmonického:

4. $\overline{o_1 i_1}$, S_1, $\overline{t_2 t_3}$, J_1.

Obdobně ovšem v bodech i_2, i_3.

4. Můžeme ještě najíti některé vztahy mezi těmito šesti paprsky v různých bodech inflekčních.

Protněme spojnici $\overline{o_1 t_1}$ oběma čtveřinami harmonických paprsků v i_2 a v i_3:

$$\overline{o_1 i_2},\ \overline{t_1 t_3},\ S_2,\ J;\ \overline{o_1 i_3},\ \overline{t_1 t_2},\ S_3,\ J.$$

Vzniknou dvě harmonické čtveřiny bodů na $\overline{o_1 t_1}$; ty mají společné body o_1, t_1 a průsek $\overline{o_1 t_1}$ s J. Jsou tedy obě čtveřiny totožné, to znamená:

Tětivy S_α, S_β protínají se na spojnici $\overline{o_1 t_\gamma}$.

Postupem zcela podobným dokážeme ze vztahu 1., že také $\overline{i_\alpha t_\alpha}$, $\overline{i_\beta t_\beta}$ se protínají na $\overline{o_1 t_\gamma}$, a ze vztahu 2., že J_α, J_β se protínají na $\overline{o_1 t_\gamma}$.

Poslední věta je zvláště zajímavá; praví, že dvě inflekční tečny se protínají na spojnici dotyčného bodu tečné, z třetího inflekčního bodu vedené, s bodem dvojným.

Nalezených vztahů užijeme v následujícím ke konstrukci čáry v případě, že je dán jeden nebo několik bodů inflekčních.*)

5. Předpokládejme za prvé, že je dán jeden bod inflekční i_1 se svou tečnou J_1.**)

Přímku J lze v tom případě snadno konstruovati. Najdeme (lineárnou konstrukcí) bod t_1; zvláště snadno, jsou-li dány obě tečné v bodě dvojném, ježto $\overline{o_1 i_1}$, $\overline{o_1 t_1}$ oddělují harmonicky tyto tečny. I známe v bodě i_1 tři paprsky: $\overline{o_1 i_1}$, J_1, $\overline{i_1 t_1}$; i stanovíme S_1, dle 2. Vztah 1. nám pak ihned podává hledanou přímku J. Najdeme-li ještě (dle 3.) $\overline{t_2 t_3}$, máme všech šest význačných paprsků v bodě i_1.

Zcela jednoduchou kvadratickou konstrukcí najdeme oba body i_2, i_3. Bod i_1 i se svou tečnou platí za tři podmínky***); i musí k určení čáry býti dány alespoň ještě tři body. Budiž jeden z nich x. Nazveme bod, v němž $\overline{o_1 t_1}$ po druhé protíná K,

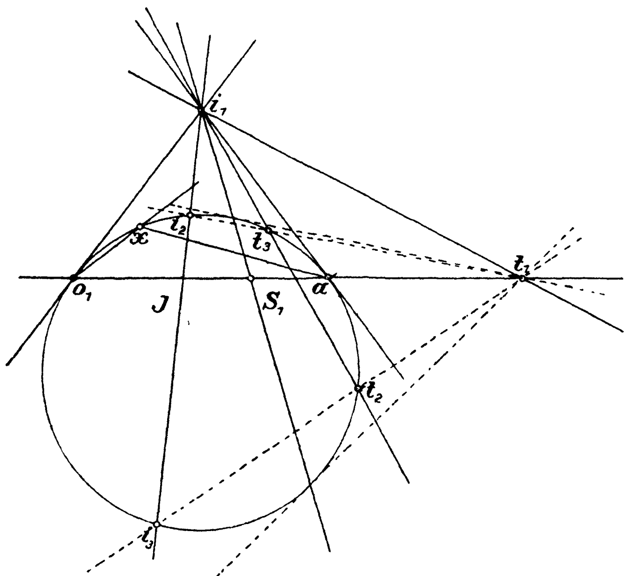
---

*) Tytéž úlohy řeší Em. Weyr ve své „Theorie der mehrdeutigen Gebilde etc.", ovšem s jinými pomůckami.

**) Bod inflekční určuje čáru jednoznačně jen, je-li dán i se svou tečnou. Důkaz je poněkud dlouhý, proto jej neuvádím.

***) Důkaz opět přecházím; je obsažen v důkazu, o němž jedná předchozí pozn.

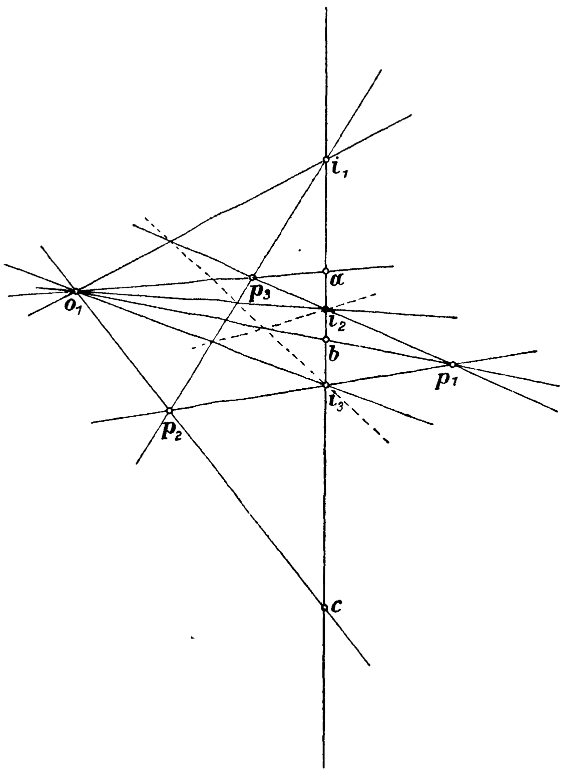
a (v. obr. 6.). Ježto přímka J jde bodem i_1, leží její pól na $\overline{o_1t_1}$ a tedy o_1, a leží na jedné přímce s pólem přímky J. Pak dle známé věty promítají se body kuželosečky z obou bodů o_1, a na J páry involuce indukované. Ježto i_1 s průsekem přímky J a spojnice $\overline{o_1t_1}$ tvoří druhý pár této involuce, najdeme i_1, i_2 snadno jako dvojné elementy involuce dané dvěma páry.



Obr. 6.

Je možno najíti oba body i_2, i_3, aniž transformujeme na kuželosečku. Z předchozího totiž vysvítá, že bod, v němž protne přímku J spojnice $\overline{o_1x}$, odděluje harmonicky oba body i_2, i_3 vzhledem k bodu, v němž přímku J po druhé protne kuželosečka vedená body o_1, t_1, x, i_1 s tečnou J_1 v tomto bodě (tato kuželosečka totiž odpovídá paprsku $\overline{ax}$). I najdeme i_2, i_3, jako dvojici bodů současně harmonických k bodům právě uvedeným a k bodům i_1 $(J, \overline{o_1t_1})$.

Zbývá nalézti ještě známých šest paprsků v obou bodech i_2, i_3. Nazveme i průsek $(J, \overline{o_1t_1})$. Sestrojíme-li bod s harmonický k i, t_1 vzhledem k o_1, je $\overline{i_2 s} \equiv S_2$, $\overline{i_3 s} \equiv S_3$. Ježto známe $\overline{o_1 i_2}$, S_2, J (obdobně v i_3), sestrojíme také $\overline{i_2 t_2}$, $\overline{i_3 t_3}$; t_2 pak je dán jako průsek ($\overline{i_2 t_2}$, $\overline{i_3 t_1}$), t_3 podobně. Rovněž je snadno nalézti J_2, J_3.



Obr. 7.

6. Dvěma body inflekčními i s tečnami (šest elementů) a bodem dvojným je C_4^3 úplně stanovena. Přímka J je pak bezprostředně dána. Třetí bod inflekční stanovíme snadno (v. obr. 7.). Průsek obou tečen J_1, J_2 spojme s bodem dvojným; tato spojnice protne J v bodě a; harmonicky sdružený s ním vzhledem k i_1, i_2 je hledaný bod i_3.

Tečnu J_3 v bodě i_3 rovněž snadno sestrojíme: stanovíme k i_1 bod harmonický vzhledem k i_2, i_3, nazveme jej b. Na $\overline{o_1 b}$ musí se protnouti J_2, J_3, čímž je J_3 nalezeno.

Má-li konstrukce býti oprávněna, musí se J_1, J_3 protnouti na spojnici bodu o_1 s bodem harmonickým k i_2 vzhledem k i_1, i_3. Že to vskutku nastane, snadno dokážeme.

Označme $(J_1 J_3) \equiv p_2$, obdobně p_1, p_3. Spojnice $\overline{o_1 p_2}$ protne J v bodě c. Dokážeme-li, že bod c je harmonicky sdružen s i_2 vzhledem k i_1, i_3, je hořejší tvrzení dokázáno.

Stanovili jsme postupně harmonické vztahy

1. $i_1, a, i_2, i_3,$
2. $i_1, i_2, b, i_3.$

Promítejme první čtveřinu z bodu p_3 na J_3 do bodů

$$p_2, a', p_1, i_3.$$

Tyto body promítejme opět z o_1 na J; obdržíme harmonickou čtveřinu

3. $c, i_3, b, a.$

Ježto a, i_3 oddělují harmonicky obě dvojice i_1, i_2 a b, c, tvoří tyto páry involuci o dvojných bodech a, i_3. Čtveřina bodů, které v této involuci jsou sdruženy s body čtveřiny 2., je harmonická, t. j. body

$$i_2, i_1, c, i_3$$

tvoří harmonickou čtveřinu, čímž žádaný důkaz proveden.

V každém bodě inflekčním známe tři ze šesti důležitých paprsků; ostatní sestrojíme, najdeme-li alespoň jeden bod t, na př. t_1.

7. Pokud je dán dvojný bod, nemůže býti dáno více bodů inflekčních i s tečnami než dva. Zajímavo však je, že C_4^3 je jednoznačně stanovena, jsou-li dány tři body inflekční i s tečnami. Ježto ovšem všechny body inflekční leží na přímce, není třetí bod inflekční úplně libovolný. Můžeme úlohu proto vyjádřiti přesněji tak: jest sestrojiti body čáry C_4^3, jsou-li dány dva body inflekční i s tečnami a třetí tečna inflekční.*) Ježto tečna

*) Což znamená, že sestrojujeme nyní čáru se stanoviska tečnového, jako čáru 4-té třídy.

obyčejná platí za jednu podmínku, platí inflekční za dvě; i máme celkem 8 nezávislých podmínek, jež s požadavkem, aby C_4^3 měla dvojný bod, tvoří devět nutných podmínek.

Třetí bod inflekční je dán jako průsek přímky J s tečnou inflekční.

Dvojný bod čáry snadno pak sestrojíme. Sestrojíme oba body a a b, o nichž byla řeč výše, a spojnice $\overline{ap_3}$ a $\overline{bp_1}$ se protne v bodě o_1. Další postup jako nahoře.

V. Křivka reciproká.

Vše, co v předešlých odstavcích bylo řečeno o křivce C_4^3, lze reciprokým způsobem vyložiti o křivce C_3^4, t. j. o křivce st. čtvrtého s třemi body úvratu.

Mimo jiné zajímavé výsledky, k nimž bychom takovým způsobem došli, vytýkám zvláště ten, jenž je obsažen v oddíle posledním, jenž totiž podává návod, jak sestrojiti dvojnou tečnou křivky C_3^4, jsou-li dány body úvratu i s tečnami.

Do podrobností není třeba zacházeti.

Poznámka k přibližným kvadraturním methodám.

Napsal **Vilém Jung**, professor v Praze.

1. *Simpson*-ovo kvadraturní pravidlo jest jen zvláštním případem *Newton-Cotes*-ovy kvadraturní methody, která jest starší a obecnější. Základní myšlenku této methody sdělil *Newton* (1642—1727) v druhém svém dopise ze dne 24. října 1676 s *Leibnitz*-em (1646—1716).*)

Praví tam **), že lze přibližným způsobem pohodlně provésti kvadraturu

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

*) Viz na př.: *M. Cantor*, „*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*". III. Bd., pag. 358. Leipzig, 1898.

**) Pro stručnost užito nynějšího způsobu psaní.