Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr
O kuželi druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 31--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123416

v pólu nachází, a sestrojme na jejím povrchu obdélník $M'ON'P'$; přibývá-li veličiny ϱ o $d\varrho$, opisuje poloměr r na povrchu naší koule oblouk $p' = rd\varrho$, mění-li se však ω o $d\omega$, opisuje r oblouk $q' = r \sin\varrho\, d\omega$; položíme-li nyní skrze pól a skrze strany obdélníku $M'ON'P'$ čtyry roviny vytínající na povrchu plochy opět část $MONP = dP$, najdeme, poněvadž

$$p = \frac{\partial r}{\partial \varrho} d\varrho\,, q = \frac{\partial r}{\partial \varrho}\, d\omega\,,$$

podlé (1)

$$dP = r\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right)^2\right] \sin^2\varrho + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} d\varrho d\omega\ ^{*)}.$$

O kuželi druhého stupně.

(Poučka od *Ed. Weyra.*)

Každá z tří hlavních rovin kužele druhého stupně protíná jej ve dvou hranách, jež uzavírají úhel φ; jsou-li φ_1, φ_2 a φ_3 hodnoty tohoto úhlu vzhledem k řečeným třem rovinám, platí o nich

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_3 \cos\varphi_1 + 1 = 0.$$

Důkaz. Zvolíme-li osy kužele za osy souřadnic x, y, z, jest rovnice jeho, jak známo,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\,;$$

položíme-li tu

$$\begin{aligned} x &= 0, \text{ bude } by^2 + cz^2 = 0, \\ y &= 0, \quad ,, \quad ax^2 + cz^2 = 0, \\ z &= 0, \quad ,, \quad ax^2 + by^2 = 0, \end{aligned}$$

kteréžto rovnice představují řečené hrany průsečné.

---

*) Vzorec poslední byl poprvé podán *Eulerem*, jenž jej však zavedením nových proměnných ze vzorce (2) obdržel. Bezprostředně vyvinut uveřejnil *Grunert* v díle svém „Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme" p. 267 a v elegantnější formě *Unferdinger* v pojednání „Ableitung der Complanationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur" Grunerts Arch. T. 48 p. 106.

Odvozování zde podané vysvětluje geometrický význam každého členu pod znamením odmocniny a nedá se snadně stručnějším nahraditi.

Poněvadž osy souřadnicové půlí úhly φ, jde z těchto rovnic

$$tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_1 = -\frac{b}{c},\; tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_2 = -\frac{c}{a},\; tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_3 = -\frac{a}{b},$$

z kterýchžto vzorců znásobením se obdrží především

$$tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_1\, tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_2\, tg^2\,{}^1/_2\,\varphi_3 + 1 = 0$$

aneb

$$sin^2\,{}^1/_2\,\varphi_1\, sin^2\,{}^1/_2\,\varphi_2\, sin^2\,{}^1/_2\,\varphi_3 + cos^2\,{}^1/_2\,\varphi_1\, cos^2\,{}^1/_2\,\varphi_2\, cos^2\,{}^1/_2\,\varphi_3 = 0;$$

použijeme li pak známých vzorců goniometrických, abychom vyjádřili *sin* a *cos* polovičních úhlů *cos* celých, zjednáme si snadno

$$(1 - cos\,\varphi_1)(1 - cos\,\varphi_2)(1 - cos\,\varphi_3) + (1 + cos\,\varphi_1)(1 + cos\,\varphi_2)(1 + cos\,\varphi_3) = 0$$

aneb znásobíme-li, konečně

$$cos\,\varphi_1\, cos\,\varphi_2 + cos\,\varphi_2\, cos\,\varphi_3 + cos\,\varphi_3\, cos\,\varphi_1 + 1 = 0,$$

což mělo býti dokázáno. *)

O přidružených zlomcích přibližných a jich upotřebení.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Ustanovíme-li k řetězovému zlomku

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots)$$

podle známých pravidel zlomky přibližné a značí-li

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}},\; \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$$

dva krajní ze tří po sobě jdoucích, vyjádří se celá řada mezi ně připadajících zlomků přidružených vzorcem

$$\frac{r_k}{s_k} = \frac{\alpha_n k + \alpha_{n-1}}{\beta_n k + \beta_{n-1}},$$

zavede-li se do něho za k po sobě

$$0, 1, 2, \ldots, a_{n+1} - 1, a_{n+1},$$

kdež značí a_{n+1} článkového dělitele, který vede k druhému z vytknutých zlomků.

Jelikož tu, jak známo,

$$r_k = \alpha_n k + \alpha_{n-1}, \qquad (1)$$

$$s_k = \beta_n k + \beta_{n-1}, \qquad (2)$$

---

*) Jedna z hodnot φ_1, φ_2, φ_3 jest patrně vždy ideální.