Vladimír Kořínek

Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, 261--286

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123408`

Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes.[1])

Vladimír Kořínek, Praha.

(Reçu le 27 mars 1937.)

Liste bibliographique.

Reinhold **Baer:** 1. The decomposition of enumerable, primary, Abelian groups into direct summands. Quaterly J. of Math., Oxford Series **6** (1935), 217—221.

2. The decomposition of Abelian groups into direct summands. Quaterly J. of Math., Oxford Series **6** (1935), 222—232.

Hans **Fitting:** 1. Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. Math. Annalen **107** (1932), 514—542.

2. Berichtigung zu der Arbeit von Hans Fitting: Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. Math. Annalen **109** (1933), 616.

3. Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. Math. Zeitschrift **39** (1934), 16—30.

4. Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. Math. Zeitschrift **41** (1936), 380—395.

Alexander **Kurosch:** 1. Zur Zerlegung unendlicher Gruppen. Math. Annalen **106** (1932), 107—113.

Heinz **Prüfer:** 1. Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppe. Math. Zeitschrift **17** (1923), 35—61.

Robert **Remak:** 1. Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. J. für reine u. angewandte Math. **139** (1911), 293—308.

Otto **Schmidt:** 1. Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette. Math. Zeitschrift **29** (1929), 34—41.

---

[1]) Les principaux résultats de ce travail ont été l'objet d'une communication que l'auteur a faite le 17 juillet 1936 au Congrès international des mathématiciens à Oslo. Cette communication contenait en plus des théorèmes concernant l'existence d'un élargissement commun de deux décompositions d'un groupe. Mais presque en même temps a apparu dans le 3e cahier du tome 41 de Mathematische Zeitschrift un travail de M. Fitting (voir Fitting [4]), datant du 3 février 1936, que je ne connaissais pas au moment, quand je faisais ma communication. Le 3e cahier du tome 41 porte la mention: Abgeschlossen am 26. Juni 1936. Le travail de M. Fitting traite le problème de l'existence d'un élargissement commun de deux décompositions données et en donne une solution très complète. Par conséquent j'ai exclu du présent travail ce problème.

§ 1. Notations et définitions.

Dans ce qui suit les majuscules allemandes désignent toujours les groupes et les sousgroupes, les majuscules latines désignent les éléments du groupe et les lettres grecques désignent les automorphismes d'un groupe ou sousgroupe.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe ayant un champ d'opérateurs Ω. Excepté le § 2, nous allons entendre par un sousgroupe ou un facteur direct d'une décomposition un sousgroupe ou un facteur direct qui est invariant par rapport aux opérateurs de Ω. De même par un sousgroupe (facteur) irréductible nous allons entendre un sousgroupe (facteur) $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ qui ne se laisse pas décomposer en produit direct de deux facteurs, invariants par rapport à Ω et tous deux distincts de $\mathfrak{H}$ et du sousgroupe-unité $\mathfrak{E}$. Un tel sousgroupe peut être réductible au sens absolu du mot, ayant des facteurs directs qui ne sont pas invariants par rapport à Ω. Nous allons écrire la décomposition d'un groupe donné $\mathfrak{G}$ en produit direct[2]) de ses sousgroupes de la manière suivante

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_r. \tag{1}$$

Sauf la mention contraire les produits directs envisagés contiendront toujours un nombre fini des facteurs. Chaque élément G de $\mathfrak{G}$ peut être exprimé d'une seule manière comme produit $G = G_1 G_2 \ldots G_r$ avec G_i dans $\mathfrak{G}_i$. L'élément G_i sera appelé le *composant* de G dans $\mathfrak{G}_i$. La *décomposition* (1) est dite *irréductible,* si tous les facteurs qui y figurent sont irréductibles.

J'appelle une *chaîne descendante* des sousgroupes dans $\mathfrak{G}$ une suite des sousgroupes de $\mathfrak{G}$ telle que[3])

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(0)} \supseteqq \mathfrak{G}^{(1)} \supseteqq \mathfrak{G}^{(2)} \supseteqq \ldots \tag{2}$$

De même une *chaîne montante* des sousgroupes dans $\mathfrak{G}$ est une suite de sousgroupes telle que

$$\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{G}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{G}^{(2)} \subseteqq \ldots \tag{3}$$

Une chaîne (2) est dite *chaîne normale descendante,* si pour chaque $i \geqq 1$, $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal[4]) de $\mathfrak{G}^{(i-1)}$. De même une

---

[2]) Quant à la définition d'un produit direct, voir: L. B. van der Waerden, Moderne Algebra I., § 42, p. 141.

[3]) $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$ signifie que l'ensemble $\mathfrak{N}$ contient l'ensemble $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ signifie la même relation, quand on a $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$. Nous ferons encore usage des notations suivantes, provenant de la théorie des ensembles: $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ pour la partie commune de ces deux ensembles, $M \in \mathfrak{M}$, quand l'élément M appartient à $\mathfrak{M}$. Par $\{\mathfrak{H}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(2)}\}$ nous allons désigner le sousgroupe de $\mathfrak{G}$ engendré par les sousgroupes $\mathfrak{H}^{(1)}$ et $\mathfrak{H}^{(2)}$, par $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ le sousgroupe engendré par les éléments $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

[4]) „Normalteiler" ou „ausgezeichnete Untergruppe" est habituellement désigné dans les livres français par l'expression „sousgroupe in-

chaîne normale montante est une chaîne (3), dans laquelle, pour chaque i, $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}^{(i+1)}$. Une chaîne (2) ou (3) est dite *chaîne principale*, si dans (2) ou (3) chaque $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$. Nous appelons une *chaîne descendante ou montante finie* une chaîne (2) ou (3) dans laquelle on a, à partir d'un certain indice k, $\mathfrak{G}^{(i)} = \mathfrak{G}^{(i+1)}$ pour chaque $i \geqq k$. Nous dirons que le groupe $\mathfrak{G}$ satisfait à la *supposition des chaînes descendantes* (*montantes*) *finies*,[5]) si chaque chaîne descendante (montante) de $\mathfrak{G}$ est finie.

Si l'on étudie les décompositions irréductibles d'un groupe, deux problèmes se posent immédiatement: le problème d'existence et le problème d'unicité. Quant au premier problème, on peut donner immédiatement la condition nécessaire et suffisante sous laquelle au moins une décomposition irréductible de $\mathfrak{G}$ existe. Pour cela il faut et il suffit que chaque chaîne descendante des facteurs directs de $\mathfrak{G}$ soit finie. Si l'on envisage des décompositions de $\mathfrak{G}$ ayant un nombre infini des facteurs, la question, ainsi posée par M. Kurosch [1], p. 108, devient plus difficile. Récemment M. F. Levi a donné l'exemple d'un groupe dénombrable, ne possédant aucun facteur irréductible. Voir Fitting [4], p. 392.

Le problème d'unicité est formé par la question, sous quelles conditions un groupe $\mathfrak{G}$ possède une décomposition irréductible unique. On sait déjà longtemps, en se bornant même aux groupes finis, qu'il y a des groupes qui possèdent plusieurs décompositions irréductibles distinctes. Alors, pour arriver aux résultats assez généraux, il faut généraliser la notion d'unicité. On appelle le sousgroupe $\mathfrak{G}^{(1)}$ de $\mathfrak{G}$ *centralement isomorphe* au sousgroupe $\mathfrak{G}^{(2)}$ de $\mathfrak{G}$, si $\mathfrak{G}^{(1)}$ est isomorphe à $\mathfrak{G}^{(2)}$, et si pour chaque élément G_1 de $\mathfrak{G}^{(1)}$, $G_1G_2^{-1}$ est un élément du centre de $\mathfrak{G}$, G_2 étant l'élément de $\mathfrak{G}^{(2)}$ correspondant à G_1 par l'isomorphisme en question. Un tel *isomorphisme* est appelé *central*. D'une manière analogue nous parlerons d'un *homomorphisme* et d'un *automorphisme central*. Je dis que la *décomposition* (1) de $\mathfrak{G}$ et la *décomposition*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_s \tag{4}$$

sont *centralement isomorphes*, si l'on a $r = s$, et si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les facteurs $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{H}_i$ telle que les facteurs correspondants sont centralement isomorphes. M. Remak [1] a trouvé déjà en 1911 que, pour un groupe fini, deux décompositions irréductibles quelconques sont toujours centralement isomorphes. Depuis ce temps-là, la question était

variant". J'emploie ici l'expression *sousgroupe normal* et je reserve l'expression *sousgroupe invariant* aux sousgroupes qui sont invariants par rapport à un champ d'opérateurs.

[5]) En allemand „Untergruppensatz" et „Obergruppensatz".

l'objet de plusieurs travaux. Les résultats les plus généraux, jusqu'à présent obtenus, sont dûs à M. Fitting et à M. Kurosch.

M. Fitting [3] a démontré le théorème suivant: *Si le groupe* $\mathfrak{G}$ *satisfait aux suppositions des chaînes principales descendantes finies et des chaînes principales montantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$, *sont toujours centralement isomorphes.* M. Kurosch [1], en poursuivant des recherches commencées par M. Schmidt [1], a démontré le théorème suivant: *Si le groupe* $\mathfrak{G}$ *satisfait à la supposition des chaînes normales descendantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$ *sont toujours centralement isomorphes.* M. Kurosch n'envisage que les groupes ordinaires sans un champ d'opérateurs. Pour le cas abélien le théorème de M. Kurosch est plus général, parce que, dans ce cas, chaîne normale et chaîne principale sont deux notions identiques. Dans le cas non-abélien les deux théorèmes ne peuvent pas être comparés. D'un côté les suppositions de M. Kurosch, faites sur les chaînes normales, exigent plus. D'autre côté elles exigent moins, aucune supposition sur les chaînes montantes n'étant faite. Cet état de chose nous a conduit à attendre que un théorème d'unicité plus général existe qui contiendrait les théorèmes de M. Fitting et de M. Kurosch comme conséquences. En effet, on conclut aisément du théorème 4,2 le théorème suivant:

Si $\mathfrak{G}$ *est un groupe qui possède des décompositions irréductibles et dont le centre satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$ *sont centralement isomorphes.*

Nous allons envisager dans le présent travail toute la question d'un point de vue encore un peu plus général. Supposons que, dans la décomposition (1) du groupe $\mathfrak{G}$, chaque facteur $\mathfrak{G}_i$ se laisse de nouveau décomposer en produit direct:

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{it_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Si l'on substitue (5) dans la décomposition (1), on obtient la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1t_1} \times \mathfrak{G}_{21} \times \mathfrak{G}_{22} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{rt_r}. \tag{6}$$

La décomposition (6) sera appelée *l'élargissement de la décomposition* (1). Nous allons voir que, sous certaines suppositions, deux décompositions quelconques du groupe $\mathfrak{G}$ telles que (1) et (4) possèdent toujours des élargissements qui sont centralement isomorphes. (Théorème 4,1.) Les suppositions que nous y aurons à faire ne concernent que le centre du groupe $\mathfrak{G}$. (Suppositions 3,1 ou 6,1.) Il n'est pas même nécessaire que le groupe $\mathfrak{G}$ possède des décompositions irréductibles. Les supposition mentionnées sont toujours satisfaites, si le centre de $\mathfrak{G}$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. Je signale encore le fait que, récemment, M. Baer [1], p. 221, § 8 et [2], a fourni l'exemple d'un groupe abélien qui possède des décompositions qui ne peuvent pas être élargies en décompositions centralement isomorphes. Le présent travail fait clairement ressortir le fait que les seules difficultés qu'on rencontre, en étudiant l'unicité des décompositions de $\mathfrak{G}$ en produit direct, reposent dans le centre de $\mathfrak{G}$. Ce ne sont que les groupes abéliens, où l'on trouve à cet égard un état de choses compliqué. On peut tirer la même conclusion des résultats récents de M. Fitting [4].

§ 2. Les automorphismes d'un groupe.

Dans les alinéas 2,1—2,6 de ce paragraphe j'entend par un sousgroupe ou un facteur direct de $\mathfrak{G}$ un sousgroupe ou un facteur direct au sens absolu du mot, abstention faite du champ d'opérateurs Ω. Un *automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ est un homomorphisme qui fait correspondre à chaque élément G de $\mathfrak{G}$ un autre élément $G\vartheta$ de $\mathfrak{G}$. L'ensemble d'éléments $G\vartheta$ forme un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ que nous allons désigner par $\mathfrak{G}\vartheta$. Tous les opérateurs du champ Ω sont des automorphismes du $\mathfrak{G}$ et inversement, un ensemble quelconque d'automorphismes de $\mathfrak{G}$ peut être pris pour un champ d'opérateurs de $\mathfrak{G}$. La correspondance $G \to G$ pour chaque G est aussi un automorphisme de $\mathfrak{G}$ que nous allons appeler *automorphisme-unité* et désigner par ε. De même E étant l'unité du groupe, la correspondance $G \to E$ pour chaque G, est un automorphisme de $\mathfrak{G}$, *l'automorphisme-zéro* ϱ. L'automorphisme de $\mathfrak{G}$ fait correspondre à chaque sousgroupe $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{G}$ un sousgroupe $\mathfrak{H}\vartheta$ de $\mathfrak{G}\vartheta$. Si l'on a $\mathfrak{H} \supseteqq \mathfrak{H}\vartheta$, l'automorphisme ϑ peut être considéré même comme l'automorphisme de $\mathfrak{H}$. Tel est le cas pour le sousgroupe $\mathfrak{G}\vartheta$, car de $\mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{G}\vartheta$ on obtient $\mathfrak{G}\vartheta \supseteqq (\mathfrak{G}\vartheta)\,\vartheta$. Soient η, ϑ deux automorphismes de $\mathfrak{G}$. On considère ces deux automorphismes comme égaux $\eta = \vartheta$, si l'on a $G\eta = G\vartheta$ pour chaque élément G de $\mathfrak{G}$. Comme on sait bien, le produit $\eta\vartheta$ de ces deux automorphismes est l'automorphisme qui fait correspondre à chaque élément G de $\mathfrak{G}$ l'élément $(G\eta)\,\vartheta$. La multiplication des automorphismes ainsi définie est associative: $\zeta(\eta\vartheta) = (\zeta\eta)\,\vartheta$. Si chaque élément de $\mathfrak{G}\eta$ est commutatif avec chaque élément de $\mathfrak{G}\vartheta$, la correspondance $G \to (G\eta)\,(G\vartheta)$ est aussi un automorphisme de $\mathfrak{G}$. En ce cas nous allons appeler d'après M. Fitting [1], p. 524 et [2] (voir aussi [3], p. 19, remarque 5), les deux *automorphismes* η et ϑ *sommables* et nous allons désigner l'automorphisme, engendré par la correspondance $G \to (G\eta)\,(G\vartheta)$, par $\eta + \vartheta$. La somme de n automorphismes $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ ne sera définie que dans le cas, où les automorphismes ϑ_i, ϑ_k pour chaque couple d'indices $i, k, i \neq k$, seront sommables. Elle nous représentera l'automorphisme engendré par la correspondance $G \to (G\vartheta_1)(G\vartheta_2)\ldots(G\vartheta_n)$. On voit aisément que l'addition des automorphismes, ainsi définie, est commutative et associative. Entre l'addition et la multiplication d'automorphismes il y a une relation distributive: L'existence de la somme $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ entraîne celle des sommes

$$\eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n \text{ et } \vartheta_1\eta + \vartheta_2\eta + \ldots + \vartheta_n\eta$$

et on a[6])

$$\eta(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) = \eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n \tag{1}$$

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)\eta = \vartheta_1\eta + \vartheta_2\eta + \ldots + \vartheta_n\eta. \tag{2}$$

Si, pour ϑ, $\mathfrak{G}\vartheta$ est un groupe abélien, la correspondance $G \to (G\vartheta)^{-1} = G^{-1}\vartheta$ est un automorphisme de $\mathfrak{G}$ que nous allons désigner par $(-\vartheta)$. ϑ et $(-\vartheta)$ sont sommables et on a $\vartheta + (-\vartheta) = \varrho$.

M. Fitting [1], § 3, p. 518, et [3], p. 19, remarque 3, appelle un *automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ *normal*, si l'on a pour deux éléments quelconques A et B de $\mathfrak{G}$:

$$(B^{-1}AB)\vartheta = (B^{-1}\vartheta)(A\vartheta)(B\vartheta) = B^{-1}(A\vartheta)B.$$

Un automorphisme normal fait correspondre à chaque sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$ de même un sousgroupe normal. On trouve aisément que la somme et le produit d'un nombre fini d'automorphismes normaux est un automorphisme normal.

Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$. Si l'on a $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\vartheta$ et si la correspondance $H \to H\vartheta$ est biunivoque, c'est-à-dire un isomorphisme, nous allons dire que l'automorphisme ϑ est un *automorphisme propre pour* $\mathfrak{H}$[7]) et que $\mathfrak{H}$ est un *sousgroupe reproduit par* ϑ. Un automorphisme ϑ propre pour $\mathfrak{G}$ ou un automorphisme propre tout court est un automorphisme au sens habituel du mot, c'est-à-dire une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathfrak{G}$, qui conserve l'opération du groupe. En ce cas et en ce cas seulement, il existe un *automorphisme inverse* ϑ^{-1} tel qu'on a $\vartheta\vartheta^{-1} = \vartheta^{-1}\vartheta = \varepsilon$. Si le sousgroupe $\mathfrak{H}$ est reproduit par η et ϑ, il est reproduit aussi par $\eta\vartheta$. Chaque automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ est propre au moins pour un sousgroupe de $\mathfrak{G}$: pour le sousgroupe unité $\mathfrak{E}$. Nous allons démontrer le lemme suivant:

2,1. Lemme. *Pour chaque automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ il y a dans $\mathfrak{G}$ des sousgroupes maximum reproduits par ϑ, c'est à dire des sous-*

---

[6]) Inversement, si, par exemple, la somme $\eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n$ existe, il faut supposer de plus l'existence de $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \vartheta_n$ pour pouvoir en conclure l'existence de $\eta(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)$ et l'égalité (1).

[7]) Cette expression est dûe aussi à M. Fitting. Voir [1], § 2, p. 518, [3], § 1, p. 18, remarque 2.

groupes reproduits par ϑ qui ne sont pas contenus dans d'autres sousgroupes reproduits par ϑ.

Démonstration. Soit $\mathfrak{H}^{(1)} \subset \mathfrak{H}^{(2)} \subset \mathfrak{H}^{(3)} \subset \ldots$ une chaîne montante infinie des sousgroupes reproduits par ϑ. (Si, dans $\mathfrak{G}$, une telle chaîne n'existe pas, le lemme est vrai.) Soit $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui sont contenus au moins dans un des sousgroupes $\mathfrak{H}^{(i)}$. $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ est un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ qui est reproduit par ϑ ce qui prouve notre lemme.[8])

2,2. Lemme. *Soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{G}$. Supposons que parmi les sousgroupes maximum reproduits par ϑ, il y ait un sousgroupe normal $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{G}$. En ce cas $\mathfrak{H}$ est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ un sousgroupe quelconque reproduit par ϑ. La partie commune $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ des ensembles $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{F}$ est aussi un sousgroupe reproduit par ϑ, car on a $\mathfrak{F}'\vartheta = (\mathfrak{H}\vartheta) \cap \cap (\mathfrak{F}\vartheta) = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ et la correspondance $F' \to F'\vartheta$ est évidemment un isomorphisme. Soit $\mathfrak{H}' = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ le sousgroupe engendré par $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$, chaque élément $H' \in \mathfrak{H}'$ peut être mis sous la forme $H' = HF$ avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $F \in \mathfrak{F}$. On a $H'\vartheta = (H\vartheta)(F\vartheta)$, c'est-à-dire $\mathfrak{H}'\vartheta \subseteqq \mathfrak{H}'$. Inversement, il existe un élément $H_0 \in \mathfrak{H}$ tel que $H_0\vartheta = H$ et un élément $F_0 \in \mathfrak{F}$ tel que $F_0\vartheta = F$. On a alors $(H_0F_0)\,\vartheta = HF$ et par conséquent $\mathfrak{H}'\vartheta = \mathfrak{H}'$. Soit maintenant $(HF)\,\vartheta = E$, c'est-à-dire $H\vartheta = F^{-1}\vartheta \in \mathfrak{F}' = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$. Parce que $\mathfrak{F}'$ est reproduit par ϑ, la relation $H\vartheta = F^{-1}\vartheta$ entraîne $H = F^{-1}$, c'est-à-dire $HF = E$. La correspondance $H' \to H'\vartheta$, définie par ϑ dans $\mathfrak{H}'$, est un isomorphisme, cela veut dire, $\mathfrak{H}'$ est un sousgroupe reproduit par ϑ. $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe maximum, on a $\mathfrak{H}' = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) = = \mathfrak{H}$, c'est-à-dire $\mathfrak{H} \supseteqq \mathfrak{F}$.

2,3. Lemme. *Soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble de tous les éléments $K \in \mathfrak{G}$, ayant la propriété suivante: Pour chaque K on peut trouver un entier positif n tel que $K\vartheta^n = E$. $\mathfrak{K}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$ et on a $\mathfrak{K}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}$.* Nous allons appeler le sousgroupe $\mathfrak{K}$ *sousgroupe annulé par ϑ.*

Démonstration. L'ensemble de tous les éléments $K^{(1)} \in \mathfrak{G}$ tels que $K^{(1)}\vartheta = E$ forme, comme on sait, un sousgroupe normal $\mathfrak{K}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{G}$. En général, soit $\mathfrak{K}^{(n)}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ tels que $K^{(n)}\vartheta^n = E$. $\mathfrak{K}^{(n)}$ est un sousgroupe normal et on a évidemment:

$$\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{K}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{K}^{(2)} \subseteqq \ldots \quad .$$

Construisons l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui sont con-

[8]) Dans cette démonstration on a employé l'axiome de choix. Dans ce qui suit nous allons employer plusieurs fois cet axiome sans en faire une mention expresse.

tenus au moins dans un des sousgroupes $\mathfrak{K}^{(i)}$. Cet ensemble est un sousgroupe normal et il est identique à l'ensemble $\mathfrak{K}$. Parce qu'on peut écrire pour chaque n $\mathfrak{K}^{(n)}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}^{(n-1)}$, on a $\mathfrak{K}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}$.

2,4. Définition. *L'automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ est dit parfait,* si le groupe $\mathfrak{G}$ est le produit direct $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ d'un sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$ reproduit par ϑ et le sousgroupe $\mathfrak{K}$ annulé par ϑ. En ce cas, $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$, il est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ.

Les démonstrations des paragraphes suivants reposent d'une manière fondamentale sur le théorème:

2,5. Théorème. *Soit ϑ un automorphisme du groupe $\mathfrak{G}$. Supposons que au moins un sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$, reproduit par ϑ, soit normal et que le sousgroupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ soit abélien et satisfasse à la supposition des chaînes descendantes finies. Sous ces conditions ϑ est parfait pour $\mathfrak{G}$.*

Démonstration. Nous allons prouver d'abord un lemme sur les groupes abéliens.

2,51. *Soit $\mathfrak{A}$ un groupe abélien qui satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. $\mathfrak{A}$ ne contient que les éléments d'ordre fini. Soit p un nombre premier quelconque. $\mathfrak{A}$ ne contient qu'un nombre fini ou zéro d'éléments d'ordre p.*[9])

En effet, dans $\mathfrak{A}$ chaque chaîne descendante étant finie, $\mathfrak{A}$ ne peut contenir aucun élément d'ordre infini. Envisageons pour un nombre premier donné p l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{A}$ d'ordre p. S'il n'y a pas dans $\mathfrak{A}$ de tels éléments, le lemme est vrai. Dans le cas contraire, je prends un quelconque parmi ces éléments et je le désigne par A_1. Pour A_2 je prends un élément de cet ensemble qui est indépendant de A_1, cela veut dire qu'il ne peut pas être mis sous la forme $A_2 = A_1^k$ avec un k entier. En général, les $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ étant déjà choisis, je prends pour A_n un élément de l'ensemble envisagé qui est indépendant des éléments précédents, cela veut dire qu'il ne peut pas être mis sous la forme $A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots A_{n-1}^{k_{n-1}}$, les k_i étant des entiers. Si l'on arrive à un entier n, pour lequel on ne peut plus choisir dans l'ensemble un éléments A_n indépendant des précédents, l'ensemble n'a qu'un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire nous avons construit une suite infinie d'éléments d'ordre $p : A_1, A_2, \ldots$, chaque élément étant indépendant des précédents.

[9]) Cette chose est la conséquence du fait que, d'après M. Kurosch [1], un tel $\mathfrak{A}$ est le produit direct d'un nombre fini de facteurs irréductibles qui sont, ou des sousgroupes cycliques, ayant comme ordre une puissance d'un nombre premier, ou les sousgroupes p^{∞}, appelés par M. Kurosch quasicycliques. Conformer aussi Prüfer [1]. Afin que les démonstrations du présent travail soient indépendantes des résultats de M. Kurosch, je donne ici une preuve du lemme.

Par conséquent on a pour chaque n[3]) $(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}) \cap (A_n) = \mathfrak{E}$ et le groupe $\mathfrak{A}$ contient le produit direct infini $(A_1) \times (A_2) \times (A_3) \times \ldots$. Posons $\mathfrak{A}_i = (A_i) \times (A_{i+1}) \times \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$. On voit que, en ce cas, $\mathfrak{A}$ contiendrait la chaîne descendante infinie $\mathfrak{A} \supseteqq \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3 \supset \ldots$ Le second cas est donc impossible.

2,52. On a pour chaque entier positif n: $H\vartheta^n \neq E$ pour $H \neq E$, $H \in \mathfrak{H}$, d'où $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{H}$ étant normal, $\mathfrak{G}$ *contient le produit direct*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$$

qui est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$.

2,53. *On a* $\mathfrak{Q}\vartheta \subseteqq \mathfrak{Q}$. En effet $\mathfrak{H}\vartheta = \mathfrak{H}$ et d'après 2,3 $\mathfrak{K}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}$.

2,54. *Le groupe-quotient* $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ *est un groupe abélien, satisfaisant à la supposition des chaînes descendantes finies.* D'après la supposition le groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ est un groupe abélien qui satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. La même chose est donc vraie pour $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$, à cause de $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{Q}$.

2,55. D'après 2,53 on a $(\mathfrak{Q}G)\,\vartheta = (\mathfrak{Q}\vartheta)\,(G\vartheta) \subseteqq \mathfrak{Q}(G\vartheta)$. *La correspondance entre les classes de* $\mathfrak{G}$ *d'après le sousgroupe* $\mathfrak{Q}$: $\mathfrak{Q}G \rightarrow \mathfrak{Q}(G\vartheta)$ *est un automorphisme du groupe-quotient* $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ que nous allons désigner par $\overline{\vartheta}$.

2,56. *L'automorphisme* $\overline{\vartheta}$ *est un automorphisme propre pour* $\overline{\mathfrak{G}}$. Soit $\overline{G}$ un élément de $\overline{\mathfrak{G}}$ et $\mathfrak{Q}G = (\mathfrak{H} \times \mathfrak{K})\,G$, la classe respective. Soit $\overline{G}\overline{\vartheta} = E$, c'est-à-dire $G\vartheta = HK \in \mathfrak{Q}$ avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $K \in \mathfrak{K}$. On peut trouver dans $\mathfrak{H}$ un élément H' tel que $H'\vartheta = H$, d'où $(H'^{-1}G)\,\vartheta = K \in \mathfrak{K}$ et par conséquent $H'^{-1}G = K' \in \mathfrak{K}$, $G = H'K' \in \mathfrak{Q}$, c'est-à-dire $\overline{G} = E$. L'automorphisme $\overline{\vartheta}$ représente donc $\overline{\mathfrak{G}}$ d'une manière isomorphe à un sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta}$ de $\overline{\mathfrak{G}}$, d'où il suit $\overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta} = \overline{\mathfrak{G}}$.[10]) $\overline{\vartheta}$ est propre pour $\overline{\mathfrak{G}}$.

2,57. Supposons maintenant que $\overline{\mathfrak{G}}$ ne soit pas le groupe-unité. Il existe alors d'après 2,54 et 2,51 un nombre premier p tel qu'il y a dans $\overline{\mathfrak{G}}$ des éléments d'ordre p. L'ensemble de ces éléments est un sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}}_p \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}$, ayant d'après 2,51 l'ordre fini. $\overline{\mathfrak{G}}_p$ étant invariant par rapport à chaque automorphisme de $\overline{\mathfrak{G}}$, l'automorphisme $\overline{\vartheta}$ est propre pour $\overline{\mathfrak{G}}_p$. Soit $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_r$ une base de $\overline{\mathfrak{G}}_p$. Un élément arbitraire $\overline{A}$ de $\overline{\mathfrak{G}}_p$ peut être mis sous la forme

$$\overline{A} = \overline{A}_1^{d_1}\overline{A}_2^{d_2} \ldots \overline{A}_r^{d_r} \text{ avec } 0 \leqq d_i < p. \tag{3}$$

Choisissons dans la classe $\overline{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, d'une manière arbi-

---

[10]) Autrement, il y aurait dans $\overline{\mathfrak{G}}$ une chaîne descendante infinie: $\overline{\mathfrak{G}} \supset \overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta} \supset \overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta}^2 \supset \ldots$, contrairement à 2,54.

traire un élément A_i comme représentant de cette classe. Dans la classe $\bar{A}$ nous choisissons comme représentant l'élément

$$A = A_1^{d_1} A_2^{d_2} \dots A_r^{d_r}. \tag{4}$$

De $\bar{A}^p = \bar{E}$, il suit

$$A^p = HK \tag{5}$$

avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $K \in \mathfrak{K}$. p est le plus petit exposant pour lequel une telle équation est vraie. Soit s_A un nombre entier positif tel que pour K de (5) on a $K\vartheta^{s_A} = E$. Un tel s_A existe d'après 2,3. Posons

$$A\vartheta = H^{(1)} K^{(1)} A^{(1)}, \tag{6}$$

où $A^{(1)}$ est le représentant de la classe contenant $A\vartheta$. Soit t_A un entier positif tel qu'il est $K^{(1)}\vartheta^{t_A} = E$. Soit n le plus grand nombre de tous les s_A et de tous les t_A, A parcourant les représentants des classes de $\bar{\mathfrak{G}}_p$. Si l'on pose $\bar{A}_i \bar{\vartheta}_i^n = \bar{B}_i$, les $\bar{B}_i$ forment une nouvelle base pour $\bar{\mathfrak{G}}_p$ et on peut choisir pour les représentants des classes de la base les éléments

$$A_i \vartheta^n = B_i.$$

Pour le représentant d'une classe arbitraire $\bar{B} = \bar{B}_1^{d_1} \bar{B}_2^{d_2} \dots \bar{B}_r^{d_r}$ de $\bar{\mathfrak{G}}$ nous choisissons évidemment l' élément

$$B = B_1^{d_1} B_2^{d_2} \dots B_r^{d_r}, \qquad 0 \leqq d_i < p \tag{7}$$

et nous avons d'après (4)

$$A\vartheta^n = B. \tag{8}$$

D'après (5) et d'après le choix du nombre n il est

$$B^p = A^p \vartheta^n = (HK)\,\vartheta^n = (H\vartheta^n) \in \mathfrak{H}. \tag{9}$$

D'après (6) et (8) et d'après le choix du nombre n il est

$$\begin{aligned} B\vartheta = (A\vartheta^n)\,\vartheta = (A\vartheta)\,\vartheta^n = (H^{(1)}K^{(1)}A^{(1)})\,\vartheta^n = \\ = (H^1\vartheta^n)\,(A^{(1)}\vartheta^n) = (H^1\vartheta^n)\,B^{(1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

où l'on a posé $A^{(1)}\vartheta^n = B^{(1)}$.

2,58. Le sousgroupe $\mathfrak{H}^{(1)} = (\mathfrak{H}, B_1, B_2, \dots, B_r)$[3]) de $\mathfrak{G}$ est reproduit par ϑ: On a d'après (10) $\mathfrak{H}^{(1)}\vartheta = (\mathfrak{H}\vartheta, B_1\vartheta, B_2\vartheta, \dots$ $\dots, B_r\vartheta) = (\mathfrak{H}, B_1, B_2, \dots, B_r) = \mathfrak{H}^{(1)}$. Un élément arbitraire de $\mathfrak{H}^{(1)}$ peut être mis sous la forme $HB_1^{d_1}B_2^{d_2} \dots B_r^{d_r}$ ce qui est d'après (7) égal à HB. $(HB)\,\vartheta = (H\vartheta)\,(B\vartheta) = E$ signifie $B\vartheta \in \mathfrak{H}$, cela veut dire pour les classes d'après 2,55 $\bar{B}\bar{\vartheta} = \bar{E}$ et de 2,56 il suit $\bar{B} = \bar{E}$, d'où $B = E$. $\mathfrak{H}$ étant le sousgroupe maximum reproduit par ϑ, on a $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}$, cela veut dire $\bar{\mathfrak{G}}_p \neq \mathfrak{E}$, contrairement à la supposition faite au commencement de 2,57. Il en suit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ et ϑ est parfait.

2,6. **Définition.** Envisageons la décomposition (1) du § 1. Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$. Soit $H \in \mathfrak{H}$, la correspondance $H \to G_i$, où G_i est le composant de H dans $\mathfrak{G}_i$, est un homomorphisme que nous allons appeler *homomorphisme de décomposition.* D'une manière analogue nous parlerons d'un *isomorphisme de décomposition* et d'un *automorphisme de décomposition.* D'après M. Fitting [4], § 2, p. 382, nous allons désigner par γ_i l'automorphisme de décomposition qui fait correspondre à chaque élément $G = G_1 G_2 \ldots G_r$ son composant G_i dans le facteur $\mathfrak{G}_i$. On voit toute suite que chaque couple γ_i, γ_k, $i \neq k$, est sommable et d'après M. Fitting [4] l. c. on a les relations suivantes

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r = \varepsilon, \tag{11}$$
$$\gamma_i \gamma_i = \gamma_i, \quad \gamma_i \gamma_k = \varrho \quad \text{pour } i \neq k. \tag{12}$$

On vérifie aisément le lemme:

2,61. **Lemme.** *Chaque automorphisme de décomposition est normal.*

2,7. **Définition.** Soit $\mathfrak{G}$ un groupe avec un champ d'opérateurs Ω. *L'automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ est dit *admis par* Ω, si l'on a $\omega\vartheta = \vartheta\omega$ pour chaque $\omega \in \Omega$.

2,71. **Lemme.** *Le produit d'un nombre fini d'automorphismes admis par Ω et la somme de ces automorphismes, si elle existe, est un automorphisme admis par Ω.*

Démonstration. Quant au produit l'énoncé est évident. Envisageons la somme $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$. Nous avons d'après (1) et (2)

$$\omega\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) = \omega\vartheta_1 + \omega\vartheta_2 + \ldots + \omega\vartheta_n$$
$$(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)\,\omega = \vartheta_1\omega + \vartheta_2\omega + \ldots + \vartheta_n\omega$$

et les deux expressions sont identiques.

2,72. **Lemme.** *Si ϑ est un automorphisme de $\mathfrak{G}$ admis par Ω, le sousgroupe $\mathfrak{K}$, annulé par ϑ, est invariant par raport à Ω. Si, de plus, le sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$, reproduit par ϑ, est unique et satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, il est de même invariant par rapport à Ω.*

Démonstration. Soit $K \in \mathfrak{K}$ et soit d'après 2,3 n entier positif tel que $K\vartheta^n = E$. On a $(K\omega)\,\vartheta^n = (K\vartheta^n)\,\omega = E$, c'est-à-dire $\mathfrak{K}\omega \subseteq \mathfrak{K}$.

Soit $\mathfrak{F}$ le sousgroupe, formé par tous les éléments $F \in \mathfrak{H}$ pour lesquels $F\omega = E$. On a donc $\mathfrak{F}\omega = \mathfrak{E}$ et ensuite $(\mathfrak{F}\vartheta)\,\omega = (\mathfrak{F}\omega)\,\vartheta = \mathfrak{E}$, d'où $\mathfrak{F}\vartheta \subseteq \mathfrak{F}$. L'automorphisme ϑ étant propre pour $\mathfrak{H}$, il représente le sousgroupe $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ d'une manière isomorphe au sousgroupe $\mathfrak{F}\vartheta \subseteq \mathfrak{F}$. Mais, parce que $\mathfrak{H}$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, le cas $\mathfrak{F}\vartheta \subset \mathfrak{F}$ n'est possible.[10]) Or, on a $\mathfrak{F}\vartheta = \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ est reproduit par ϑ. Pour le sousgroupe $\mathfrak{H}\omega$, on a d'abord

$$\mathfrak{H}\omega = (\mathfrak{H}\vartheta)\,\omega = (\mathfrak{H}\omega)\,\vartheta. \tag{13}$$

Soit ensuite $H' \in \mathfrak{H}\omega$ et $H'\vartheta = E$. On peut déterminer un élément $H \in \mathfrak{H}$ tel que $H\omega = H'$. On a $E = H'\vartheta = (H\omega)\,\vartheta = (H\vartheta)\,\omega$, c'est-à-dire $(H\vartheta) \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ étant reproduit par ϑ, H est de même contenu dans $\mathfrak{F}$ et par conséquent $E = H\omega = H'$. ϑ représente $\mathfrak{H}\omega$ d'une manière isomorphe à $(\mathfrak{H}\omega)\,\vartheta$. En vertu de (13) $\mathfrak{H}\omega$ est donc reproduit par ϑ et parce que $\mathfrak{H}$ est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ: $\mathfrak{H}\omega \subseteqq \mathfrak{H}$.

2,73. Lemme. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe avec un champ d'opérateurs Ω. Soit* (1) *du* § 1 *une décomposition de $\mathfrak{G}$, où les $\mathfrak{G}_i$ sont invariants par rapport à Ω. En ce cas tous les automorphismes de décomposition γ_ι sont admis par Ω.*

Démonstration. D'après les suppositions, on a pour un $\omega \in \Omega$ et un $G \in \mathfrak{G}$ avec $G = G_1G_2\ldots G_r$: $G_k\omega = G'_k \in \mathfrak{G}_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, r$. On en tire d'un côté $G\gamma_i\omega = G_i\omega = G'_i$, d'autre côté $G\omega\gamma_i = [(G_1\omega)(G_2\omega)\ldots(G_r\omega)]\,\gamma_i = [G'_1G'_2\ldots G'_r]\,\gamma_i = G'_i\gamma_i = G'_i$, par conséquent $\gamma_i\omega = \omega\gamma_i$.

Nous aurons besoin encore du lemme suivant:

2,8. Lemme. *Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux automorphismes du groupe $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\vartheta_1\vartheta_2$ et $\mathfrak{K}$ un sousgroupe reproduit par $\vartheta_2\vartheta_1$. Soit de plus*

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{H}\vartheta_1 \subseteqq \mathfrak{K},\quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{K}\vartheta_2 \subseteqq \mathfrak{H}. \tag{14}$$

On a alors $\mathfrak{H}\vartheta_1 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}$ et les correspondances entre les éléments de $\mathfrak{H}$ et de $\mathfrak{K}$ y sont isomorphes.

En particulier, si $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_2\vartheta_1$ et si $\mathfrak{G}$ est reproduit par $\vartheta_1\vartheta_2$, $\mathfrak{G}$ est reproduit même par ϑ_1 et par ϑ_2.

Démonstration. On a

$$\mathfrak{H}\vartheta_1\vartheta_2 = \mathfrak{H},\quad \mathfrak{K}\vartheta_2\vartheta_1 = \mathfrak{K} \tag{15}$$

et on peut écrire

$$\mathfrak{H}\vartheta_1 = \mathfrak{K}',\quad \mathfrak{K}'\vartheta_2 = \mathfrak{H}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}',\quad \mathfrak{H}'\vartheta_1 = \mathfrak{K}. \tag{17}$$

Ici, les correspondances sont isomorphes, parce que, d'après la supposition, les correspondances (15) qui en résultent le sont aussi. De la seconde relation (16) et de la première relation (17) il résulte d'après (14) $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}'\vartheta_2 \subseteqq \mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}'$, ce qui donne d'après la seconde relation (14) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$. De la même manière on prouve l'égalité $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$. On parvient au cas particulier, si l'on pose $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, en tenant compte du fait qu'on a, en vertu de $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_2\vartheta_1$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$.

A la fin rappelons ce lemme démontré par M. Fitting [3], Hilfssatz 5, p. 20, qui est très important:

2,9. Lemme. *Envisageons la décomposition* (1) *du* § 1 *pour* $\mathfrak{G}$. *Soit* χ *un automorphisme de* $\mathfrak{G}$ *qui fait correspondre aux éléments de* $\mathfrak{G}_i$ *les éléments d'un certain sousgroupe* $\mathfrak{G}'_k$ *de* $\mathfrak{G}_k$, $i \neq k$. *Si* χ *est normal,* $\mathfrak{G}'_k$ *est un sousgroupe du centre de* $\mathfrak{G}_k$ *et par conséquent du centre de* $\mathfrak{G}$.

§ 3. Les produits directs de deux facteurs.

Dans ce qui suit nous revenons au cas d'un groupe $\mathfrak{G}$ ayant un champ d'opérateurs Ω. Soit $\mathfrak{C}$ le centre de $\mathfrak{G}$. Il se peut que $\mathfrak{C}$ n'est pas un sousgroupe invariant par rapport à Ω. Mais il existe toujours dans $\mathfrak{C}$ un sousgroupe maximum unique qui est invariant par rapport à Ω. Ce sousgroupe sera désigné par $\mathfrak{C}_\Omega$. Nous ferons maintenant sur $\mathfrak{G}$ la supposition suivante:

3,1. Supposition. $\mathfrak{C}_\Omega$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies.

3,2. Soient

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \tag{1}$$

deux décompositions distinctes du groupe $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs. Nous allons chercher un élargissement de la première et un élargissement de la seconde décomposition qui soient centralement isomorphes, l'un à l'autre. Pour ce but, nous allons désigner par γ_1, γ_2 les automorphismes de décomposition de la première décomposition et δ_1, δ_2 ceux de la seconde.[11]) Nous allons examiner ces automorphismes.[12])

3,21. Lemme. *Les sousgroupes* $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k$, $i \neq k$, $i, j, k = 1,\ 2$ *sont sousgroupes de* $\mathfrak{C}_\Omega$. *La même chose est vraie pour* $\mathfrak{G}\delta_i\gamma_j\delta_k = \mathfrak{H}_i\delta_i\gamma_j\delta_k$. *Par conséquent* $\gamma_i\delta_1\gamma_k$, $\gamma_i\delta_2\gamma_k$ *et* $\delta_i\gamma_1\delta_k$, $\delta_i\gamma_2\delta_k$ *sont sommables et on a*

$$\gamma_i\delta_1\gamma_k + \gamma_i\delta_2\gamma_k = \varrho,\ \delta_i\gamma_1\delta_k + \delta_i\gamma_2\delta_k = \varrho,\quad i \neq k,\quad i, k = 1, 2, \tag{2}$$

ce qui peut être écrit:

$$\gamma_i\delta_1\gamma_k = -\gamma_i\delta_2\gamma_k,\ \delta_i\gamma_1\delta_k = -\delta_i\gamma_2\delta_k. \tag{3}$$

Démonstration. $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ avec $i \neq k$ est un automorphisme normal (voir 2,61) pour lequel on a $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k = (\mathfrak{G}\gamma_i)\,\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\delta_j\gamma_k \subseteqq \mathfrak{G}_k$. Ce sousgroupe est alors, en vertu de 2,9, un sousgroupe du centre et, en vertu de 2,73 et 2,71, un sousgroupe de $\mathfrak{C}_\Omega$. On a maintenant d'après (11) et (12) du § 2: $\varrho = \gamma_i\gamma_k = \gamma_i\,\varepsilon\,\gamma_k =$

---

[11]) J'attire l'attention du lecteur au fait que l'automorphisme de décomposition γ_1 n'est pas déterminé par le facteur direct $\mathfrak{G}_1$ seul, mais simultanément par ce facteur et par son facteur complémentaire $\mathfrak{G}_2$. En effet, s'il existe une autre décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}'_2$ avec $\mathfrak{G}'_2 \neq \mathfrak{G}_2$, on a pour les automorphismes de décomposition respectifs γ'_1, γ'_2 : $\gamma'_1 \neq \gamma_1$, $\gamma'_2 \neq \gamma_2$.

[12]) Les lemmes 3,21, 3,23, 3,24, 3,25 sont vrais même sans la supposition 3,1.

$= \gamma_i(\delta_1 + \delta_2)\gamma_k = \gamma_i\delta_1\gamma_k + \gamma_i\delta_2\gamma_k$. $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k$ étant abélien, l'expression $-\gamma_i\delta_j\gamma_k$ a un sens. On a une preuve analogue pour $\delta_i\gamma_1\delta_k$, $\delta_i\gamma_2\delta_k$.

3,22. Lemme. *Posons* $\mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}''_k$, $\mathfrak{H}_i\delta_i\gamma_j\delta_k = \mathfrak{H}''_k$, $i, j, k = 1, 2$, $i \neq k$ *et* $\mathfrak{D}_{rs} = \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{H}_s$, $r, s = 1, 2$. *Les homomorphismes*: $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ *entre* $\mathfrak{G}_i$ *et* $\mathfrak{G}''_k$ *et* $\delta_i\gamma_j\delta_k$ *entre* $\mathfrak{H}_i$ *et* $\mathfrak{H}''_k$ *engendrent les isomorphismes suivants*

$$\mathfrak{G}_i/(\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}) \cong \mathfrak{G}''_k, \qquad \mathfrak{H}_i/(\mathfrak{D}_{ji} \times \mathfrak{D}_{li}) \cong \mathfrak{H}''_k,$$

où $l = 1, 2$, $l \neq j$. *Ici, à cause de* 3, 21 *et* 3,1, *les groupes-quotients sont abéliens et satisfont à la supposition des chaînes descendantes finies.*

Démonstration. D'abord le sousgroupe $\mathfrak{D}_{rs}$, étant la partie commune de deux sousgroupes normaux de $\mathfrak{G}$, est lui-même un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$. Il est $\mathfrak{D}_{ij} \cap \mathfrak{D}_{il} \subseteq \mathfrak{H}_j \cap \mathfrak{H}_l = \mathfrak{E}$, par conséquent $\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$ existe dans $\mathfrak{G}$. On a ensuite $\mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\delta_j\gamma_k$. Posons $\mathfrak{G}_i\delta_j = \mathfrak{H}'_j$. Tous les éléments de $\mathfrak{G}_i$ auxquels l'automorphisme δ_j fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{il} = \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{H}_l$. De même on a $\mathfrak{H}'_j \supseteq \mathfrak{D}_{ij}$ et tous les éléments de $\mathfrak{H}'_j$ auxquels l'automorphisme γ_k fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij}$. Parce que δ_j laisse invariant chaque élément de $\mathfrak{D}_{ij}$, tous les éléments de $\mathfrak{G}_i$ auxquels l'automorphisme $\delta_j\gamma_k$ fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$. Le lemme pour $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ est maintenant la conséquence du théorème sur l'homomorphisme. On a une démonstration analogue pour $\delta_i\gamma_j\delta_k$.

3,23. Lemme. *Posons*

$$\varkappa_{ij} = \gamma_i\delta_j\gamma_i, \quad \lambda_{ij} = \delta_i\gamma_j\delta_i, \quad i, j = 1, 2.$$

Les automorphismes $\varkappa_{i1}, \varkappa_{i2}$ et $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$, $i = 1, 2$, sont *sommables et il est*

$$\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2} = \gamma_i, \quad \lambda_{i1} + \lambda_{i2} = \delta_i, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Démonstration. D'après (11) et (12) du § 2 il est

$$\gamma_i = \gamma_i\gamma_i = \gamma_i\,\varepsilon\,\gamma_i = \gamma_i(\delta_1 + \delta_2)\gamma_i = \gamma_i\delta_1\gamma_i + \gamma_i\delta_2\gamma_i = \varkappa_{i1} + \varkappa_{i2}$$

et on a une relation analogue pour δ_i.

3,24. Lemme. *Il est* $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2} = \varkappa_{i2}\varkappa_{i1}$, $\lambda_{i1}\lambda_{i2} = \lambda_{i2}\lambda_{i1}$, $i = 1, 2$.

Démonstration. D'après (3) on a par exemple pour $\varkappa_{11}\varkappa_{12}$

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12} = \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1 = -\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1 = -\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_1 = \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1\gamma_1 = \\ = \varkappa_{12}\varkappa_{11}.$$

3,25. Lemme. *Il est*

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22} = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}.$$

Démonstration. Les sommes existent, car, par exemple, pour la première, on a $\mathfrak{G}\varkappa_{11}\varkappa_{12} = (\mathfrak{G}\varkappa_{11})\varkappa_{12} \subseteq \mathfrak{G}\varkappa_{12} \subseteq \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}\varkappa_{21}\varkappa_{22} = (\mathfrak{G}\varkappa_{21})\varkappa_{22} \subseteq \mathfrak{G}\varkappa_{22} \subseteq \mathfrak{G}_2$. On peut écrire la première somme, en vertu de (11), (1), (2) du § 2, et de 3,24, sous la forme

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12}+\varkappa_{21}\varkappa_{22} = (\varkappa_{11}\varkappa_{12}+\varkappa_{22}\varkappa_{21})\,\varepsilon = (\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1+\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2)\,(\delta_1+\delta_2) =$$
$$= \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1 + \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_2$$

et la seconde, sous la forme

$$\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{21}\lambda_{22} = \varepsilon\,(\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{22}\lambda_{21}) = (\gamma_1+\gamma_2)\,(\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1+\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2) =$$
$$= \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1 + \gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1 + \gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2.$$

D'après (3) il est ici

$$\begin{aligned}
\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1 &= -\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_1 = \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1,\\
\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1 &= -\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1 = \gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1,\\
\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2 &= -\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2 = \gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2,\\
\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_2 &= -\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_2 = \gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

3,3. Nous ferons voir que les automorphismes $\varkappa_{ik}$, $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$, λ_{ik}, $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$ sont parfaits.

3,31. Lemme. *Les automorphismes* $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ *et* $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$, $i = 1, 2$, *sont parfaits pour* $\mathfrak{G}_i$ *et* $\mathfrak{H}_i$. *On peut alors écrire*

$$\mathfrak{G}_i = \overline{\mathfrak{G}_i} \times \mathfrak{K}_i \quad et \quad \mathfrak{H}_i = \overline{\mathfrak{H}_i} \times \mathfrak{L}_i,$$

où $\overline{\mathfrak{G}_i}$ *resp.* $\overline{\mathfrak{H}_i}$ *est le sousgroupe maximum de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *reproduit par* $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ *resp.* $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$, *et* $\mathfrak{K}_i$ *resp.* $\mathfrak{L}_i$ *le sousgroupe de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *annulé par* $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ *resp.* $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$.

Démonstration. Nous donnons la preuve pour $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ et $\mathfrak{G}_i$. On a d'après la définition $\mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2} = \mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_1\gamma_i\delta_2\gamma_i = \mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_i\delta_2\gamma_i$. D'après 3,21 $\mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_i\delta_2$ et par conséquent de même $\mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_2\gamma_{ii}\delta$ est un sousgroupe de $\mathfrak{C}_\Omega$, car γ_i fait correspondre à un sousgroupe invariant du centre de même un sousgroupe invariant du centre. Ce sousgroupe est alors abélien et, d'après la supposition 3,1, il satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. Le sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}_i} \subseteq \mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ est donc normal. D'après le théorème sur l'homomorphisme, l'automorphisme $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ engendre l'isomorphisme suivant

$$\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i^{(1)} \cong \mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2},$$

où $\mathfrak{K}_i^{(1)}$ a la même signification pour $\mathfrak{K}_i$ comme $\mathfrak{K}^{(1)}$ pour $\mathfrak{K}$ à 2,3. $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i^{(1)}$ et, par conséquent aussi $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i$, est un sousgroupe abélien, satisfaisant à la supposition des chaînes descendantes finies. En vertu du théorème 2,5 $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ est parfait pour $\mathfrak{G}_i$. Les décompositions (1) étant invariantes par rapport à Ω, les automorphismes γ_i, δ_i, $i = 1, 2$, sont, en vertu de 2,73 et 2,71, admis par Ω. Le lemme 2,72 fait voir que $\overline{\mathfrak{G}_i}$ et $\mathfrak{K}_i$ sont invariants par rapport à Ω.

3,32. Lemme. *L'automorphisme* $\varkappa_{ij}$ *est parfait pour* $\mathfrak{G}_i$, *l'automorphisme* λ_{ij}, *parfait pour* $\mathfrak{H}_i$, $i, j = 1, 2$. *On peut donc écrire,* *en posant* $l = 1, 2,\ l \neq j$:

$$\mathfrak{G}_i = \overline{\mathfrak{G}}_{ij} \times \mathfrak{K}_{il} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{H}_i = \overline{\mathfrak{H}}_{ji} \times \mathfrak{L}_{li},$$

où $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ *resp.* $\overline{\mathfrak{H}}_{ji}$ *est le sousgroupe maximum de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *reproduit par* $\varkappa_{ij}$ *resp.* λ_{ij}. $\mathfrak{K}_{il}$ *resp.* $\mathfrak{L}_{li}$ *est le sousgroupe de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *annulé par* $\varkappa_{ij}$ *resp.* λ_{ij}.

Démonstration. Nous donnons la preuve pour $\varkappa_{ij}$ et $\mathfrak{G}_i$. Prenons le sousgroupe $\mathfrak{D}_{il}$ de 3,22. De $\mathfrak{D}_{il} \subseteqq \mathfrak{H}_l$ on tire $D_{il}\delta_j = E$ pour chaque $D_{il} \in \mathfrak{D}_{il}$ et à plus forte raison $D_{il}\varkappa_{ij} = D_{il}\delta_j\gamma_i = E$. On a donc $\mathfrak{D}_{il} \subseteqq \mathfrak{K}_{il}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{K}_{il}$. Il est d'autre part $D_{ij}\varkappa_{ij} = D_{ij}\gamma_i\delta_j\gamma_i = D_{ij}\delta_j\gamma_i = D_{ij}\gamma_i = D_{ij}$ pour chaque $D_{ij} \in \mathfrak{D}_{ij}$. On a donc $\mathfrak{D}_{ij} \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}_i$. L'automorphisme $\varkappa_{ij}$ engendre alors un automorphisme $\bar{\varkappa}_{ij}$ du groupe-quotient $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} = \widetilde{\mathfrak{G}}_i$. $\bar{\varkappa}_{ij}$ fait correspondre à ce groupe le groupe $(\mathfrak{G}_i\varkappa_{ij})/\mathfrak{D}_{ij}$. Il en suit que le sousgroupe de $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij}$ annulé par $\bar{\varkappa}_{ij}$ est $\mathfrak{D}_{ij} \,.\, \mathfrak{K}_{il}/\mathfrak{D}_{ij} = \overline{\mathfrak{K}}_{li} \supseteqq \mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}/\mathfrak{D}_{ij}$ et le sousgroupe maximum reproduit par $\bar{\varkappa}_{ij}$ est $\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij}$. D'après le second théorème sur l'isomorphisme on a

$$(\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij})/(\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}/\mathfrak{D}_{ij}) \;\cong\; \mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$$

et nous avons vu à 3,22 que ce dernier groupe-quotient est abélien et satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. La même chose est donc vraie pour $\widetilde{\mathfrak{G}}_i/\overline{\mathfrak{K}}_{il}$. On a d'après le premier theorème sur l'isomorphisme

$$\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij} \;\cong\; (\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}) \,.\, \overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il} \;\subseteqq\; \mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}.$$

Ce dernier groupe-quotient étant abélien, $\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij}$ est un sous-groupe normal de $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$. En vertu de 2,5 $\bar{\varkappa}_{ij}$ est donc parfait pour $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$. Chaque élément de $\mathfrak{D}_{ij}$ étant invariant par rapport à $\varkappa_{ij}$, il en suit que $\varkappa_{ij}$ est parfait pour $\mathfrak{G}_i$.

3,33. Lemme. *Il est*

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2}, \quad \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_{1i} \times \mathfrak{L}_{2i}, \quad i = 1, 2.$$

3,34. Lemme. $\mathfrak{K}_{ij}$ *est reproduit par* $\varkappa_{ij}$. *De même* $\mathfrak{L}_{ji}$ *est reproduit par* λ_{ij}. $i, j = 1, 2$.

Démonstration. Nous allons prouver la première formule du lemme 3,33 et la première partie du lemme 3,34. On a d'abord $\mathfrak{K}_{i1} \cap \mathfrak{K}_{i2} = \mathfrak{E}$. Soit $K \in \mathfrak{K}_{i1}$, $K \in \mathfrak{K}_{i2}$. D'après 2,3 deux nombres entiers positifs n_1, n_2 existent tels que $K\varkappa_{i1}^{n_1} = E$, $K\varkappa_{i2}^{n_2} = E$. D'après 3,23 et (12) du § 2 il est $K = K\gamma_i = K\gamma_i^{n_1+n_2} = K(\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2})^{n_1+n_2} = E$, car $(\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2})^{n_1+n_2}$ est égal à la somme des termes $\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r}\varkappa_{i2}^{r}$, où $0 \leqq r \leqq n_1 + n_2$. Or, on a, ou $n_1 + n_2 - r > n_1$, ou $r \geqq n_2$, par conséquent $K\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r}\varkappa_{i2}^{r} = K\varkappa_{i2}^{r}\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r} = E$.

Soit $K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$ avec $K_{i2}\varkappa_{i1}^n = E$ d'après 2,3. Il est $(K_{i2}\varkappa_{i2})\,\varkappa_{i1}^n = (K_{i2}\varkappa_{i1}^n)\,\varkappa_{i2} = E$, donc $K_{i2}\varkappa_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$. Or, $\varkappa_{i2}$ fait correspondre à $\mathfrak{K}_{i2}$ un sousgroupe $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} \subseteqq \mathfrak{K}_{i2}$. Cette correspondance est isomorphe, car $K_{i2}\varkappa_{i2} = E$ signifie $K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i1}$, d'où on tire $K_{i2} = E$. Si l'on avait $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} \subset \mathfrak{K}_{i2}$, une chaîne descendante infinie existerait dans $\mathfrak{K}_{i2}$.[10]) A 3,22 on a vu $\mathfrak{K}_{i2} \supseteqq \mathfrak{D}_{i2}$ et à 3,32 on a vu $\overline{\mathfrak{G}}_{i1} \supseteqq \mathfrak{D}_{i1}$. Chaque élément de $\mathfrak{D}_{i2}$ étant invariant par rapport à $\varkappa_{i2}$, il serait $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i}{}^{n}{}_{2} \supseteqq \mathfrak{D}_{i2}$ pour chaque n. Il existerait donc dans

$$\mathfrak{K}_{i2}/\mathfrak{D}_{i2} \cong \mathfrak{D}_{i1} \,.\, \mathfrak{K}_{i2}/(\mathfrak{D}_{i1} \times \mathfrak{D}_{i2}) \subseteqq \mathfrak{G}_i/(\mathfrak{D}_{i1} \times \mathfrak{D}_{i2})$$

une chaîne descendante infinie ce qui est contraire à 3,22. Par conséquent $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} = \mathfrak{K}_{i2}$ et $\mathfrak{K}_{i2}$ est reproduit par $\varkappa_{i2}$. De même $\mathfrak{K}_{i1}$ est reproduit par $\varkappa_{i1}$. Le lemme 3,34 est donc démontré.

On a évidemment en vertu de 3,24 $\mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2} \subseteqq \mathfrak{K}_i$. Soit $K_i \in \mathfrak{K}_i$, il existe un entier positif n tel que $E = K_i(\varkappa_{i1}\varkappa_{i2})^n = (K_i\varkappa_{i1}^n)\,\varkappa_{i2}^n$, d'où il suit $K_i\varkappa_{i1}^n = K'_{i1} \in \mathfrak{K}_{i1}$. $\mathfrak{K}_{i1}$ étant reproduit par $\varkappa_{i1}$, on peut y trouver l'élément K_{i1} tel que $K_{i1}\varkappa_{i1}^n = K'_{i1}$. Or, $(K_{i1}^{-1}K_i)\,\varkappa_{i1}^n = E$, c'est-à-dire $K_{i1}^{-1}K_i = K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$ et $K_i = K_{i1}K_{i2}$. On a donc $\mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i1} \supseteqq \mathfrak{K}_i$ et le lemme 3,33 est démontré.

3,4. Nous allons prouver quelques lemmes concernant les décompositions de $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{H}_i$.

3,41. Lemme. *On a*

$$\mathfrak{G}_i = \overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2}, \quad \mathfrak{H}_i = \overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{1i} \times \mathfrak{L}_{2i}, \quad i = 1, 2.$$

Les sousgroupes maximum reproduits par $\varkappa_{i1}, \varkappa_{i2}, \varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ *sont ici* $\overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i1}$, $\overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i2}$, $\overline{\mathfrak{G}}_i$ *respectivement, les sousgroupes maximum reproduits par* $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i1}\lambda_{i2}$ *sont* $\overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{i1}$, $\overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{i2}$, $\overline{\mathfrak{H}}_i$ *respectivement.*

Démonstration. En vertu du cas particulier du lemme 2,8 $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est reproduit en même temps par $\varkappa_{i1}$ et par $\varkappa_{i2}$. Le lemme est maintenant la conséquence de 3,33 et 3,34.

3,42. Lemme. *On a*

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_2 = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_2.$$

3,43. Lemme. *On a*

$$\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22} = \mathfrak{L}_{11} \times \mathfrak{L}_{21} \times \mathfrak{L}_{12} \times \mathfrak{L}_{22}.$$

Démonstration. On trouve aisément que $\overline{\mathfrak{G}}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_2$ est le sousgroupe maximum de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}$, car on a pour chaque $G = G_1G_2 \in \mathfrak{G}$, où $G_i \in \mathfrak{G}_i$: $G(\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}) = (G_1G_2)\,(\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}) = (G_1\varkappa_{11}\varkappa_{12})\,(G_2\varkappa_{21}\varkappa_{22})$. De même $\overline{\mathfrak{H}}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_2$ est le sousgroupe maximum de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}$. La relation de 3,42 est maintenant la conséquence de 3,25. Par la même raison $\overline{\mathfrak{K}}$ est le sousgroupe annulé par $\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}$ et par $\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}$, d'où il suit la relation 3,43.

3,5. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient* (1) *deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs. L'élargissement de la première décomposition*

$$\mathfrak{G} = (\overline{\mathfrak{G}}_1 \times \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12}) \times (\overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}) \tag{5}$$

est centralement isomorphe à l'élargissement de la seconde décomposition:

$$\mathfrak{G} = (\overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{L}_{11} \times \mathfrak{L}_{21}) \times (\overline{\mathfrak{H}}_2 \times \mathfrak{L}_{12} \times \mathfrak{L}_{22}) \tag{6}$$

de sorte qu'on a les isomorphismes centraux suivants:

$$\overline{\mathfrak{G}}_i \cong \overline{\mathfrak{H}}_k, \text{ pour chaque } i \text{ et } k,$$
$$\mathfrak{K}_{ik} \cong \mathfrak{L}_{ik}, \quad i, k = 1, 2.$$

L'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ de (5) *le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ pour chaque i et k, $i, k = 1, 2$. δ_k fait de plus correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ de* (5) *le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ de* (6). *Inversement γ_i fait correspondre au facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ et au facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$. Il en suit que l'ensemble de tous les composants de $\overline{\mathfrak{G}}_i$ dans $\mathfrak{H}_k$ constitue le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$, l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{K}_{ik}$, le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$. Une chose analogue est vraie pour les composants de $\overline{\mathfrak{H}}_k$ et $\mathfrak{L}_{ik}$ dans $\mathfrak{G}_i$.*

Démonstration. D'après 3,41, (5) est l'élargissement de la première décomposition (1), (6), de la seconde. D'après la démonstration de 3,41 $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est reproduit par $\varkappa_{ik}$, $\overline{\mathfrak{H}}_k$ par λ_{ki}, $i, k = 1, 2$. On a $\overline{\mathfrak{G}}_i = \overline{\mathfrak{G}}_i\varkappa_{ik} = \overline{\mathfrak{G}}_i\delta_k\gamma_i$, $\overline{\mathfrak{H}}_k = \overline{\mathfrak{H}}_k\lambda_{ki} = \overline{\mathfrak{H}}_k\gamma_i\delta_k$. De 3,42 résultent les relations suivantes

$$\overline{\mathfrak{G}}_i\delta_k \subseteq \overline{\mathfrak{H}}_k, \quad \overline{\mathfrak{H}}_k\gamma_i \subseteq \overline{\mathfrak{G}}_i.$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2,8 avec $\vartheta_1 = \delta_k$, $\vartheta_2 = \gamma_i$. Il en suit que l'automorphisme de décomposition γ_i fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ de (5) le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ de (6) et l'automorphisme de décomposition γ_i au facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$. Soit K_{11} un élément arbitraire de $\mathfrak{K}_{11}$. On a d'après 3,43 dans (6) la décomposition $K_{11} = L_{11}L_{21}L_{12}L_{22}$ avec $L_{ik} \in \mathfrak{L}_{ik}$. Soit n l'entier positif tel que $K_{11}\varkappa_{12}^n = E$. On trouve aisément d'après (3) $\varkappa_{12}{}^n\delta_1 = \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2 \ldots \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1 = \gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1\gamma_2 \ldots \gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1 = \gamma_1\lambda_{12}{}^n$. Par conséquent il est $E = K_{11}\varkappa_{12}{}^n\delta_1 = K_{11}\gamma_1\lambda_{12}{}^n = K_{11}\lambda_{12}{}^n = (L_{11}L_{21}L_{12}L_{22})\,\lambda_{12}{}^n = (L_{11}\lambda_{12}{}^n)\,(L_{21}\lambda_{12}{}^n)$. D'après 3,32 on a $(L_{11}\lambda_{12}{}^n) \in \mathfrak{L}_{11}$ et d'après 3,34 $(L_{21}\lambda_{12}{}^n) \in \mathfrak{L}_{21}$ et par conséquent $L_{11}\lambda_{12}{}^n = E$,

$L_{21}\lambda_{12}^n = E$. λ_{12} étant propre pour $\mathfrak{L}_{21}$, il en suit $L_{21} = E$. Le composant de K_{11} dans $\mathfrak{H}_1$ est l'élément $L_{11} \in \mathfrak{L}_{11}$ et on a $\mathfrak{K}_{11}\delta_1 \subseteqq \mathfrak{L}_{11}$. D'une manière générale il est $\mathfrak{K}_{ik}\delta_k \subseteqq \mathfrak{L}_{ik}$ et inversement $\mathfrak{L}_{ik}\gamma_i \subseteqq \mathfrak{K}_{ik}$. Maintenant on prouve au moyen du lemme 2,8 par le même raisonnement comme auparavant que l'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ de (5) le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ de (6) et l'automorphisme de décomposition γ_i, au facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$.

Comme on sait, ces faits ont pour, conséquence qu'on peut remplacer dans la décomposition (5) le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ par $\overline{\mathfrak{H}}_k$ et le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ par $\mathfrak{L}_{ik}$. Prouvons-le, par exemple, pour $\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{H}}_1$. Le composant d'un $\overline{H}_1 \in \overline{\mathfrak{H}}_1$, $\overline{H}_1 \neq E$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_1$ est différent de E, parce que $\mathfrak{H}_1\gamma_1 = \mathfrak{G}_1$ est une relation isomorphe. Il en suit que

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 \cap (\mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}) = \mathfrak{E}.$$

Or, il existe dans $\mathfrak{G}$ le produit direct

$$\mathfrak{G}' = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}.$$

Soit $\overline{G}_1$ un élément de $\overline{\mathfrak{G}}_1$. D'après ce qui a été dit sur γ_1, on peut trouver un élément $H_1 \in \overline{\mathfrak{H}}_1$ tel que $\overline{H}_1 = \overline{G}_1 K_{11} K_{12} \overline{G}_2 K_{21} K_{22}$, d'où $\overline{G}_1 = \overline{H}_1^{-1} K_{11} K_{12} \overline{G}_2 K_{21} K_{22}$. Or, on a $\overline{\mathfrak{G}}_1 \subseteqq \mathfrak{G}'$ et par conséquent $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$. On peut faire un raisonnement analogue pour les autres facteurs. On en obtient d'après un lemme connu, démontré par M. Schmidt [1], § 4, Hilfssatz I, p. 38, les isomorphismes centraux $\overline{\mathfrak{G}}_i \cong \overline{\mathfrak{H}}_k$, $\mathfrak{K}_{ik} \cong \mathfrak{L}_{ik}$. Le théorème 3,5 est donc démontré.

3,6. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient* (1) *deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs. On peut toujours trouver un élargissement de la première décomposition*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \mathfrak{G}_{21} \times \mathfrak{G}_{22} \textit{ avec } \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \tag{7}$$

et un élargissement de la seconde décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21} \times \mathfrak{H}_{12} \times \mathfrak{H}_{22} \textit{ avec } \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{1i} \times \mathfrak{H}_{2i} \tag{8}$$

qui sont centralement isomorphes de sorte qu'on a entre les facteurs les isomorphismes centraux $\mathfrak{G}_{ik} \cong \mathfrak{H}_{ik}$, $i, k = 1, 2$.

Démonstration. Il suffit de poser par exemple

$$\mathfrak{G}_{11} = \overline{\mathfrak{G}}_1 \times \mathfrak{K}_{11},\ \mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{K}_{12},\ \mathfrak{G}_{21} = \mathfrak{K}_{21},\ \mathfrak{G}_{22} = \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{22}$$

$$\mathfrak{H}_{11} = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{L}_{11},\ \mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{L}_{12},\ \mathfrak{H}_{21} = \mathfrak{L}_{21},\ \mathfrak{H}_{22} = \overline{\mathfrak{H}}_2 \times \mathfrak{L}_{22}.$$

Puis on tire aisément du théorème 3,5 la remarque suivante:

Remarque. L'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ de (7) le facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ de (8) pour chaque i et k. Inversement, la chose analogue est vraie pour l'automorphisme de décomposition γ_i. Par conséquent l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{G}_{ik}$ dans $\mathfrak{H}_k$ constitue le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ et l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{H}_{ik}$ dans $\mathfrak{G}_i$ constitue le facteur $\mathfrak{G}_{ik}$.

De cette remarque on obtient le théorème par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 3,5.

§ 4. Les produits directs de n facteurs.

En partant du théorème 3,6, on obtient par l'induction double le théorème suivant:

4,1. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_r \tag{1}$$

et

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_s \tag{2}$$

deux décompositions de $\mathfrak{G}$ en produits directs de r et s facteurs, r et s étant deux entiers positifs arbitraires. On peut toujours trouver un élargissement de (1)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1s} \times \mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{2s} \times \mathfrak{G}_{31} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{rs}$$

avec (3)

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{is}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

et un élargissement de (2)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r1} \times \mathfrak{H}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{22} \times \mathfrak{H}_{13} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{rs} \tag{4}$$

avec

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{1i} \times \mathfrak{H}_{2i} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{ri}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

qui sont centralement isomorphes de sorte qu'on a entre les facteurs les isomorphismes centraux

$$\mathfrak{G}_{ik} \cong \mathfrak{H}_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad k = 1, 2, \ldots, s.\text{[13]}$$

Démonstration. Si l'on a deux décompositions du groupe $\mathfrak{G}$ qui sont centralement isomorphes, on peut toujours trouver à l'élargissement arbitraire de la première décomposition un élargissement de la seconde qui lui est centralement isomorphe. D'après 3,6 le theorème est vrai pour $r = 2$, $s = 2$. Dans ce qui suit on

[13]) En partant de la remarque ajoutée au théorème 3,6 et en arrangeant les deux inductions par lesquelles se fait la démonstration d'une manière convenable, on démontre de plus le fait suivant: Si l'on décompose les éléments de $\mathfrak{G}_{ik}$ d'après la décomposition (4), l'ensemble de composants de tous les éléments de $\mathfrak{G}_{ik}$ dans $\mathfrak{H}_{ik}$ forme le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ tout entier. L'automorphisme de décomposition: $G \to$ composant de G dans le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ de (4) fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$. Je ne donne pas ici la démonstration de cette assertion.

désigne par les mêmes indices auprès des facteurs $\mathfrak{G}_{ik}$ et $\mathfrak{H}_{ik}$ le fait que ces deux facteurs sont centralement isomorphes.

I. Posons $r = 2$ et supposons que le théorème soit vrai pour $s - 1$. On part de la décomposition (1) avec $r = 2$ et de la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{s-2} \times \overline{\mathfrak{H}}_{s-1}, \tag{5}$$

où

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \mathfrak{H}_{s-1} \times \mathfrak{H}_s. \tag{6}$$

D'après la supposition on peut trouver un élargissement de (1)

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1,s-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{1,s-1}) \times (\mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{2,s-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{2,s-1}) \tag{7}$$

et un élargissement de (5)

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = (\mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21}) \times (\mathfrak{H}_{12} \times \mathfrak{H}_{22}) \times \ldots \times (\mathfrak{H}_{1,s-2} \times \mathfrak{H}_{2,s-2}) \times \\ \times (\overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}),\end{aligned} \tag{8}$$

où

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}, \tag{9}$$

qui sont centralement isomorphes. D'après 3,6, on peut trouver élargissements de (6) et (9):

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = (\mathfrak{H}_{1,s-1} \times \mathfrak{H}_{2,s-1}) \times (\mathfrak{H}_{1,s} \times \mathfrak{H}_{2,s}), \tag{10}$$

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = (\overline{\mathfrak{H}}^{(1)}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}^{(2)}_{1,s-1}) \times (\overline{\mathfrak{H}}^{(1)}_{2,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}^{(2)}_{2,s-1}) \tag{11}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{H}_{i,s-1} \cong \overline{\mathfrak{H}}^{(1)}_{i,s-1}, \mathfrak{H}_{i,s} \cong \overline{\mathfrak{H}}^{(2)}_{i,s-1}$. En remplaçant dans la décomposition (8) $\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}$ par (10) et par (11), on obtient deux élargissements de (8), centralement isomorphes. Le premier d'eux est la décomposition (4). (7) et (8) étant centralement isomorphes, on peut trouver un élargissement de (7) qui est centralement isomorphe au second élargissement que nous venons d'obtenir et par conséquent centralement isomorphe à (4). Pour cela on n'a qu'à décomposer $\overline{\mathfrak{G}}_{1,s-1} = \mathfrak{G}_{1s-1} \times \mathfrak{G}_{1,s}$ et $\overline{\mathfrak{G}}_{2,s-1} = \mathfrak{G}_{2,s-1} \times \mathfrak{G}_{2,s}$ avec $\mathfrak{G}_{i,s-1} \cong \overline{\mathfrak{H}}^{(1)}_{i,s-1}$, $\mathfrak{G}_{i,s} \cong \overline{\mathfrak{H}}^{(2)}_{i,s-1}$, $i = 1, 2$. On obtient ainsi la décomposition (3) avec $r = 2$. Le théorème est donc vrai pour $r = 2$ et s quelconque.

II. Supposons que le théorème soit vrai pour $r - 1$ et s quelconque. On part de la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1}, \tag{12}$$

où

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \mathfrak{G}_{r-1} \times \mathfrak{G}_r, \tag{13}$$

et de la décomposition (2). D'après la supposition il existe un élargissement de (12)

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1s} \times \mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-2,s} \times \\ \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s},\end{aligned} \tag{14}$$

où

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,2} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s}, \tag{15}$$

et un élargissement de (2)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r-2,1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{r-1,1} \times \mathfrak{H}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r-2,s} \times \overline{\mathfrak{H}}_{r-1,s} \tag{16}$$

qui sont centralement isomorphes. D'après I on peut trouver élargissements de (13) et (15)

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = (\mathfrak{G}_{r-1,1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-1,s}) \times (\mathfrak{G}_{r,1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r,s}), \tag{17}$$

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = (\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,1} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,1}) \times \ldots \times (\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,s} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,s}) \tag{18}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{G}_{r-1,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,i}$, $\mathfrak{G}_{r,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,i}$. En remplaçant dans la décomposition (14) $\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,2} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s}$ par (17) et par (18), on obtient deux élargissements de (14) centralement isomorphes. Le premier d'eux est précisement la décomposition (3). (14) et (16) étant centralement isomorphes, on peut trouver un élargissement de (16) qui est centralement isomorphe au second élargissement que nous venons d'obtenir et par conséquent centralement isomorphe à (3). Pour cela on n'a qu'à décomposer: $\overline{\mathfrak{H}}_{r-1,i} = \mathfrak{H}_{r-1,i} \times \mathfrak{H}_{r,i}$ avec $\mathfrak{H}_{r-1,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,i}$, $\mathfrak{H}_{r,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,i}$. On obtient ainsi la décomposition (4). Le théorème est vrai pour r et s quelconque.

La conséquence immédiate de 4,1 est le théorème:

4,2. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Supposons que $\mathfrak{G}$ possède une décomposition irréductible. En ce cas, chaque décomposition de $\mathfrak{G}$ en produit direct peut être élargie en une décomposition irréductible et deux décompositions irréductibles quelconques sont centralement isomorphes, l'une à l'autre.*

§ 5. La substitution des facteurs dans deux décompositions centralement isomorphes.

5,1. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Étant données deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$, on peut toujours trouver un élargissement*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \ldots \times \mathfrak{U}_q \tag{1}$$

de la première décomposition et un élargissement

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_q \tag{2}$$

de la seconde décomposition qui sont centralement isomorphes et qui ont la propriété suivante: On peut substituer pour un ensemble quelconque des facteurs $\mathfrak{U}_i$, par exemple pour $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_t$, $1 \leqq t \leqq q-1$, certains facteurs de la seconde décomposition qui sont centralement isomorphes aux facteurs choisis $\mathfrak{U}_i$ de sorte qu'on *obtient ainsi une nouvelle décomposition de $\mathfrak{G}$, centralement isomorphe à* (1) *et* (2), *dans notre exemple la décomposition*:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_{k_1} \times \mathfrak{B}_{k_2} \times \ldots \times \mathfrak{B}_{k_t} \times \mathfrak{U}_{t+1} \times \ldots \times \mathfrak{U}_q.$$

avec les isomorphismes centraux $\mathfrak{B}_{k_i} \cong \mathfrak{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

5,2. Avant d'aborder la démonstration de 5,1, nous allons démontrer deux lemmes.

5,21. Lemme.[14]) *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe irréductible qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soit ϑ un automorphisme propre pour $\mathfrak{G}$ qui est la somme $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ de deux automorphismes de $\mathfrak{G}$ tels que les automorphismes $\vartheta_1\vartheta^{-1}$, $\vartheta_2\vartheta^{-1}$ sont parfaits pour $\mathfrak{G}$. En ce cas, au moins un des automorphismes ϑ_1 et ϑ_2 est propre pour $\mathfrak{G}$.*

Démonstration. On conclut de $(\vartheta_i\vartheta^{-1})\,\vartheta = \vartheta_i$, $i = 1, 2$ que les automorphismes ϑ_i et $\vartheta_i\vartheta^{-1}$ sont en même temps, ou propres pour $\mathfrak{G}$, ou ne le sont pas. Supposons alors que ϑ_1 et ϑ_2 et par conséquent $\vartheta_1\vartheta^{-1}$ et $\vartheta_2\vartheta^{-1}$ ne soient pas propres pour $\mathfrak{G}$. Nous avons la relation

$$\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1} = \varepsilon.$$

En la multipliant par $\vartheta_1\vartheta^{-1}$, d'abord à gauche, puis à droite, on obtient les relations $(\vartheta_1\vartheta)^2 + (\vartheta_1\vartheta^{-1})(\vartheta_2\vartheta^{-1}) = \vartheta_1\vartheta^{-1}$, $(\vartheta_1\vartheta^{-1})^2 + (\vartheta_2\vartheta^{-1})(\vartheta_1\vartheta^{-1}) = \vartheta_1\vartheta^{-1}$, d'où il suit[15])

$$(\vartheta_1\vartheta^{-1})(\vartheta_2\vartheta^{-1}) = (\vartheta_2\vartheta^{-1})(\vartheta_1\vartheta^{-1}). \tag{3}$$

$\vartheta_i\vartheta^{-1}$ est d'une part parfait et n'est pas propre pour $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ est d'autre part irréductible. Il en suit que le sousgroupe annulé par $\vartheta_i\vartheta^{-1}$ est le groupe $\mathfrak{G}$ entier. Pour un G arbitraire de $\mathfrak{G}$ on peut donc déterminer un entier positif n tel que $G(\vartheta_1\vartheta^{-1})^n = E$, $G(\vartheta_2\vartheta^{-1})^n = E$. On en tire l'équation impossible $G = G(\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1})^{2n} = E$ de la manièere suivante: $(\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1})^{2n}$ est en vertu de (3) la somme des termes $(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}\,(\vartheta_2\vartheta^{-1})^r = (\vartheta_2\vartheta^{-1})^r\,(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}$ avec $0 \leqq r \leqq 2n$. On a donc, ou $2n - r \geqq n$, ou $r > n$ et par conséquent $G(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}\,(\vartheta_2\vartheta^{-1})^r = E$. Il faut alors que au moins un des automorphismes ϑ_1, ϑ_2 soit propre pour $\mathfrak{G}$.

5,22. Lemme. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe satisfaisant à la supposition* 3,1. *Parmi les facteurs directs abéliens de $\mathfrak{G}$, il y en a qui sont des facteurs abéliens maximum, cela veut dire que un tel facteur $\mathfrak{A}$ n'est contenu dans aucun autre facteur direct abélien. Dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ ne possède aucun facteur direct abélien.*

---

[14]) Quant à ce lemme et sa démonstration conformer Fitting [3], § 1, Hilfssatz 4, p. 19.

[15]) Soient φ et ψ deux automorphismes quelconques pour un groupe. On trouve aisément que, s'il existe un automorphisme ξ, satisfaisant à la relation $\varphi + \xi = \psi$, il n'existe qu'un seul.

Démonstration. Soit

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3 \subset \dots \tag{4}$$

une chaîne montante infinie des facteurs directs abéliens de $\mathfrak{G}$. Posons $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{Q}_i$. L'ensemble de tous les éléments qui sont contenus au moins dans un $\mathfrak{A}_i$ forme un sousgroupe $\mathfrak{A}$ du centre de $\mathfrak{G}$ qui est invariant par rapport à Ω, parce que les $\mathfrak{A}_i$ le sont. On a évidemment $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i-1} \times \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{Q}_{i-1}$.[16]) En posant $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1$, on a pour $\mathfrak{A}$ le produit direct infini: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \times \times \mathfrak{B}_2 \times \dots \times \mathfrak{B}_n \times \dots$. On en conclut comme dans la démonstration de 2,51, que, dans $\mathfrak{A}$, une chaîne descendante infinie existe ce qui est d'après la supposition 3,1 impossible. Or, dans $\mathfrak{G}$ une chaîne (4) n'existe pas. Par conséquent il y a dans $\mathfrak{G}$ des facteurs abéliens maximum.

5,3. Démonstration du théorème 5,1. Envisageons deux décompositions quelconques (1) et (2) du § 4 pour le groupe $\mathfrak{G}$. Chaque facteur abélien de $\mathfrak{G}$ peut être décomposé, en vertu de la supposition 3,1, en produit direct des facteurs irréductibles. Alors on peut trouver, d'après 5,22 et 4,1 un élargissement de la décomposition (1) du § 4

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_u \times \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_v \tag{5}$$

et un élargissement de la décomposition (2) du § 4

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \dots \times \mathfrak{B}_u \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \dots \times \mathfrak{Q}_v \tag{6}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2, \dots, u$, $\mathfrak{P}_i \cong \mathfrak{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, v$, et dans lesquels les $\mathfrak{A}_i$ et $\mathfrak{B}_i$ sont des facteurs abéliens irréductibles, les $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$, les facteurs non-abéliens qui ne possèdent aucun facteur abélien direct. Soient α_i, $i = 1, 2, \dots, u$ les automorphismes de décompositions dans (5) pour les facteurs $\mathfrak{A}_i$, γ_i, $i = 1, 2, \dots, v$, les mêmes automorphismes pour les $\mathfrak{P}_i$, β_i, $i = 1, 2, \dots, u$, δ_1, $i = 1, 2, \dots, v$ auront une signification analogue pour la décomposition (6). Soit encore $\bar{\delta}_i = \beta_1 + \dots + \beta_u + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} + \delta_{i+1} + \dots + \delta_v$, $i = = 1, 2, \dots, v$. Écrivons pour un i quelconque, $i = 1, 2, \dots, v$, les décompositions (5) et (6) sous la forme:

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{P}}_i \times \mathfrak{P}_i = \overline{\mathfrak{Q}}_i \times \mathfrak{Q}_i.$$

$\overline{\mathfrak{P}}_i$ y est le produit de tous les facteurs de (5), autres que $\mathfrak{P}_i$, $\overline{\mathfrak{Q}}_i$, le produit de tous les facteurs de (6), autres que $\mathfrak{Q}_i$. Maintenant le $\mathfrak{P}_i$ est reproduit par $\gamma_i \delta_i \gamma_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ par $\delta_i \gamma_i \delta_i$. Autrement, il existerait d'après le théorème 3,5 (voir aussi la démonstration de 3,5) un facteur direct $\mathfrak{P}'_i \neq \mathfrak{E}$ de $\mathfrak{P}_i$ reproduit par $\gamma_i \bar{\delta}_i \gamma_i$ et

[16]) Remak [1], § 1, Satz 2, p. 296. Voir aussi Schmidt [1], § 4, Hilfssatz III, p. 39.

on aurait la répresentation isomorphe $\mathfrak{P}'_i\bar{\delta}_i = \overline{\mathfrak{Q}}'_i$, $\overline{\mathfrak{Q}}'_i \dotplus \mathfrak{C}$ étant un facteur direct de $\overline{\mathfrak{Q}}_i$. $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ étant centralement isomorphes, il existerait un facteur direct $\mathfrak{Q}'_i \dotplus \mathfrak{C}$ de $\mathfrak{Q}_i$ qui serait centralement isomorphe à $\mathfrak{P}'_i$ et par conséquent à $\overline{\mathfrak{Q}}'_i$. Il suivrait du lemme 2,9 que $\mathfrak{Q}'_i$ serait un facteur abélien ce qui est impossible d'après la supposition faite sur $\mathfrak{Q}_i$. Or, on voit par la même voie comme dans la démonstration du théorème 3,5 qu'on peut substituer dans (5) $\mathfrak{Q}_i$ à la place de $\mathfrak{P}_i$ et dans (6) $\mathfrak{P}_i$ à la place de $\mathfrak{Q}_i$.

Pour les facteurs abéliens nous allons procéder comme il suit: Posons $\overline{\beta}_1 = \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$. On a $\alpha_1 = \alpha_1(\beta_1 + \overline{\beta}_1)\,\alpha_1 = \alpha_1\beta_1\alpha_1 + \alpha_1\overline{\beta}_1\alpha_1$ et α_1 est l'automorphisme-unité pour $\mathfrak{A}_1$. $\mathfrak{A}_1$ étant irréductible, et $\alpha_1\beta_1\alpha_1$, $\alpha_1\overline{\beta}_1\alpha_1$ étant parfaits, il suit du lemme 5,21[17]) que, si $\alpha_1\beta_1\alpha_1$ n'est pas propre pour $\mathfrak{A}_1$, $\alpha_1\overline{\beta}_1\alpha_1$ l'est. Dans ce cas posons $\overline{\beta}_2 = \beta_3 + \beta_4 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$. On a $\eta_1 = \alpha_1\overline{\beta}_1\alpha_1 = \alpha_1\beta_2\alpha_1 + \alpha_1\overline{\beta}_2\alpha_1$ et η_1 est propre pour $\mathfrak{A}_1$. Parce que $\mathfrak{A}_1$ est un groupe abélien satisfaisant d'après 3,1 à la supposition des chaînes descendantes finies, il suit du théorème 2,5 que chaque automorphisme de $\mathfrak{A}_1$ est parfait. $\alpha_1\beta_2\alpha_1\eta_1^{-1}$ et $\alpha_1\overline{\beta}_2\alpha_1\eta_1^{-1}$ sont donc parfaits pour $\mathfrak{A}_1$. On voit maintenant d'après le lemme 5,21 que, si $\alpha_1\beta_2\alpha_1$ n'est pas propre pour $\mathfrak{A}_1$, $\alpha_1\overline{\beta}_2\alpha_1$ l'est. Dans ce dernier cas on pose $\overline{\beta}_3 = \beta_4 + \beta_5 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$ et on refait le raisonnement pour l'automorphisme propre $\eta_2 = \alpha_1\overline{\beta}_2\alpha_1 = \alpha_1\beta_3\alpha_1 + \alpha_1\overline{\beta}_3\alpha_1$ et ainsi de suite. On trouve ainsi un automorphisme $\alpha_1\beta_{k_1}\alpha_1$ ou un automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}\alpha_1$ qui est propre pour $\mathfrak{A}_1$. Mais aucun automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}\alpha_1$ n'est propre pour $\mathfrak{A}_1$, car, en ce cas, l'automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}$ ferait correspondre au sousgroupe abélien $\mathfrak{A}_1$ un facteur direct de $\mathfrak{Q}_{l_1}$ qui est d'après la supposition non-abélien. Il existe donc un automorphisme $\alpha_1\beta_{k_1}\alpha_1$ qui est propre pour $\mathfrak{A}_1$. On voit maintenant par la même voie comme dans la démonstration du théorème 3,5 qu'on peut substituer dans (5) à la place de $\mathfrak{A}_1$ le facteur $\mathfrak{B}_{k_1}$ et par suite on a la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_{k_1} \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_u \times \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_v. \tag{7}$$

On raisonnera maintenant de la même manière sur cette nouvelle décomposition et sur la décomposition (6). On trouvera que le facteur $\mathfrak{A}_2$ peut être remplacer dans (7) par un facteur $\mathfrak{B}_{k_2}$ qui est forcement différent de $\mathfrak{B}_{k_1}$ et ainsi de suite. Le théorème 5,1 est donc démontré.

[17]) Si l'on veut se borner aux groupes ordinaires n'ayant pas un champ d'opérateurs, on peut se passer du lemme 5,21, en procédant comme le fait M. Kurosch [1], § 3, Satz II, p. 110.

§ 6. Une généralisation des théorèmes du § 3 et du § 4.

Soient $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{H}_1$ deux facteurs directs du groupe $\mathfrak{G}$ choisis arbitrairement. Soient

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{H}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_1 \qquad (1)$$

deux décompositions de $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs, la première d'elles contenant le facteur direct $\mathfrak{G}_1$, la seconde, le facteur direct $\mathfrak{H}_1$. Soient $\gamma_1, \overline{\gamma}_1$ et $\delta_1, \overline{\delta}_1$ les automorphismes de décomposition appartenant à la première et à la seconde décomposition (1).[11]) Nous faisons maintenant sur $\mathfrak{G}$ la supposition suivante:

6,1. Supposition. Pour chaque couple de facteurs directs $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{G}$ et pour toutes les décompositions de $\mathfrak{G}$ (1) en produit direct de deux facteurs dans lesquelles ces facteurs figurent, les sousgroupes $\mathfrak{G}\gamma_1\delta_1\overline{\gamma}_1$ et $\mathfrak{G}\delta_1\gamma_1\overline{\delta}_1$ satisfont à la supposition des chaînes descendantes finies.

Remarquons que $\mathfrak{G}\gamma_1\delta_1\overline{\gamma}_1$ et $\mathfrak{G}\delta_1\gamma_1\overline{\delta}_1$ sont, en vertu du lemme 2,9, des sousgroupe du centre. Cette supposition est plus générale que la supposition 3,1, car, sous la supposition 6,1, le groupe $\mathfrak{G}$ peut avoir pour facteur direct le groupe cyclique infini ou le groupe, ayant le type du groupe additif des nombres rationnels, pourvu que ce facteur soit le seul facteur direct de ce type. On peut réaliser cette condition sans difficulté. On a maintenant le théorème suivant:

6,2. Théorème. *Les lemmes et les théorèmes du* § 3 *et du* § 4 *restent vrais, si l'on remplace la supposition* 3,1 *par la supposition* 6,1.

Démonstration. En effet, on n'avait besoin de la supposition 3,1 que pour la démonstration du lemme 3,22 et du lemme 3,31. On vérifie aisément que les démonstrations restent valables même sous la supposition 6,1. Parce que la supposition 6,1 n'assure pas l'existence d'une décomposition irréductible d'un facteur abélien de $\mathfrak{G}$, on ne peut pas remplacer 3,1 par 6,1 dans le théorème 5,1.

*

O rozkladu grupy v direktní součin.

(Obsah předešlého článku.)

Práce týká se grup, v jejichž centru každý klesající řetězec podgrup jest konečný. Hlavní výsledek práce jest tato věta: Libovolné dva rozklady takové grupy v direktní součin konečného počtu faktorů dají se vždy tak rozšířiti, že oba nové rozklady rozšířením vzniklé jsou si centrálně isomorfní, to jest, že faktory prvního rozšířeného rozkladu dají se vzájemně jednoznačně přiřaditi faktorům druhého rozšířeného rozkladu tak, že sobě přiřazené faktory jsou si centrálně isomorfní.