Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D305--D327

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123400`

LITERATURA.

A. Recense vědeckých publikací.

Dvě knihy o základech počtu pravděpodobnosti. 1. A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. II Band, Heft 3.) Berlin 1933. Stran IV + 62. Kč 75,—. 2. E. Tornier: Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie. Leipzig-Berlin 1936. Stran IV + 160. Kč 120,—.

1.

Ačkoliv Kolmogorovova kniha vyšla již před delší dobou, myslím, že není neúčelné referovati o ní pro srovnání v souvislosti s knihou Tornierovou, jejíž posudek v dalším podávám (a v němž uvádím definice některých pojmů, které Kolmogoroff předpokládá jako známé).

V šesti kapitolách podány jsou nejzákladnější pojmy týkající se elementárního počtu pravděpodobnosti (p. p.), nekonečných pravděpodobnostních polí, náhodových veličin, matematických nadějí, podmíněných pravděpodobností, nezávislých náhodových veličin a zákonů velkých čísel.

Metoda výkladu jest axiomatická a opírá se o analogii s Lebesgueovou teorií míry a integrace. Výchozí předpoklady jsou: Nechť E jest množina elementů $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, které nazýváme elementárními jevy, a $\mathfrak{F}$ jistá množina částečných množin z E; elementy z $\mathfrak{F}$ slují náhodové jevy. Potom platí axiomy

I. $\mathfrak{F}$ jest množinové těleso.

II. $\mathfrak{F}$ obsahuje množinu E.

III. Ke každé množině A z $\mathfrak{F}$ jest přiřazeno nezáporné reálné číslo $P(A)$, které budeme nazývati pravděpodobností jevu A.

IV. $P(E) = 1$.

V. Jsou-li A a B disjunktní množiny, pak $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Soustava množin $\mathfrak{F}$ s určitým přiřazením čísel $P(A)$, která vyhovují axiomům I.—V. sluje pravděpodobnostní pole.

Počet p., který se opírá o uvedené axiomy označíme jako elementární.

Mějme nyní množiny $A_1, A_2, A_3, \ldots$ v konečném nebo nekonečném počtu a $\mathfrak{D}_n A_n$ nechť značí jejich průnik $A_1A_2A_3 \ldots$ Zvolme další

VI. axiom spojitosti: Pro klesající posloupnost jevů (t. j. množin do sebe postupně zařazených) z $\mathfrak{F}$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

s podmínkou $\underset{n}{\mathfrak{D}} A_n = 0$ (prázdná množina) platí rovnice $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

P. pole, která vyhovují axiomům I.—VI., nazýváme p. pole v širším smyslu.

Axiomy tvoří logický systém vět, který jest bezesporný, ale neúplný.

Jestliže každý součet spočetného počtu disjunktních množin A_n z tělesa $\mathfrak{F}$ patří do $\mathfrak{F}$, pak $\mathfrak{F}$ sluje Borelovo těleso. P. pole se nazývá Borelovým, jestliže těleso $\mathfrak{F}$ jest Borelovo. V Borelových p. polích lze prováděti všechny potřebné úkony p. p., aniž bychom se vydali nebezpečí, že dospějeme k jevům, které jsou bez pravděpodobnosti.

Výklady usměrňuje autor na Borelova p. pole a to i ve vícerozměrných prostorech (také o nekonečně mnoha dimensích) a jest jen litovati, že jeho úvahy jsou příliš stručné a důkazy většinou pouze naznačeny.

2.

Kniha Tornierova chce podati matematickou teorii základních představ počtu pravděpodobnosti (p. p.), při čemž vychází z tohoto vylíčení jejich vývoje: Původně se badatelé domnívali, že vystačí s pojmem „náhody". Protože však jest to představa vágní a závislá na jednotlivcově temperamentu, nevedla tato cesta k cíli. Pak se Mises pokusil zavésti pojem „kolektiv", ale ztroskotal na vnitřních sporech, ke kterým ona koncepce dospěla. Na to se za základ vzala formální analogie jistých počtářských pravidel p. p. s Lebesgueovou teorií míry, ale tím p. p. klesl na pouhý matematický formalismus bez vlastního obsahu a beze vztahu k vnějšímu světu. Jde tedy o to nalézti axiomy, které by popisovaly základní představy (a nikoliv, že bychom „pojmy axiomaticky definovali") a vybudovati p. p. jakožto přírodovědeckou disciplinu. Ale — na neštěstí — jest k tomu třeba vysoce abstraktní matematiky.

Proto autor knihu rozdělil ve dvě části: matematickou (str. 1 až 100), v níž podává obecnou teorii množinových funkcí (systémy množin, obecná teorie míry, měřitelné funkce, obecná teorie integrace, výklad integrálu — určitě definovaného — pomocí četností, spojité zobrazení spočetného tělesa na jiné těleso, obecná množina posloupností) a pravděpodobnostní (str. 101—160) obsahující obšírně axiomy p. p. a jinak stručně jen nejdůležitější věty o pravděpodobnostních polích. Na četných stránkách jsou originální úvahy, takže knihu můžeme posuzovati s různých hledisek. V tomto referátu soustředím svůj zájem na otázku, jaký dosah mají autorovy axiomy p. p.

Připomeňme si dříve některé definice z teorie množin (§ 1). Jsou-li $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ dvě množiny, rozumíme 1. součtem $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ množinu všech elementů, které patří aspoň do jedné z obou množin, 2. průnikem $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ množinu všech elementů, které patří do obou množin, 3. rozdílem $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ množinu všech elementů patřících do $\mathfrak{A}$ ale nikoliv do $\mathfrak{B}$ za předpokladu, že $\mathfrak{A}$ obsahuje každý element z $\mathfrak{B}$. Množiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ slují disjunktní, nemají-li žádný element společný, tedy jestliže jejich průnik jest množina prázdná 0 (bez elementů). Množinu, jejíž elementy jsou opět množiny, nazýváme množinovým systémem (soustavou, systémem množin). Množinový systém Σ sluje okruhem (množinovým), jestliže součet a průnik dvou libovolných množin ze Σ patří do Σ. Okruh Σ označíme jako „těleso (množinové)", jestliže rozdíl dvou libovolných množin ze Σ, při čemž vždy jedna jest obsažena ve druhé, patří do Σ. Jestliže množinové těleso jest té vlastnosti, že součet nekonečného spočetného počtu množin z tělesa patří také do tělesa, pak sluje σ-těleso (t. j. Borelovo).

Pomocí těchto pojmů buduje autor obecnou teorii míry (§ 2). Nejdříve provádí názorový rozbor pojmu „obsah", zjistí pět jeho složek, z nichž čtyři pak matematicky formuluje jakožto axiomy formální teorie míry (a obsahu).

Axiomy formální teorie obsahu a míry.

Budiž dáno množinové těleso k, které obsahuje největší množinu B a nechť jsou splněny tyto čtyři požadavky:

I. Axiom jednoznačného ohodnocení. Každé množině α z k budiž přiřazeno přesně jedno nezáporné číslo $J(\alpha)$, které nazveme „obsahem" množiny α. Speciálně pro prázdnou množinu 0 budiž $J(0) = 0$.

II. Axiom rozkladu. Je-li α z k rozložena v množiny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ z k, které jsou po dvou disjunktní, tedy je-li $\alpha = \sum_\nu \alpha_\nu$, pak budiž $J(\alpha) = \lim_{n\to\infty} J\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\right)$.

III. Axiom spojitosti. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že z platnosti nerovnin $|J(\alpha) - J(\alpha')| < \delta$ a $|J(\beta) - J(\beta')| < \delta$, kde $\alpha\beta = \alpha'\beta' = 0$ a uvažované množiny jsou z k, vždy plyne

$$|J(\alpha + \beta) - J(\alpha' + \beta')| < \varepsilon.$$

IV. Axiom monotonnosti. Ke každému $\varrho > 0$ existuje $\sigma = \sigma(\varrho) > 0$ a $\tau = \tau(\varrho) > 0$, že z nerovnin $J(\alpha) - J(\alpha') > \varrho$ a $J(\beta) - J(\beta') > -\sigma$, kde $\alpha\beta = 0$ a uvažované množiny jsou z k, vždy plyne

$$J(\alpha + \beta) - J(\alpha' + \beta') \geq \tau.$$

Důkaz bezespornosti axiomů jest velmi jednoduchý. Zajímavé však jsou důsledky, které z nich plynou. Předem lze snadno dokázati existenci neaditivních teorií míry (věta A, str. 16) a dále není třeba používati pojmů vnitřní a vnější míry (a obsahu). Hlavní cíl, ke kterému výklady směřují, jest však tento: Budiž dáno libovolné množinové těleso $\varkappa$. Toto těleso rozšíříme dvojím způsobem: 1. na těleso $\varkappa_1$ tak, aby množiny z $\varkappa_1$ měly obsah (ve smyslu Jordanově), 2. na σ-těleso $\varkappa_2$ takové, že množiny z $\varkappa_2$ jsou měřitelné. Dodatečně zvolíme předpoklad, aby odvozené obsahy (a míry) byly aditivní. Nyní se zavede pojem integrálu funkce f definované na množině $\mathfrak{A}$ z $\varkappa_1$ [resp. z $\varkappa_2$]. Při tom o elementech množiny $\mathfrak{A}$ ničeho nepředpokládáme; za funkci $f = f(P)$ volíme bodovou funkci, t. j. každému elementu P z $\mathfrak{A}$ přiřadíme právě jen jediné reálné číslo $f(P)$. Postupuje se (§ 4) obvyklým způsobem (tvoření součtů o sčítancích: obsah (míra) části z $\mathfrak{A}$ $\times$ jistá funkční hodnota pro element z této části) a výsledkem jest

$$\int_{\mathfrak{A}} f \, d\varkappa_1,$$

t. zv. $\varkappa_1$-integrál (Riemannův) a

$$\int_{\mathfrak{A}} f \, d\varkappa_2$$

t. zv. $\varkappa_2$-integrál (Lebesgueův).

Poznamenejme, že místo tělesa $\varkappa_1$ můžeme vzíti přímo těleso dané $\varkappa$.

Na to v § 5 se autor obrací speciálně ke $\varkappa_1$-integrálu a podává jeho výklad pomocí četností pro případ, že těleso $\varkappa$ jest $\mathfrak{k}$-separabilní. Tento poslední pojem definuje takto (str. 62):

Těleso $\varkappa$ sluje $\mathfrak{k}$-separabilní, jestliže v něm existuje částečné těleso $\mathfrak{k}$ těchto vlastností: 1. $\mathfrak{k}$ jest spočetným množinovým systémem, 2. značí-li $\mathfrak{k}_1$ těleso množin majících obsah, které jest rozšířené nad $\mathfrak{k}$, pak $\varkappa$ jest částečným tělesem z $\mathfrak{k}_1$.

Zaveďme označení:

$\overline{F} = P_1, P_2, P_3, \ldots$ posloupnost elementů z množiny B (největší z tělesa $\varkappa$);

$P_1, \ldots, P_k$ nazveme k-členným úsekem z $\overline{F}$;

$\mathfrak{M}$ libovolná část z B;

f libovolná bodová funkce na B;

${}^{a}(\overline{F}, \mathfrak{M})_k$ počet těch elementů k-členného úseku z $\overline{F}$, které jsou elementy z $\mathfrak{M}$;

${}^{r}(\overline{F}, \mathfrak{M})_k = \frac{1}{k} \cdot {}^{a}(\overline{F}, \mathfrak{M})_k$ relativní četnost výskytu elementů z k-členného úseku z $\overline{F}$ na $\mathfrak{M}$;

$(\overline{F}, \mathfrak{M}) = \lim\limits_{k\to\infty} {}^{r}(\overline{F}, \mathfrak{M})_k$ (existuje-li limita na pravé straně).

K tomu analogicky nechť

$$ {}^{a}(\overline{F}, f)_k = \sum_{\nu=1}^{k} f(P_\nu);\ {}^{r}(\overline{F}, f)_k = \frac{1}{k} \cdot {}^{a}(\overline{F}, f)_k; $$

$(\overline{F}, f) = \lim\limits_{k\to\infty} {}^{r}(\overline{F}, f)_k$ (existuje-li limita na pravé straně).

Potom jsou dokázány věty:

a) Je-li těleso $\varkappa$ $\mathfrak{k}$-separabilní, pak lze nalézti aspoň jednu posloupnost $\overline{F}$ té vlastnosti, že pro každou množinu α z $\mathfrak{k}$ existuje $(\overline{F}, \alpha)$ a kromě toho $(\overline{F}, \alpha) = \frac{J(\alpha)}{J(B)}$.

Definice. Souhrn všech posloupností $\overline{F}$, které splňují podmínky věty a) nazveme třídou modelů $\overline{\overline{F}}$ a každý její element $\overline{F}$ modelem.

b) Je-li funkce f $\varkappa_1$-integrovatelna, pak existuje pro každý model $\overline{F}$ limita $(\overline{F}, f)$ a jest

$$ (\overline{F}, f) = \frac{1}{J(B)} \cdot \int_B f \mathrm{d}\varkappa_1. $$

c) Je-li f libovolná omezená bodová funkce na B a existuje-li pro každé $\overline{F}$ z $\overline{\overline{F}}$ limita $(\overline{F}, f)$, pak f jest $\varkappa_1$-integrovatelná.

Abychom měli názornější představu o významu těchto vět, zvolme za B interval $a \leq x \leq b$; $J(B) = b - a$; $\overline{F} = x_1, x_2, x_3, \ldots$ posloupnost bodů z B; $\mathfrak{M}$ libovolná část z B; $J(\mathfrak{M})$ její Jordanův obsah; $f(x)$ libovolná omezená integrovatelná (podle Riemanna) funkce na B;

$$ (\overline{F}, f) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{\nu=1}^{k} f(x_\nu) $$

(existuje-li limita na pravé straně).

Pak se tvrdí: Posloupnost $\overline{F}$ sluje modelem, jestliže pro každou množinu $\mathfrak{M}$ existuje

$$ (\overline{F}, \mathfrak{M}) = \frac{J(\mathfrak{M})}{b - a}. \tag{+} $$

Takových modelů jest obecně více a pro každý platí

$$ (\overline{F}, f) = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{++} $$

Další pojem, který autor považuje za nezbytný pro p. p. jest obsažen v této definici (§ 7): Budiž B množina všech posloupností o elementech

$$ P = e_1^{(r_1)},\ e_2^{(r_1)(r_2)},\ e_3^{(r_1r_2)(r_3)},\ e_4^{(r_1r_2r_3)(r_4)}, \ldots, $$

kde r_n v horních závorkových indexech $(r_1, \ldots, r_{n-1})\,(r_n)$ smí probíhati všechna celá čísla s podmínkou $1 \leqq r_n \leqq t_{r_1,\ldots,r_{n-1}} \leqq \infty$ pro předem dané $t_{r_1,\ldots,r_{n-1}}$; B sluje „nejobecnější množina posloupností“.

K ozřejmění uveďme příklad. Házíme kostkou se stěnami očíslovanými 1, 2, ..., 6; $e_n^{(r_1,\ldots,r_{n-1})\,(r_n)}$ jest jedno z těchto čísel; $t_{r_1,\ldots,r_{n-1}} = 6$.

Z množiny B jest důležitá určitá její částečná množina stanovená definicí: Souhrn všech posloupností z B, které začínají úsekem

$$e_1^{(r_1)}, \ldots, e_n^{(r_1,\ldots,r_{n-1})\,(r_n)}$$

[$r_1, \ldots, r_n$ předem daná čísla] nazveme základní množinou n-tého stupně z B; B považujeme za základní množinu 0-tého stupně, množina prázdná jest základní množinou beze stupně. Platí věta: Základní množiny tvoří spočetnou soustavu.

Nyní následuje vlastní část teoreticko-pravděpodobnostní a to nejdříve výklad rozdílu mezi pojmy „pokusný předpis (Versuchsvorschrift)“ a jeho „logicky možných realisací“.

A. Pokusný předpis obsahuje dvě kvalitativně různé podstatné části:

1. v prvé části jest udáno, jak jednotlivé pokusy třeba prováděti (provádění pokusu),

2. v druhé pak jest předepsáno, co třeba při výsledku každého uskutečněného pokusu zaznamenati (záznam při pokusu).

B. Logicky možná realisace pokusného předpisu jest každé logicky možné schema sestavené ze záznamů při pokusech.

Důsledek: Souhrn všech logicky možných realisací daného pokusného předpisu jest množina posloupností.

Provádějme vrhy jednak s kostkou dřevěnou (což jest jeden pokusný předpis) a jednak s krychlí z poloviny dřevěnou a z poloviny železnou (což jest jiný pokusný předpis). Ačkoliv oba tyto předpisy stanoví touž množinu posloupností, máme pocit, že výsledky pokusů u prvého předpisu nejsou úplně stejné s výsledky pokusů u druhého předpisu. Nebudeme pátrati po původu tohoto pocitu a objasníme si zmíněný rozdíl takto:

Každá logicky možná realisace předpisu má určité charakteristické vlastnosti, které závisí na předmětech používaných při pokusu. Jistým těmto vlastnostem předpis přisuzuje jednoznačně určité číselné hodnoty, které budeme nazývati „pravděpodobnosti“. Přirozené, že tyto hodnoty musí býti buď přímo či nepřímo aspoň přibližně experimentálně zjistitelny. Souhrn všech realisací, které mají určitou vlastnost, tvoří částečnou množinu z uvažované množiny posloupností a podle předpisu jest tedy k této částečné množině prostřednictvím charakteristické vlastnosti přiřazena určitá pravděpodobnost. Pravíme, že předpis ohodnocuje pravděpodobností částečnou množinu, takže pak mluvíme o ohodnocené částečné množině.

Každá vlastnost pokusného předpisu vytváří tedy určitou částečnou množinu, k níž jest přiřazena jednoznačně určitá hodnota (pravděpodobnost). Souhrn všech těchto částečných množin tvoří systém ohodnocených částečných množin.

Soubor složený z ohodnocených částečných množin a z příslušných k nim pravděpodobností nazýváme indukovaným pravděpodobnostním polem.

Důsledek: Každým pokusným předpisem jest stanovena

1. množina posloupností (množina všech logicky možných realisací předpisu) a

2. p. pole, patřící k uvažované množině posloupností (p. pole, které předpis indukuje).

Předmětem matematické teorie p. jsou pravidla, podle kterých v p. polích jsou spolu spjaty jak množinové systémy tak jejich ohodnocení. Úlohou teoretického p. p. není stanovení výchozích pravděpodobností, nýbrž úkolem naším jest nalézti předpoklady (axiomy), kterým musí p. pole indukované určitým pokusným předpisem nutně vyhovovat, aby v něm vůbec nějaký počet p. byl možný, t. j. aby se vůbec formální vlastnosti pokusného předpisu a příslušného p. pole daly popsati.

Na to definujeme:

Budiž B množina posloupností všech logicky možných realisací určitého pokusného předpisu. Systém F částečných množin $\mathfrak{A}$ z B, jimž jsou přiřazena nikoliv záporná čísla ≤ 1 [nazvaná „pravděpodobnosti" a označená $(F, \mathfrak{A})$] spolu s těmito pravděpodobnostmi sluje pravděpodobnostní pole indukované uvažovaným pokusným předpisem, jestliže jsou splněny tyto předpoklady:

I. Axiom o tělese. Množiny z F tvoří množinové těleso.

II. Speciální axiom přiřazení. Každá základní množina z B patří do F a speciálně jest $(F, B) = 1$.

III. Speciální součtový axiom. Rozložíme-li základní množinu E v její párově disjunktní části: $E = \sum_n E_n$, pak platí $(F, E) = \sum_n (F, E_n)$.

IV. Obecný součtový axiom. Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dvě disjunktní množiny z F, potom platí

$$(F, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{A}) + (F, \mathfrak{B}).$$

V. Obecný axiom přiřazení. Budiž $\mathfrak{k}$ nejmenší těleso odvozené ze základních množin a nechť množinám α z $\mathfrak{k}$ jsou přiřazeny pravděpodobnosti (F, α). Považujeme-li tyto pravděpodobnosti za obsahy a utvoříme-li těleso $\mathfrak{k}_1$ obsahových množin nad $\mathfrak{k}$, pak všechny a jediné množiny z $\mathfrak{k}_1$ patří do F a jejich pravděpodobnosti jsou rovny obsahům.

K axiomu V. podejme toto vysvětlení: 1. (F, α) lze podle axiomu IV. jednoznačně stanovit za pomocí věty o struktuře a) nejmenšího okruhu [elementy jeho jsou všechny součty o konečném počtu sčítanců, při čemž každý sčítanec jest průnikem konečného počtu množin daného systému] a b) nejmenšího tělesa [elementy jsou všechny součty o konečném počtu párově disjunktních sčítanců, z nichž každý jest rozdílem dvou množin nejmenšího okruhu nad daným množinovým systémem, při čemž k danému systému přidáme nulovou množinu, není-li v něm již obsažena]. 2. Obsahová množina jest ta, která má obsah. V důsledku předpokladu jsou množiny α obsahové, takže $\mathfrak{k}$ jest těleso obsahových množin a jde tedy o rozšíření $\mathfrak{k}$ na $\mathfrak{k}_1$ podle vět z teorie míry.

Zbývá ještě VI. axiom přechodu, jehož formulace jest však dosti obtížná a opírá se o nový pojem „formální změny pokusného předpisu". Uvedli jsme, že pokusný předpis má dvě složky: provádění pokusu (α) a záznam při pokusu (β). Mějme určitý předpis, který indukuje pravděpodobnostní pole

$$B, \mathfrak{A}, F, (F, \mathfrak{A}).$$

Abychom z něho odvodili nový předpis, neměňme složku (α), nýbrž předepišme jinak pouze složku (β) a to tak, že zvolíme jiný způsob označování výsledků pokusů. Tuto změnu (přesná její definice na str. 112—113) nazýváme „formální změnou" daného předpisu. Vznikne nové p. pole

$$B', \mathfrak{A}', F', (F', \mathfrak{A}'),$$

které jest v určité souvislosti s původním p. polem. Množina B' všech logicky možných realisací nového pokusu se dá spojitě zobraziti obecně na některou množinu $\mathfrak{A}$, takže platí vztah

$$\psi(B') = \mathfrak{A}.$$

Značí-li nyní $\mathfrak{A}$ právě onu množinu z prvého p. pole, která se zobrazí na B' ve druhém p. poli, pozměňme označení tak, že $\mathfrak{B}'$ jsou částečné množiny z B' [značili jsme je doposud $\mathfrak{A}'$] a $\mathfrak{A}'$ [které jsme značili $\mathfrak{A}$] jsou jejich původní obrazy v prvém p. poli, takže

$$\psi(\mathfrak{B}') = \mathfrak{A}'.$$

Potom volíme

VI. axiom přechodu:

$$(F', \mathfrak{B}') = \frac{(F, \mathfrak{A}')}{(F, \mathfrak{A})}.$$

Dodatkem se ovšem musíme ještě přesvědčiti, že neimplikujeme tím nový pojem pravděpodobnosti; důkaz tohoto tvrzení jest snadný (věta 8.4).

K formálním axiomům I.—VI. patří ještě obsahové pravidlo (str. 107, definice 8.2), které předepisuje, jak se určí pravděpodobnosti základních množin. Použijeme zde definice pravděpodobnosti jako limity relativních četností odvozených ze serií pokusů. Tyto serie pokusů lze však považovati za modely, takže — podle vět o modelech — pro každý pokusný předpis existují modely a souborem modelů jest tento předpis úplně určen. Nyní však víme, že soubor modelů jednoznačně charakterisuje $\mathfrak{k}_1$-integrovatelné funkce a vzniká proto otázka, jaký význam tyto funkce a jejich integrály mají pro p. p. Odpověď vede k pojmu „(náhodové) proměnné" a k její střední hodnotě.

Jaký dosah má Tornierův axiomatický systém?

Axiomy určují minimální obor množin, které mají pravděpodobnosti. Avšak tento obor jest příliš úzký a již zcela jednoduché případy jsou z něho vyloučeny. Důvod tkví v tom, že zavedením pojmu „model" autor sice docílil naprostou shodu s definicí pravděpodobnosti pomocí četností, ale omezil p. p. těžko přijatelným způsobem.

3.

Význam a dosah uvedených axiomatických teorií p. p. můžeme posuzovati s různých hledisek a chtěl bych k tomu připojiti dvě poznámky podstatného rázu: prvá se týká vztahu těchto teorií k statistickému nazírání a druhá jest povahy ryze matematické.

A. Položme si otázku, zda-li axiomatické teorie p. p. jsou srovnatelny se statistickým výkladem kvantových jevů. Abychom ji zodpověděli, bude nejlépe, vytkneme-li starší pojetí, jak je formuloval na př. H. Poincaré (Calcul des probabilités. Paris 1912. 2. vyd. v úvodu). Podle něho náhodové jevy jsou v zásadě dvojího druhu: buď jsou výsledkem velmi malých příčin anebo jejich příčiny jsou velmi složité a vyskytují se ve velkém počtu. V obou těchto případech je to neúplnost našich poznatků, měření a pod., které nám zabraňují, abychom jevy přesně určili, takže se musíme spokojiti pouze s určením přibližným. Patrno, že pojetí Poincaréovo se stále opírá o přesvědčení, jakoby existoval laplaceovský Duch, který principielně může předpověděti průběh jevů kdekoliv a kdykoliv a k němuž přírodovědec má vzhlížeti jako k svému nedostižnému vzoru. Toto stanovisko v axiomatických teoriích jest radikálně opuštěno. Axiomatické teorie neznají pojmů „příčina" a „účinek", což jest zcela ve shodě s kvantovou fysikou. Uvažujme rozpad radioaktivní látky, na př. uranu. Pak otázka, kdy nastane rozpad jediného atomu uranu, nemá vůbec smysl. Máme-li však veliký počet N_0 atomů, potom pravděpodobný počet atomů N, které se za dobu t ještě nerozpadly, jest $N = N_0 . e^{-\lambda t}$, kde rozpadová konstanta λ závisí pouze na radioaktivní látce, nikoliv však na čase t. Číslo λ jest však — ve vhodně rozšířeném p. p. — hustota pravděpodobnosti a vyhovuje axiomům p. p. Naproti tomu pokus odvoditi číslo λ jakožto hustotu pravděpodobnosti pomocí pojetí Poincaréova selhává.

Rozdíl obou pojetí jest ještě lépe patrný, uvažujeme-li některou pravděpodobnost přechodu, o které pojednává statistická teorie transformací (viz Pascual Jordan: Anschauliche Quantentheorie, 1936. Str. 167 a násl.). Pak tato pravděpodobnost vyhovuje axiomům p. p., ale nelze ji ve starším pojetí odvoditi, protože platí matematická věta J. v. Neumannova, podle které jest nemožné statistické kvantové zákonitosti (statistickou teorii transformací) převést na kausálně fungující model. (P. Jordan, ibid, str. 285. J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, 1932.)

A jak jest tomu u jevů jiných než kvantových, na př. u náhodových her? Zde jest pricipielně možná redukce výkladu na kausální model, takže jde o jevy sekundérně statistické. Tato redukce jest však zbytečná, protože pravděpodobnosti výskytu uvažovaných jevů rovněž axiomům p. p. vyhovují (jestliže je ovšem vhodně zvolíme).

Můžeme tedy uzavříti: Statistika a p. p. nevyžadují existenci laplaceovského Ducha, protože buď v některých případech principielně nemůže existovat anebo v jiných případech, kde by existovat mohl, jest zbytečný a v zásadě vystačíme s vlastními silami.

B. Výsledek Tornierova axiomatického systému p. p. jest negativní: pojem Jordanova obsahu míry — a tím také Riemannovy integrace — nepostačí k vybudování p. p. v tom rozsahu, jaký potřebujeme.

Naskýtá se proto otázka, jakou teorii míry třeba vzíti za základ. Jest nejvýš pravděpodobné — přesné provedení a srovnání nebylo doposud provedeno —, že Lebesgueova teorie míry pro p. p. jest zbytečně široká, takže nejvhodnější bude teorie Borelova. Rozdíl obou teorií tvoří tento axiom:

Jestliže množina $\mathfrak{A}$ se liší od měřitelné množiny $\mathfrak{B}$ o částečnou množinu míry nulové, pak jest měřitelná. [Viz na př. W. Feller: Allgemeine Maßtheorie und Lebesguesche Integration. Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss. Phys.-Math. Klasse. 1932.]

V Borelově teorii míry tento axiom neplatí, kdežto v teorii Lebesgueově platí.

Šlo by nyní o to, úplně a přesně odvoditi p. p. zvláště s pojmem Borelovy míry a zvláště s mírou Lebesgueovou, což zdá se býti programem příštích studií v axiomatice p. p.

K závěru ještě poznámku: Učebnice teorie množin nevykládají rozdíl mezi Borelovou a Lebesgueovou mírou a integrací v té šíři, jak jest pro p. p. třeba. Doufejme, že s významem Borelovy integrace v p. p. bude i na tuto kapitolu vzat zřetel. *Otomar Pankraz.*

V. Nechvíle: Observations Photographiques de la Planète Eros en 1931 (en collaboration avec V. Guth, J. Štěpánek et feu J. Kaván). Publikace pražské Státní hvězdárny, č. 9, 1935, str. 10. Tiskl Prometheus.

Roku 1931 v lednu se přiblížila planetoida Eros v své značně excentrické dráze k Zemi téměř dvakráte blíže než planeta Mars v nejpříznivější oposici a Mezinárodní astronomická unie organisovala současně pozorování této planetoidy, jak mikrometrická, tak i fotografická; účelem bylo vypočítat co možno nejpřesněji parallaxu Slunce, dráhu Erota a hmotu

Měsíce. Poslední taková příznivá oposice — jež se opakují přibližně asi po 30 a 8 letech — byla r. 1901 a parallaxa Slunce byla tehda vypočítána se značnou spolehlivostí, neboť měření mikrometrická dala výsledek 8",806 a fotografická 8",804.

Roku 1930—31 bylo pozorováno celkem na 46 hvězdárnách, z toho na 32 byla planetoida sledována fotograficky (někde i více strojů) a na 14 mikrometricky visuelními dalekohledy. Státní hvězdárna byla k pozorování přihlášena v r. 1928 na kongresu Mezinárodní Astronomické Unie v Leidenu. Fotografováno bylo dvojitým Zeissovým refraktorem na Štefánikově hvězdárně v Praze, jehož objektiv má 21 cm v průměru a 343 cm ohniskové vzdálenosti; pointováno bylo visuelním objektivem téhož dalekohledu světlosti 18,5 cm a téže vzdálenosti ohniskové. Příslušný čas pozorování byl automaticky zapisován chronografem. Počasí v době největšího přiblížení bylo — jako téměř v celé střední a severní Evropě — velmi nepříznivé, ale přece se podařilo v době od 10. ledna do 5. března exponovati 16 desek se 44 posicemi planetoidy, a to jednak v nejvýchodnějších úhlech hodinových, jednak poblíže meridiánu. Na veškeré desky byla před exposicí vkopírována Gautier-Prinova mřížka a proměřování bylo vykonáno přesným měřícím strojem rovněž systému Prinova na Státní hvězdárně.

Výsledky pozorování a měření i výpočtů jak planetoidy, tak i srovnávacích hvězd, vybraných podle katalogu prof. Kopffa: „Generalkatalog der Anhaltsterne I. Ordung für die Eros Opposition 1930/31" (Astr. Nachr. **241**) jsou podány ve dvou tabulkách. Proměřování desek trvalo přibližně 6 měsíců, výpočet dobu asi třikrát tak dlouhou; dosažená přesnost pro posice planetoidy je řádu 0",1. Výpočty byly prováděny metodou Turner-Trépied-Gonnesiatovou, jež vede k vyrovnávání jednotlivých měření metodou nejmenších čtverců. Celý výpočet obsáhl asi 400 stran velikého formátu.

Autor i Státní hvězdárna mohou být s výsledkem vykonané práce plně spokojeni. Nebyla to jen nepřízeň počasí, ale i naše skromné poměry, které by byly nedovolily provedení práce v širším rozsahu. Vždyť použitý přístroj, třeba největší toho druhu u nás, byl v mezinárodní konkurenci mezi 46 hvězdárnami co do mohutnosti na místě předposledním. A nejen to. Dalekohled byl nedlouho před tím právě přivezen do Prahy. Bylo jej nutno namontovat, postavit do správné polohy, uvést do náležitého stavu optiku a vykonat mnoho prací a příprav, jež na jiných hvězdárnách, kde se pravidelně pracuje, jsou samozřejmostí. V těchto úkolech i při pozorování podporovali autora někteří členové České astronomické společnosti, Vojenského ústavu zeměpisného a Státní hvězdárny, kteří — jak z podtitulu vyplývá — se účastnili i výpočtů. Byl to zejména dr. J. Štěpánek, jehož podíl na spolupráci jak při pozorování, tak při výpočtech byl největší, a v závěru prací i dr. B. Nováková.

Nechvílova práce, o níž bylo právě referováno, je prvou praktickou astronomickou prací většího rozsahu, jež byla u nás od převratu provedena. Zůstává prozatím dosud také jedinou. Autor tu za podmínek mnohdy až příliš primitivních vykonal práci, jíž sotva kdo plně ocení.

Zdeněk Kopal.

V. Nechvíle: Sur les méthodes de reduction des Observations astrophotographiques et le calcul des positions d'Eros en 1931. Publikace pražské Státní hvězdárny, č. 10, str. 34. Tiskl Prometheus.

Práce, o níž bylo právě referováno, dala vznik druhé publikaci matematicko-numerického rázu. Autor vybral z přístupných pramenů řadu metod užívaných pro redukci hvězdných fotografií a pro přeměnu měřených lineárních souřadnic na rektascenci a deklinaci a naopak; zejména pak těch, jichž bylo přímo použito při veliké redukční práci u poloh planetoidy Erota v oposici r. 1931. V podstatě autor rozvíjí dva systémy transformační, totiž systém Ch. Trépiedův (francouzský) a Turnerův (anglický), vedoucí k zavedení a definici křivočarých a t. zv. standartních souřadnic. Oba systémy užívané na observatořích francouzských i anglických (i mezinárodně) mohou býti dále transformovány podle účelu i užití, jde-li o redukci celých fotografických zon téže deklinace, nebo o výpočty na deskách různých deklinací. Autor uvádí systémy a rozvoje Spencer-Jonesovy, Dysonovy, Loewyho, Newkirkovy, Königovy a Lagardeovy. Pak se zabývá výpočtem sférických a instrumentálních korekcí a výpočtem šesti nezávislých elementů desky (plate constants) podle referenčních hvězd. Pro výpočet elementů rozvádí autor jednak metodu Trépied-Turner-Gonnesiatovu, užívající metody nejmenších čtverců, pro nejpřesnější výpočty, jednak jednoduchou cestu postupných aproximací, vhodnou pro méně přesná měření. Ke konci jsou uvedeny rovnice pro výpočet korekcí diferenciální refrakce, jejíž členy druhého řádu při nejpřesnějších výpočtech je nutno vyčísliti.

Metody, od nejjednodušších k nejpřesnějším, jsou doprovázeny vypracovaným příkladem, jelikož autor se řídil přáním ředitele Státní hvězdárny, aby tato publikace byla základem pro budoucí astronomické práce na našich hvězdárnách. Proto je každý numerický příklad zakončen výpočtem t. zv. škálového koeficientu τ, udávajícím v obloukových minutách hodnotu jednoho délkového milimetru v rovině ohniskové a tím i také přesnou hodnotu ohniskové vzdálenosti (pro určitý druh světla a určitou temperaturu) pro užitý Zeissův refraktor. K bibliografii práce je připojen i seznam tabulek, sloužících k urychlení redukcí.

I k této práci nutno autoru jen gratulovat a lze si přáti, aby byla při astronomických pracích používána nejen u nás, ale i v cizině.

Zdeněk Kopal.

M. Fréchet: Recherches théoriques modernes sur la Théorie des Probabilités. Premier livre. Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications, T. I. fasc. 3, XVI + 308 p. Paris 1937. Kč 135,—.

Tato první část přehledu o nových věcech v počtu pravděpodobnosti jedná o základních pojmech a o nezávislých proměnných veličinách, jejichž hodnoty se určují jakožto výsledky pokusů. Druhá část (která je v tisku) bude věnována Poincaréově metodě libovolných funkcí a veličinám spojeným v Markovovy řetězy.

Ve stručné první kapitole přijímá Fréchet věty o sčítání a násobení pravděpodobností, jakožto základ výpočtů (to je stanovisko Borelovo vyslovené v 1. sešitě 1. dílu Traité du Calcul des Probabilités). Doplňuje je úvahami o statistickém a experimentálním stanovení pravděpodobností: podobně jako Cantelli, Chinčin a Copeland nepřijímá tu definici náhody, kterou se pokusil zavésti R. v. Mises.

V druhé kapitole uvádí zajímavé doplňky k větě o úhrnné pravděpodobnosti (sčítání pravděpodobností). Jsou-li $H_1, H_2, \ldots, H_n$ náhodné zjevy jakékoli, budiž p_i pravděpodobnost zjevu H_i, p'_i pravděpodobnost, že ze všech n zjevů se uskuteční jen H_i, $p_{ik\ldots s}$ pravděpodobnost, že se uskuteční současně $H_i, H_k, \ldots, H_s$, P pravděpodobnost, že se uskuteční aspoň jeden ze zjevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$ a konečně P' pravděpodobnost, že se uskuteční jen jeden z nich. Platí rovnice

$$p_i' = p_i - \sum_h p_{i,h} + \sum_{h,k} p_{ihk} - \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}$$

$$P = \sum_i p_i - \sum_{i,h} p_{ih} + \sum_{i,h,k} p_{ihk} - \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}$$
$$P' = \sum_i p_i - 2\sum_{i\,h} p_{ih} + 3\sum_{i,h,k} p_{ihk} - \ldots + (-1)^{n-1} np_{12\ldots n},$$

z nichž druhou odvodil Poincaré. Fréchet odvozuje z těchto rovnic řadu dalších vztahů a nerovností; rozebírá případ, kdy n roste do nekonečna. Na konci kapitoly jsou dokázány dvě věty: 1. Je-li řada pravděpodobností téhož zjevu, jenž se může vyskytnouti jakožto výsledek pokusů tvořících nekonečnou posloupnost, konvergentní, je pravděpodobnost, že by se ten zjev skutečně nekonečně mnohokráte vyskytl, rovna nule (Cantelli, 1917). 2. Jsou-li zjevy $E_1, E_2, \ldots$ nezávislé, pak pravděpodobnost, že se uskuteční v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečně mnoho zjevů E_i, je rovna buď nule nebo jednotce. První z těchto případů nastane, když řada pravděpodobností pro $E_1, E_2, \ldots$ je konvergentní, druhý pak, když ta řada je divergentní (Borel, 1909).

Třetí kapitola jedná obšírně o různých otázkách, jež se vyskytují při výpočtu středních hodnot. Z velikého množství úloh uvádím nový výpočet t. zv. střední úchylky (écart) podle Bertranda při opětovaných pokusech (str. 85) a úvahy o konvergenci k asymptotické formuli Laplaceově (pravděpodobnost, že úchylka je v daných mezích) na str. 98 a násl. Čtvrtá kapitola obsahuje úvahy o Bienayméově nerovnosti (1853): Je-li μ střední kvadratická úchylka dvou náhodných veličin X a Y, a značí-li $q(t)$ pravděpodobnost, že $|X - Y| < t$, platí pro libovolné kladné t

$$q(t) \geqq 1 - \frac{\mu^2}{t^2}.$$

Z toho plyne jednoduchý důkaz Bernoulliovy věty. Fréchet pak podrobně probírá různá zobecnění Bienayméovy nerovnosti. Upozorňuji na velmi zajímavý pojem podmíněných středních hodnot (moyennes conditionnées, viz str. 128) pocházející od Kolmogorova. Zdá se, že by se počet pravděpodobnosti mohl jednou od základů změniti tím, že by se vyšlo od středních hodnot, a z nich že by se odvozovaly pravděpodobnosti.

Rozsáhlá poslední kapitola pátá jedná o různých způsobech konvergence v posloupnostech složených z náhodných veličin. Autor ukazuje na jedné své práci z r. 1921, jak se dají věty čistě analytické, odvozené a vyslovené beze všeho vztahu k počtu pravděpodobnosti, „přeložiti" do mluvy tohoto počtu. Fréchet srovnával v oné práci různé moderní názory na pojem konvergence. Nahraďme každou numerickou funkci $f(x)$ čísla x numerickou funkcí X_E, jejíž hodnota závisí na výsledku E nějakého pokusu, a dejme pravděpodobnosti tu úlohu, jakou měla lineární míra; tak dojdeme k tomu, že různé druhy konvergence (convergence en mesure, c. presque partout, c. uniforme presque partout) se přenášejí do počtu pravděpodobnosti. Rovněž pojem „vzdálenosti dvou měřitelných funkcí" se přenáší jakožto „vzdálenost dvou veličin závislých na náhodě". Upozorňuji na důkazy Borelovy věty z r. 1909: Frekvencí číslice až do řádu n nazýváme poměr čísla, jež udává, kolikrát se ona číslice vyskytne na n prvních místech daného desetinného zlomku, a čísla n; konverguje-li takto definovaná frekvence k určité limitě, když n roste do nekonečna, pravíme, že existuje celková frekvence a že její hodnota rovná se oné limitě. Pravděpodobnost, že celková frekvence dané číslice existuje, a že je rovna jedné desetině, rovná se jedné. Fréchet rozebírá do podrobností Borelův důkaz analytický a uvádí pak Haussdorfův důkaz geometrický. Věta vyslovuje se podle Haussdorfa takto: Množství bodů x na úsečce (0, 1), pro něž celková frekvence číslice 1, v rozvoji čísla x v soustavě dvojkové (binární), existuje a je rovna $\frac{1}{2}$, má míru rovnou jedné. Ke konci jsou vyloženy mimo jiné věty o pravděpodobnosti, že daná řada náhodných veličin je konvergentní (Kolmogorov, Chinčin, P. Lévy).

Některé pomocné věty a pojmy jsou vyloženy ve zvláštním dodatku. Jiný dodatek obsahuje Cramérův důkaz věty: řídí-li se veličina Z, která se rovná součtu dvou náhodných a vzájemně nezávislých veličin X a Y, Gaussovým zákonem chyb, platí totéž o X i o Y.

Výběr problémů i způsob zpracování je zcela osobitý; přesnost v důkazech a jasná logika jsou velikými přednostmi tohoto spisu. Kdo hledá poučení o věcech zde podaných, najde ve Fréchetově knize pomůcku nepostrádatelnou.

Bohuslav Hostinský.

P. Jordan: Anschauliche Quantentheorie. Eine Einführung in die moderne Auffassung der Quantenerscheinungen. Berlin 1936. XII, 320 stran. Cena Kč 117,30.

Není to kniha populární, ani kniha, která by nepředpokládala žádné předběžné vědomosti matematické a fysikální; takové knihy zůstávají vždy na přiměřeně nízké úrovni. Jordanova kniha předpokládá naopak u čtenáře, jako jiné podobné knihy, dobrou znalost základů klasické (nekvantové) teoretické fysiky. Je určena především pro posluchače teoretické fysiky ve vyšších semestrech a pro vědecké pracovníky z oborů příbuzných, na př. experimentální fysiky, techniky a pod. Podává nejen spolehlivý a přístupný úvod do pojmových základů kvantové teorie, ale i všestranný, byť stručný přehled současného stavu nejnovějších návrhů na vytvoření jednotné a kompletní teorie fysikálního mikrosvěta. Výběr a podání látky prozrazuje mistra, který virtuosně ovládá svůj obor; autor ostatně patří mezi přední budovatele moderní kvantové teorie. Naprostá přesnost a spolehlivost se pojí s vzácně dokonalou jasností a přístupností výkladu, což lze, bohužel, tvrditi o málokteré jiné knize podobného druhu. Velmi často, hlavně v knihách autorů méně významných, se dociluje přístupnosti výkladu na úkor přesnosti, jindy zase — na př. v knihách, které napsali Dirac, Heisenberg, J. Neumann a jiní vynikající autoři — je zase přesnosti, po případě stručnosti výkladu obětována jeho přístupnost neodborníkovi.

Obsah knihy je stručně tento: V první kapitole (46 stran) se autor zabývá základními zjevy (experimenty) kvantové fysiky. Pojednáno jest o Planckově zákonu pro střední energii oscilátoru, o kolísání hustoty energie v prostoru naplněném černým zářením, o důkaze existence světelných kvant (Comptonův zjev), o důkaze existence materiálních vln (ohyb a interference katodových paprsků), o stacionárních stavech atomu a přechodech mezi nimi způsobených zářením (světlem) i katodovými paprsky (elektrony), dále o šířce spektrálních čar a konečně o „adiabatickém" vnějším působení na atom (Zeemanův zjev a pod.).

Druhá kapitola je věnována teoretickému rozboru a interpretaci základních zjevů. Upozorněn nejprve na zřejmou souvislost kvantování (stacionárních stavů atomu) se vznikem stojatých materiálních vln de Broglieových, je pak čtenář bezpečně veden od původního Bohrova principu korespondence k modernímu principu komplementarity a dualismu. Cesta, kterou se zde autor s čtenářem ubírá, není nikterak cesta historického vývoje. Je to postup založený na dobře promyšlené metodě induktivní, která dovoluje odhaliti a čtenáři ukázati vzájemnou věcnou souvislost a logickou podmíněnost jednotlivých kvantových zjevů a možnost, vyložiti je všecky s jednotného hlediska.

Po této průpravě jest v kapitole třetí přikročeno k systematickému vybudování a abstraktní formulaci nerelativistické kvantové a vlnové mechaniky obecného mechanického systému. Do této třetí kapitoly by vlastně patřily ještě §§ 1 a 4 z následující kap. IV. V § 1, IV je totiž pojednáno o nerelativistické teorii mechanického systému, složeného z libovolného počtu stejných (ekvivalentních) hmotných částic. Teorie tohoto systému připouští jisté zjednodušení proti teorii libovolného obecného systému, ale vyžaduje zároveň doplnění kvantové resp. vlnové mechaniky, formulované v kap. III, novým principem (Pauliho a Boseho princip). Teorie téhož systému je pak podána ještě v jiném tvaru, obecnějším v § 4, IV. (Metoda „kvantování" de Broglieových-Schrödingerových vln. Počet hmotných částic může nyní býti též neurčitý.)

Ostatek kapitoly IV jest věnován dosud nehotové relativistické kvantové teorii. Nejprve je čtenář na třech základních příkladech poučen o tom, že není známo (a že patrně neexistuje) žádné důsledné relativistické analogon nerelativistické vlnové resp. kvantové mechaniky jediného hmotného bodu. Tato okolnost vede v relativistické kvantové teorii k problémům, dosud ani zdaleka definitivně nerozřešeným, zcela jiného, nového druhu, než s jakými jsme se setkávali v teorii nerelativistické. Probrána jest teorie „kvantovaného" elektromagnetického pole Maxwellova (černé záření v dutině), naznačena Diracova teorie positronu (antičástic), uvedeno stručné schema Heisenbergovy-Pauliovy kvantové elektrodynamiky a podána diskuse hlavních potíží, s nimiž tato teorie zápasí. Promluveno pak o Bornově pokuse o sestrojení elektronu z elektromagnetického pole (z longitudinálních „světelných kvant"), stejně jako o autorově protinávrhu, zkonstruovati naopak elektromagnetické pole, resp. vyložiti světelná kvanta a jejich účinky, pomocí „hmotných bodů" typu Diracova elektronu, t. zv. neutrin. Tento poslední pokus jeví se býti zvláště slibným, přihlédneme-li k pozoruhodnému úspěchu Fermiovy teorie radioaktivního β-rozpadu, založené na neutrinové hypothese a nejnovější Heisenbergovy-Bohrovy teorie stavby atomového jádra. Také o těchto věcech je stručně referováno. Celkem by této poslední matematicko-fysikální kapitole prospělo (po přeřadění §§ 1 a 4 do kapitoly třetí) přiměřené rozšíření výkladu. Takto je výklad místy přece jen trochu příliš stručný.

Poslední kapitola knihy je věnována filosofickým, resp. noetickým základům kvantové teorie. Autor zevrubně objasňuje, obhajuje a rozvádí Heisenbergovo-Bohrovo „positivisticko-organické" pojetí (stanovisko). Výklad je všude jasný a velmi přesvědčivý.

Zákony kvantové teorie pokládá autor za speciální případ obecnějších zákonů, které platí nejen pro přírodu neživou, ale i pro organismy. Nalézti tyto obecné zákony bude úlohou fysiků a biologů v budoucnosti. Autor vyslovuje hypotesu o jejich možném tvaru. Obě poslední kapitoly jsou plné podnětů a zanechávají v čtenáři radostný dojem. Doporučuji četbu této knihy co nejvřeleji.

V. Votruba.

Tables Annuelles de constantes et données numériques de chimie, physique, biologie et technologie, vydávané v Paříži redakčním sborem, jehož předsedou je F. Joliot, byly v roce 1936 doplněny třemi dalšími svazky, v nichž jsou tabulovány výsledky měření uveřejněné v letech 1931—34 po př. 1931—36:

J. Joliot-Curie, B. Grinberg, R.-J. Walen: Données numériques sur la Radioactivité. — Physique nucléaire. — Transmutations. — Neutrons. — Positrons. (1931 à Avril 1936), 57 str., cena (váz.) 45 Kč. První část publikace obsahuje data o radioaktivitě přirozené: poločasy radioakt. prvků, vlastnosti záření α, spektra paprsků β a γ, radioaktivitu vzácných zemin, radioaktivních rud a min. vod. Druhá část týká se přeměny prvků a umělé radioaktivity a obsahuje soustavný a kritický přehled příslušných dat (rozpadové rovnice, poločasy; rychlosti, energie, doběh protonů; difuse a absorpce neutronů; vznik positronů). Každý oddíl je ukončen podrobnou bibliografií.

E. Darmois: Données numériques sur le Pouvoir rotatoire. (Années 1931 à 1934), 68 str., cena (váz.) 45 Kč. Přehled hodnot specifické otáčivosti různých opticky aktivních látek pevných i kapalných (vliv teploty, koncentrace, rozpouštědla), rotační disperse atd. — Bibliografie.

M. Magat: Données numériques sur l'Effet Raman: Spectres. — Intensités. — Modes de vibration (Années 1931 à 1934), 112 str., cena (váz.) 67,50 Kč. Tabulky obsahují úplný a kritický přehled kmitočtů a intensit Ramanových čar, jakož i údaje o jejich polarisaci, druhu kmitů molekul a výběrových pravidlech. Hodnoty týkají se zjevu Ramanova v plynech (H_2, O_2, He, N_2 a j.), v anorganických sloučeninách, v elektrolytech a ve velkém počtu různých sloučenin a směsí organických. Tabulky obsahují podrobnou bibliografii prací experimentálních i teoretických.

Ve vydávání dalších svazků, rozdělených podle oborů, se pokračuje a lze očekávati, že v roku 1937 budou vesměs tabulovány výsledky měření až do konce roku 1936. Tyto svazky spolu s těmi, o nichž výše referuji, budou tvořiti díl XI a XII Tables Annuelles a jejich celkový rejstřík má vyjíti ještě letos. Do roku 1930 vyšlo celkem deset úplných dílů Tables Annuelles, jichž ceny byly podstatně sníženy. Všechny informace poskytne Secrétariat des Tables Annuelles, Institut de Chimie, 11, rue Pierre Curie, Paris (5e). Objednávky jednotlivých svazků i celých dílů vyřizuje knihkupectví Jednoty.

Z. Horák.

V. Volterra-J. Pérès: Théorie générale des fonctionnelles. T. I. Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales. Vyšlo v Collection des monographies sur la Théorie des fonctions. XII + 359 p. Paris 1936. Kč 180,—.

Nové dílo o teorii funkcionálů, rozvržené na tři svazky, o jehož prvním svazku podávám nyní zprávu, je vlastně nové, doplněné a podrobněji zpracované vydání Volterrových knih o rovnicích integrálních a integrodiferenciálních (která je dnes rozebrána) a o funkcích čar z r. 1913.*)

Stručný přehled, vlastně jen výčet výsledků bez důkazů, dal Volterra v knize Theory of functionals**) z r. 1930, která jest doplněné zpracování dřívějšího španělského vydání.

Volterra napsal k novému dílu předmluvu, kde vykládá stanovisko obou autorů. Podle Volterry vede soustavné užívání „přechodu od konečna k nekonečnu" nejen k řešení integrálních rovnic (což ukázal Volterra již na začátku svých studií o řešení t. zv. Volterrových rovnic; později Fredholm aplikoval touž metodu a dá se jí užíti k řešení i složitějších integrálních rovnic), nýbrž i k řešení obecnějších úloh, kde běží o vyhledání funkcionálů (fonctionnelles), t. j. veličin, které závisí na funkcích. Soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ přechází, když n roste do nekonečna, v integrální rovnici; systém hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ přechází v systém hodnot, kterých nabývá neznámá funkce $\varphi(x)$ v integrální rovnici

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y = f(x).$$

Závislost hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na koeficientech původních lineárních rovnic a na jejich pravých stranách mění se limitním přechodem takto: pro určité $x\,(a < x < b)$ je hodnota $\varphi(x)$ funkcionál závislý na daných funkcích $K(x, y)$ a $f(x)$.

Hlavním problémem nového spisu bylo vypracovati více do detailů základní pojmy funkčního počtu. Tyto pojmy se vztahují hlavně k prostoru,

*) Viz moje referáty o obou těchto knihách v Časopise **43** (1914), 73—76 a 428—432.

) Viz můj referát v Časopise **61 (1932), 200—201.

v němž funkce jest prvkem. Po první kapitole, kde je vyložen pojem funkcionálu, následuje kapitola o spojitosti funkcionálů. Vychází se podle E. H. Moorea a Frécheta z pojmu abstraktního prostoru; následuje odstavec o spojitosti a polospojitosti (semi-continuité) funkcionálů redigovaný L. Tonellim, a pak odstavce o distancích ve funkčním prostoru a o prostoru měřitelných funkcí. Třetí kapitola jedná o lineárních funkcionálech $U[f]$, t. j. o takových, že platí (c značí libovolnou konstantu)

$$U[(y_1(t) + y_2(t)] = U[y_1(t)] + U[y_2(t)], \quad U[cy(t)] = c\, U[y(t)],$$

o funkcionálech druhého stupně a vyšších stupňů. Následuje kapitola o derivacích a diferenciálech funkcionálů a pak pátá kapitola o t. zv. direktní metodě k vyšetření maxim a minim funkcionálů. Existence funkce, jež danému funkcionálu dává maximální nebo minimální hodnotu, dokazuje se zde bez zřetele k jejímu analytickému vyjádření. Speciálním případem problému jest úloha variačního počtu: nalézti funkci, jež dává danému omezenému integrálu největší nebo nejmenší hodnotu. Klasická metoda vede zde přes t. zv. Eulerovu diferenciální rovnici; hledaná funkce vyhovuje této rovnici. Naproti tomu nové metody dávají důkaz o existenci řešení bez užití Eulerovy rovnice.

Šestou kapitolou knihy začíná se její druhá část, která je věnována teorii integrálních rovnic. Jsou postupně vyloženy rovnice Volterrovy a Fredholmovy, řady orthogonálních a biorthogonálních funkcí a některé integrální rovnice nelineární.

O významu těchto teorií, k nimž oba autoři přispěli velikou řadou původních prací, psal jsem již v citovaných recensích starších Volterrových spisů; podstatně zdokonalený výklad, který je podán v tomto novém spise, zaslouží si pozornosti matematiků a další dva svazky měly by vyjíti co nejdříve.

Bohuslav Hostinský.

B. Recense didaktických a jiných publikací.

Klíma-Ingriš: Deskriptivní geometrie pro V. třídu reálek. Nákladem Jednoty čsl. matematiků a fysiků, Praha 1934. Str. 109. Cena 13,60.

Učebnice deskriptivní geometrie, sepsaná Klímou a Ingrišem, podstatně se liší od učebnic staršího typu pojetím a zpracováním. Vlastnímu jádru učebnice je předeslán krátký úvod (10 str.), v němž jsou připomenuty základní stereometrické pojmy, definice a poučky, jež jsou nezbytné k pochopení celé deskriptivní geometrie. Tato část knížky jedná též o určení bodu v prostoru pomocí souřadnic; mimo to jsou v ní definovány různé druhy promítání. Druhá část zabývá se kolmým promítáním na jednu průmětnu, t. zv. promítáním kotovaným. V běžných učebnicích deskriptivní geometrie se tomuto promítání věnuje obyčejně celkem malá pozornost, ač právě toto promítání velmi ulehčuje vniknutí do dalších částí geometrie deskriptivní a mimo to má velkou cenu pro rozvinutí názoru a geometrické představy. Autoři správně pochopili tuto přednost kotovaného promítání a provedli v něm všechny základní úlohy deskriptivní geometrie. Ve třetí části knížky je stručně probráno šikmé promítání. Podle mého názoru bylo by však lépe místo slova „šikmé promítání“ užívati termínu „kosoúhlé promítání“, který úplně odpovídá řeckému slovu klinogonální, a mimo to nesvádí k dosti časté a klamné představě, neboť promítací paprsky při promítání šikmém nemusí býti vždy šikmé (t. j. ani vodorovné, ani svislé), nýbrž slovem šikmé promítání má býti vyjádřen pouze fakt, že promítací paprsky jsou k průmětně nakloněny. Čtvrtá část je věnována kolmému promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Novinkou tu je, že autoři nelpí na pevných dvou průmětnách a tím i na základnici (ose X) jako na nezměnitelném útvaru, nýbrž pokládají polohu základnice X, a tedy tím i celkovou polohu průměten v prostoru za něco zcela nepodstatného. To považuji za jednu z velkých předností knížky. Rovněž je tomu tak i v části V., v níž se jedná o zavádění nových průměten, zejména o využití třetí průmětny k řešení rozmanitých úloh. Část VI. jedná o rovinných průsecích a sítích hranolů a jehlanů; podávají se v ní základy afinity (o níž se jedná i v části II.) a základy středové kolineace. Získaných znalostí využívá se pak při sestrojování průsečíků přímky s hranolem nebo jehlanem. V části VII. probrány jsou základy geometrálného osvětlování základních útvarů prostorových a hranatých těles, stíny tělesa na těleso a stíny dovnitř dutých hranolů a jehlanů.

Slovní styl knížky je velmi jasný a geometricky přesný. Je v něm zřetelně viděti snahu autorů, aby knížka neplnila jen úkol býti sbírkou úloh pro domácí cvičení, nýbrž, aby vedla žáky k samostatnému přemýšlení a k zdokonalení geometrického úsudku. K tomu mají napomáhati též hojné a pěkně provedené obrázky, jež jsou zároveň vzory pro úpravu domácích cvičení žáků, případně i pro úpravu jejich rysů. Hojnost příkladů (212) pak celou knížku doplňuje v ladný celek.

Na konec bych se však rád dotkl ještě jedné věci. Body v knížce jsou označovány písmeny malé latinské abecedy, přímky a čáry písmeny velké latinské abecedy. Toto označování je, jak známo, ve sporu s označováním těchto útvarů v učebnicích aritmetiky a geometrie. Je ovšem velmi těžko rozhodovati, který z obou způsobů je lepší; oba mají totiž své specifické přednosti i vady. Také, jak je známo, učitelé matematiky a deskriptivní geometrie rozcházejí se ve svých názorech vzhledem k této věci. Avšak označování útvarů je věc úplně nepodstatného rázu; vše záleží pouze na dohodě. Bylo by ovšem žádoucno, aby aspoň na střední škole panoval v matematice a deskriptivní geometrii souhlas, není však žádnou vážnou překážkou úspěchu žactva, když tomu tak není. Jak jsem se však dozvěděl, v novém slovenském vydání učebnice, a pravděpodobně i v novém vydání českém, budou geometrické útvary označovány souhlasně s označováním obvyklým v matematice, t. j. body písmeny velké latinské abecedy, přímky písmeny latinské abecedy malé.

Knížka jako celek budí dobrý dojem. Snad je v ní shrnuto mnoho látky, ale učitel má vždy možnost látku upraviti podle stavu vědomostí žáků. Velká práce, kterou autoři věnovali jak slovnímu textu, tak i obrázkům, a celková úprava knížky jistě dojde zaslouženého ocenění nejen v řadách učitelů deskriptivní geometrie, ale i v řadách žáků, jimž knížka bude dobrou příručkou a pramenem ověření výkladů, které vyslechli ve škole.

Dr. *Karel Koutský.*

Klíma-Ingriš: Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálek. Nákladem Jednoty čsl. matematiků a fysiků, Praha 1935. Str. 184. Cena Kč 22,80.

Vše, co jsem pověděl v referátě o prvním dílu této učebnice (deskr. geom. pro V. tř.), je možno takřka beze změny opakovati i pro tuto učebnici. Knížka je rozdělena na několik částí. V části I. probírán je rovnoběžný průmět kružnice a podány jsou rozmanité konstrukce elipsy jak z os, tak i ze sdružených průměrů. Je tu přihlíženo k souvislosti kružnice s elipsou jako jejím afinním obrazem, čehož je pak využito k sestrojování vržených stínů kružnice při rovnoběžném osvětlování. Část II. zabývá se kruhovou plochou válcovou, jejími průseky s rovinami, sestrojováním sítí a rozvinutím pláště šikmého kruhového válce. Zcela obdobně část III. jedná o kruhové ploše kuželové. Tu věnována je zejména pozornost rovinným průsekům s kuželovou plochou, a podány jsou rozmanité konstrukce parabol a hyperbol. Zejména pak poukázáno je na hyperbolu jakožto kolineární útvar ke kružnici, a probrány jsou některé společné vlastnosti kuželoseček. Též jedná se tu o kruhových (cyklických) řezech na šikmé ploše kuželové. V části IV. popsány jsou konstrukce průsečíků přímky s kuželovou a válcovou plochou a konstrukce tečných rovin bodem nebo rovnoběžných s daným směrem ke kuželové nebo válcové ploše. Část V. zabývá se osvětlováním kužele a válce. Jsou tu probrány základní úlohy, vržené stíny přímky a mnohostěnů na kužel a válec a stíny dovnitř dutého kužele a válce. Část VI. jedná o kulové ploše. Mimo úlohy základní (body na kulové ploše a tečné její tečné roviny), je tu pěkný návod k strojným úlohám týkajícím se kulové plochy, probrány jsou rovinné průseky a průsečíky přímky s kulovou plochou; rovnoběžné osvětlení a šikmý průmět kulové plochy jsou společně vyloženy v témž paragrafu. Též o osvětlení duté polokoule je tu řeč. Oddíl tento je pak zakončen pěknou statí o centrálném osvětlení kulové plochy. Část VII. věnována je pronikům těles. Po předběžných obecných výkladech řeší tu autoři celou řadu úloh pro kuželovou, válcovou a kulovou plochu v rozmanitých vzájemných polohách (na př. když obě plochy se protínají nebo se dotýkají), a připojují k tomu paragraf, jednající o osvětlení skupin oblých těles. Rotační plochy jsou probírány v části VIII. Jedná se tu zvláště o rovinných průsecích s rotační plochou, zejména s rotačními plochami 2. stupně a s anuloidem, jakož i o osvětlování rotačních ploch vůbec. Základní úlohy centrálního promítání obsaženy jsou v části IX., k níž připojuje se část X., jednající o perspektivě (zajímavé jsou na př. dvě fotografie z IX. sokolského sletu v Praze). Tento velmi pěkně zpracovaný oddíl je doplněn poznámkami o perspektivě v malířství a o stereoskopickém zobrazování. Část XI. jedná o užití deskriptivní geometrie v kartografii; autoři tu zajímavým způsobem vykládají o rovinných, válcových a kuželových projekcích kartografických. Připojena je ještě část XII., nazvaná Opakování, v níž jedná se o vícenásobné transformaci průměten, a zvláštní dodatek o dějinách deskriptivní geometrie, v němž mimo zakladatele deskriptivní geometrie Gasparda Mongeho, je vzpomenuto celé řady vynikajících pěstitelů této vědy a to nejen cizích, ale i našich. Dodatek tento může sloužiti učitelům geometrie deskriptivní k tomu, aby ve smyslu návrhu učebných osnov podali příležitostně svým žákům krátké výklady týkající se vývoje deskriptivní geometrie a zpestřili tak tím svůj věcný výklad. Knížka je doprovázená velkým množstvím pěkných příkladů (337), jichž možno užíti jednak za témata k týdenním domácím úkolům, po př. i pro rysy.

Dr. *Karel Koutský.*

Klíma-Ingriš: Deskriptivní geometrie pro VII. a VIII. třídu reál. gymnasií a reformních reálných gymnasií. Nákladem Jednoty čsl. matematiků a fysiků, Praha 1935. Str. 155. Cena váz. výt. Kč 19,—.

Učebnice obsahuje ve zkrácené formě celé partie z obou učebnic, jež autoři sepsali pro reálky. Látka je však omezena velmi pozorným způsobem, neboť nebylo pominuto žádné důležité partie, jež je třeba k pochopení základů geometrie deskriptivní. Celá učebnice rozpadá se na čtrnáct oddílů. V části I. jedná se o základních způsobech promítání a určení bodu v prostoru. Část II. obsahuje kolmé promítání na jednu průmětnu, část III. promítání šikmé. Část IV. je věnována základům kolmého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, část V. jedná o zavádění nových průměten. Rovinné průseky a sítě hranolů a jehlanů jsou probírány v části VI., na níž navazuje část VII. jednající o pronicích hranatých těles a průsečících přímky s hranatými tělesy. Část VIII. zabývá se osvětlováním, část IX. pak rovnoběžným průmětem kružnice. V části IX. jednáno o rotačních válcích, rotačních kuželích a kouli, načež část XI. je věnována rovinným průsekům a průsečíkům přímky s rotační plochou válcovou, resp. kuželovou a s plochou kulovou. Část XII. je pokračování části VIII.; jedná se tu o osvětlení rotačního válce, rotačního kužele a koule, a o stínu přímky na tato tělesa. Obdobně část XIII. je pokračování části VII.; jsou v ní probírány proniky oblých těles ve zvláštní poloze. Závěr učebnice tvoří část XIV., jednající o některých použitích deskriptivní geometrie, na př. perspektivě, plánech, mapách, stereometrických úlohách; mimo to obsahuje stať z dějin deskriptivní geometrie. Knížka svým celkovým zpracováním i vnější úpravou pěkně se přidružuje k učebnicím sepsaným autory pro reálky. Obsahuje hojnost příkladů (276) pro domácí cvičení žáků i pro rysy. Jistě bude tato učebnice plniti svůj úkol pro reálná a reformní reálná gymnasia právě tak dobře, jako předešlé dvě učebnice pro reálky.

V dnešní době, kdy studium deskriptivní geometrie omezuje se na všech stranách nejen rušením reálek a jejich změnou v reálná gymnasia nýbrž i možností volby mezi deskriptivní geometrií a konversací, dnes, kdy deskriptivní geometrie je odstrčena takřka na poslední místo, ač právě celou svou povahou vede k zesílení prostorového názoru a prohloubení matematického studia tak nezbytného v rozmanitých otázkách brannosti státu, je společná práce obou autorů tím více záslužná. Oba autoři dali naší střední škole řadu dobrých učebnic naplněných moderním a pružným duchem, které se úplně vyrovnají učebnicím jiných států, v nichž deskriptivní geometrie má daleko lepší, a stále zlepšované postavení v osnově učebných předmětů. Jsem jist, že přednosti těchto učebnic najdou ocenění u odborníků i u žáků k prospěchu celého předmětu, jemuž jsou věnovány.

Dr. *Karel Koutský.*

Jan Vojtěch: Geometrie pro IV. třídu středních škol (šesté vydání), pro V. tř. (šesté vydání), VI. tř. (páté vydání) gymnasií všech typů, reálek, pro VII. tř. (páté vydání) gymnasií a reál. gymnasií, reálek a pro VIII. tř. refor. reál. gymnasií. Vydání nově upravená podle učebních osnov z r. 1933. Nákladem Jednoty čsl. matematiků a fysiků v Praze.

Z těchto 7 učebnic nejvíce změny doznala geometrie pro IV. třídu. Týká se však více přemístění látky než způsobu podání, který zůstal, jak jej požadovaly dřívější osnovy, totiž opakování a prohloubení učebné látky dříve probrané s výkladem eukleidovského způsobu definicí a důkazů na charakteristických příkladech. Jest třeba i v tento způsob myšlení proniknouti, ale bylo by dobře více formou heuristickou tyto části upraviti, aby se stala učebnicí nejen pro učitele, ale i pro žáky.

Ostatní učebnice ve svém základě obsahem i podáním látky zůstaly téměř nezměněny vzhledem k dřívějším (i předválečným z r. 1911, 1912) vydáním, jen někde přesunuta látka, změněny neb přidány příklady ku procvičení. V VII. třídě gymnasií, reál. gymn., kde matematice byly přiděleny pouze 2 hodiny, byly některé stati z analyt. geometrie vypuštěny (svazek přímek, mocnost bodu ke kružnici, chordála a j.), některé části proloženy petitem. Ale i tak jest tato látka obsažná pro 2 hodiny týdenní, třebaže veliká část z aritmetiky byla přesunuta do VI. třídy. V VII. tř. reálek (VIII. tř. refor. reál. gymn.) do začátku počtu infinitesimálního jsou zařazeny též nejjednodušší případy počtu integrálního. Snad tyto mohly býti trochu prohloubeny a rozšířeny některými pravidly obdobně, jaká byla stanovena pro derivaci. Neboť jen přímé hledání primitivní funkce jest pro žáky dosti komplikované. Ovšem Návrhy učebních osnov vytyčují (III. část: Poznámky), že cílem výkladů počtu infinitesimálního nemá býti mechanické nacvičování derivačních a integračních vzorců, nýbrž první uvedení v chápání pojmu meze. Pro tuto třídu žádají také osnovy příležitostné srovnání metody syntetické a analytické. Poukazy na toto srovnání v učebnici jsou nepatrné. Jistě se to dá uplatniti při počítání některých příkladů odkazováním na konstrukci. Látka pro V. třídu (zvláště reálek) obsahuje maximum. (V osnovách o příčkách trojúhelníka není zmínky.) I nejsvědomitější učitel s dobrým materiálem bude míti dosti práce, aby látku zdolal a procvičil. O Eukleidových větách bude nucen učitel se podrobněji zmíniti, nebylo-li na ně dosti poukázáno ve III. třídě. Neboť tyto v osnovách pro III. tř. uvedeny nejsou.

Postup podávání látky se děje formou přednášející, méně heuristickou. Po výkladu látky následuje objasnění a vysvětlení její na několika příkladech, což lze uvésti jako velikou přednost učebnice. Naznačené příklady jsou vhodně voleny obsahem i postupem a mohou sloužiti ku promyšlení za domácí cvičení. Následují úlohy ku procvičení. Bylo by dobře u příkladů obtížnějších místy podati návod (hlavně pro IV. a V. třídu), podobně jako jest uváděn ve Sbírce a býval v dřívějších učebnicích (na př. Jandečka-Libický). Uváží-li se, že v geometrii pro IV. třídu ze 142 příkladů jest 52 (36,7%), u nichž jde o odůvodnění a dokázání, tím spíše třeba tento požadavek i pro tento druh příkladů zdůrazniti, ježto jest pro žáky něčím novým. Vždyť ve III. třídě příklady se opíraly o konstrukci a výpočet. V geometrii pro VI. tř. reálek bylo by možno zařaditi i příklady z fysiky (mechaniky), i když takové jsou ve Sbírce. Neboť právě v této třídě na tomto typu spojitost obou předmětů a doplňování jest nutná. Velmi vhodné v téže učebnici jest užití sférické trigonometrie v astronomii, při čemž jsou uvedeny i základní pojmy, veličiny sférické astronomie. Neměnitelnost učebnic, když toho nevyžaduje naprostá nutnost, lze schvalovati z národohospodářského stanoviska. (Srovnej přání mnoha Rodičovských sdružení.)

Vojtěchovy učebnice geometrie vyhovují obsahově i metodicky — vždyť vhodnější dosud napsány nebyly — a záleží na učiteli, aby jich dovedl použíti a uplatniti pro správné dosažení cíle vyučování geometrie, jak jej požadují Návrhy učebních osnov. Dr. *Jaroslav Bílek.*

Hugo Devorecký-Dr. Mik. Šmok: Fysika pro vyšší třídy středních škol. Díl I. Nákladem JČMF v Praze 1935. Cena 18,80 Kč.

Nové osnovy postavily metodické odborníky před volbu: upraviti učebnice dosavadní, nebo napsati nové. Není třeba litovati toho, že ve fysice nepadlo rozhodnutí jednostranně: kromě učebnice Maškovy, přepracované Wanglerem, máme dnes ještě dvě učebnice zcela nové. Učebnice Devoreckého-Šmoka je jedna z nich.

Rozvržení učiva v učebnici odpovídá zcela osnovám. Také metodické pojetí je v souhlasu s poznámkami k nim. Jednotlivé partie navazují na zkušenosti a na poznatky stupně nižšího, přihlíží se k praktickým aplikacím a k historickému vývoji. Je přihlíženo k úzké spojitosti matematiky s fysikou a dbáno matematické přesnosti ve formulaci zákonů.

Tak na př. jasným, přes všechnu stručnost, způsobem zdolává učebnice infinitesimální stránku kinematiky. Porozumění by však velmi posloužily grafy dráhy a rychlosti. Učebnice mluví o grafech zákonů jen obecně, v úvodu. Zde, v kinematice, jsou velmi prospěšné. Zvláště druhý z jmenovaných může býti východiskem malé exkurse na okraj počtu integrálního (dráha limitou $\Sigma\, v \Delta t$, v grafu rychlosti znázorněna plochou).

V úvodu, v odstavci o váze a hmotě neškodí připomenouti, že věta o rovnosti hmot, rovnají-li se váhy za týchž podmínek, obsahuje implicitné (až na faktor) definici hmoty (t. zv. těžké).

V kinematice, u pohybu rovnoměrného, doporučuji pozměniti poněkud stylisaci: „Význačnou vlastností p. r. jest, že průměrná jeho rychlost je nezávislá na volbě časového intervalu“; nikoli: „každá průměrná jeho rychlost jest konstantní.“ Průměrná rychlost kteréhokoli pohybu je v určitém intervalu vždy jisté určité číslo, tedy konstanta.

V dynamice: Místo užívaných názvů prvý, druhý, třetí zákon pohybový přiléhají povaze věci lépe názvy princip setrvačnosti, zákon pohybový, princip akce a reakce. Velmi pěkně je vyložen zákon pohybový kombinací pokusu na padostroji s úvahou o volném pádu. Druhá část zákona (úměrnost síly a pohybované hmoty) se totiž pokusně na padostroji dobře ověřiti nedá (moment setrvačnosti kladky!); přesto bývá příslušný pokus popisován. Zákon pohybový, jenž má býti vštípen žákům co nejdůkladněji, doporučuji vysloviti poněkud obšírněji: „Síla je přímo úměrná součinu hmoty pohybované a zrychlení, které této hmotě uděluje."

Jasná a zajímavá je definice práce: $L = kPs$, konstanta v případě, že P a s jsou směru souhlasného nebo směrů opačných, zvolena za jedničku. S ohledem na obecný případ stojí za úvahu, nemají-li se oba případy už nyní volbou konstanty ± 1 rozlišiti (práce kladná a záporná, vykonaná a spotřebovaná). Správné jest, upamatovává-li učebnice důsledně na to, že statické jednotky jsou závislé na stanovišti. Také dvojí forma výrazů pro oba druhy mechanické energie je užitečná.

Po speciálním principu zachování energie (pro děje mechanické) jest záhodno formulovati princip obecný v dvojí šíři: 1. „Při každém fysikálním ději je součet zúčastněné energie konstantní." 2. „Součet veškeré energie Vesmíru je konstantní." Prvé znění je potvrzeno zkušeností, druhé je extrapolací do nejširších možných mezí.

Užití gotických písmen pro vektory je v naší středoškolské učebnici novinka; není sice nutné, není však ani na škodu výkladu.

Skládání sil je stručně a jasně vyloženo, často je užito průhledné a přehledné symboliky. O větě, týkající se algebraického součtu momentů složek, mohl by se žák domnívati, že platí jen pro síly rovnoběžné (kde je uvedena). Mělo by se užívati i věty týkající se algebraického součtu momentů vzhledem k libovolnému bodu roviny složek. Velmi vhodný je dodatek o působení síly na těleso s pevnou osou nebo volné, rovněž výklad rovnováhy (nutnost reakce váhy tělesa — pevnosti závěsu nebo podpory).

V nauce o strojích je pěkný obecný úvod o nich, o příkonu a výkonu a pod. U vah není dobře vynechávati nerovnoramenné, zvláště decimální; jsou dobrým cvičením statiky sil rovnoběžných. Vzhledem k složitějším případům doporučuji výklad rovnováhy na šikmé rovině založiti obecněji: „Výslednice všech sil na těleso působících je při rovnováze kolmá k rovině (a ruší se reakcí roviny)."

V pokračování dynamiky je výklad pohybu harmonického založen správně na jednoduchých pozorováních pohybu vhodných pružných těles; teprve potom je tento pohyb identifikován s průmětem rovnoměrného pohybu kruhového. Směr osy rotace určí se, podle mého soudu, nejlépe pravidlem šroubovým: Rotace a směr její osy mají se k sobě jako rotace a postupný pohyb šroubu. Pravidlo obdobné se uplatní i v nauce o magnetickém poli vodiče a pod. U precesního pohybu je výhodnější užíti pravidla o snaze osy vlastní rotace splynouti s osou rotace vnější (vnucené). Věty o sklánění a vzpřimování osy setrvačníku selhávají, je-li jeho osa vodorovná.

V nauce o pružnosti je uveden i vzorec pro torsní úhel a poukaz na jeho užití; je to prospěšné. Zato ráz hmot nepružných nemá být vypuštěn; je právě tak důležitý, jako dokonale pružných.

V astronomii, velmi pěkně podané, není výhodné odsunouti výklad o měření času až na konec. Jest na př. záhodno vyložiti souvislost obou soustav rovníkových zprostředkující veličinou, hvězdným časem. Souvislost se krásně vykládá na indukčním globu a je důležitá pro poučení o hvězdářské praksi. Také věta: „Měříme-li denně . . . rektascensi středu slunečního, . . ." vede k úvahám, jak ji měříme. Přímo jistě ne; i tu je na místě poukaz na hvězdný čas. Velmi jasný je výklad precese a výklad meze datování. Také méně užívaný tvar zákona Keplerova $v = k/\sqrt{a}$ je užitečný; je ho použito k odvození zákona gravitačního.

V hydromechanice není dosud žádoucí jednotnosti v obsahu pojmu hydrostatického tlaku. Jednou je to zásadně tlak na plošnou jednotku, jindy každý tlak způsobený jen vahou kapaliny (na př. v této učebnici); někdy se obě pojetí mísí. Ačkoli věc nepůsobí zvláštních obtíží, přece jen by v zájmu důslednosti bylo žádoucí sjednocení. Velmi pěkný je výklad hydrodynamiky; je obsažný a snadno srozumitelný. Totéž platí i o aerodynamice. Je to velmi cenná okolnost vzhledem k stoupajícímu významu těchto partií.

Barometrické měření výšek nemělo by se vypouštěti (výškoměry!); ani odvození příslušného zákona nemá scházeti. Také schema rotační vývěvy by přineslo užitek. V odstavci o práci plynu jest doplniti slova „jestliže se plyn rozpíná“ slovy „proti vnějším silám“. Výtok plynu do vzduchoprázdna není prací (a není provázen ochlazením = zmenšením vnitřní energie — dodá se v thermice).

V thermice by se měl odstraniti nesouhlas rovnice 1° C $= 9/5^\circ$ F s „rovnicí“ t° C $= (9/5t + 32)^\circ$ F a pod. Velmi vhodné je zařazení druhé věty thermodynamické. Mohlo by se tu však zajíti i k jejímu kosmologickému významu (vzrůst entropie ve Vesmíru); je to doplněk principu zachování energie.

Že je uveden i zjev Leidenfrostův, dále údaje o výživné hodnotě potravin v kcal/kg je důkazem snahy autorů opříti vyučování o denní zkušenosti a oživiti je věcmi praktického významu. Snaha tato je patrna i na mnoha místech jiných, což značně zvyšuje hodnotu této učebnice.

Časově významnou složkou každé učebnice jest, jakou měrou přihlíží k výchově k brannosti. V naší učebnici shledáváme rychlost vojenského pochodu, padák, děje v hlavni pušky i pohyb střely po výstřelu (rychlost však je u našich zbraní 810 m/sek, váha střely 10 g*), balon, letadlo, pohyb předmětu vrženého z letadla (je možno mluviti přímo o bombě) letícího vodorovně. Tu bychom doporučovali početní úlohy, na př.: jak daleko od určitého místa dopadne bomba, vypustí-li ji letec v okamžiku, kdy se nad místem nachází, letí-li letadlo vodorovně, nebo, klesá-li prudce v určitém úhlu a pod. Také při šikmém vrhu jsou prospěšné úlohy o zásahu určitého místa v svislé rovině výstřelu. I když skutečnost je jiná, složitější, na což může být jen kvalitativně upozorněno, přece jen přinášejí tyto úlohy jistý zisk pro budoucí vojáky. Také výklady o setrvačníku mohou se doplniti úvahami o vlivu náhlých změn letu letadla ve směru vodorovném nebo svislém (letadlo reaguje současně i ve směru svislém nebo vodorovném), o rotaci střel (u nás pravotočivé) a dělostřelecké deviaci.

Cenným doplňkem učiva jsou úlohy. Jejich výběr je pečlivý, formulace jasná a určitá. Měly by být vesměs [opatřeny] výsledky, nebo (zvláště u obecných) pokyny k řešení. Astrono[mic]ké úlohy bývají zanedbávány, ne však v této učebnici. Úloha o výpočtu synod. měsíce ze siderických oběhů Slunce a Měsíce může být rozšířena na planety. Úlohy vedou k rovnicím prvního stupně a jsou podle Lietzmanna užitečnější než úlohy o cyklistech na kruhové dráze.

Žádná učebnice neobejde se bez obrazců. Mimo primární svůj úkol mají též vychovávati schopnost porozuměti i jiným schematickým obrazcům a také takové obrazce kresliti. Učebnice tato obsahuje jich dostatečný počet pěkně provedených a celkem správných, pokud se týče projekce. Jsou vesměs kreslené a splňují tedy měrou náležitou předepsaný výchovný úkol. Pohřešujeme obrázek průběhu časové rovnice. Obrázek indikátoru je po stránce kinematické vadný; konec pisátka by neopisoval svislou přímku.

Učebnice dbá předepsané spojitosti nižšího a vyššího stupně otázkami uvádějícími jednotlivé partie; odpovědi na ně nejsou však nutné. Terminologie a symbolika drží se přísně „Návrhu" z r. 1933.*) Odchylné od „Návrhu" je pojmenování joul (místo joule), tepelná roztažnost (místo součinitel roztažnosti). Didakticky je velmi cenné rozlišování jednotek váhových (g*) a hmotných (g). Také je dbáno důslednosti v užívání rozměrů veličin.

Učebnice je psána slohem jasným, ač stručným, jazykově správně. Vnější úprava její vyniká dobře volenými typy, výrazným tiskem důležitých formulí a užitím trojího tisku k rozlišení závažnosti jednotlivých oddílů. Rozdíl mezi garmondem (části závazné) a borgisem (části, jež lze zpracovati volněji) je však málo zřetelný. Snad by bylo nejvhodnější označiti číslo závažné čarou po straně.

Obšírné rejstříky, věcný a jmenný, doplňují knihu a usnadňují opakování. Jmenný je zároveň souhrnem historických poznámek. Je správné, že je pamatováno na poučení o správné výslovnosti, a to i u jmen francouzských.

Rozsah učebnice je přiměřený počtu hodin fysice vyměřených. Také cena nevybočuje z obvyklých a přiměřených mezí.

Učebnice Devoreckého-Šmoka splňuje tedy požadavky kladené na moderní učebnici. Bude se jí jistě s úspěchem používati jako knihy s ostatními učebnicemi při nejmenším rovnocenné. Možností výběru podle osobitých sklonů pedagogů z několika výborných učebnic může vyučování fysice jen a jen získati.

Václav Skalický.

Ing. Dr. **Josef Šaffránek:** Praktická geofysika. Hledání vod, rud a jiných podzemních hmot. Nákladem Čsl. Grafické Unie 1937. 80 stran, 31 obrázků. Cena neudána.

Kniha podává lehkou vyprávěcí formou přehled o užití proutku, siderického kyvadla a praktické geofysiky pro hledání vod, rud a jiných látek. Psána jest bez uvádění hlubší teorie a bez matematické formulace výsledků měření jednotlivých metod, jimž se autor úmyslně vyhýbá, protože jeho kniha vychází z praxe a jest určena hlavně pro ty, kdož mají o taková praktická měření zájem a chtějí se o nich krátce a rychle orientovati.

Nejprve popisuje kouzelný proutek a siderické kyvadlo, jejich historii a použití. Autor, v jehož rukou proutek i kyvadlo reaguje, je přesvědčen, že většina lidí má vrozenou schopnost na tyto pomůcky reagovati, a že po určitém výcviku dostanou jejich charakteristické reakce. Podle nadání dá to někomu méně práce, někomu více, a jako všude jinde i zde jsou vyslovené antitalenty, u nichž ani nejvytrvalejší práce nepovede k cíli. Upozorňuje však, že nevíme, nač vlastně proutek reaguje, takže jeho užití pro hledání vod, rud a jiných látek je velmi nejisté. Může se snad osvědčiti nanejvýš pro některé mělké práce, ale jinak jsou jeho údaje nespolehlivé a ve valné většině případů selhávají. Proto také varuje před užitím proutku a siderického kyvadla pro tyto účely, ale doporučuje další studium jejich reakcí, které by při vědeckém studiu této otázky mohlo přinésti zajímavé výsledky.

Ukazuje, že kouzelný proutek má jednu základní správnou myšlenku: snaží se zachytiti určité síly, které vycházejí z hledaných hmot a prozradí jejich přítomnost i ve větší vzdálenosti od nich. K tomu však nepotřebujeme nějaké tajemné síly a jejich nejisté reakce, nýbrž můžeme použíti řady známých fysikálních sil, jichž zákony známe a které dovedeme měřiti. Na tom zakládají se právě metody praktické geofysiky. Podle toho, kterých sil užijeme, dostáváme řadu těchto metod. Celkem lze je rozděliti ve dvě veliké skupiny. Především jsou to metody užívající sil a silových polí vycházejících

---

*) Časopis **63** (1933/4), V 67.

přímo z hledaných hmot. Sem patří metody gravitační, magnetické, geothermické, radioaktivní, měření přirozených zemních potenciálů a proudů. Druhou skupinu tvoří metody, které užívají proměřování silových polí uměle buzených a jejich změn působených hledanou hmotou. Sem patří zejména metody seismické, studující šíření umělých otřesů půdou, a měření elektrická, pozorující rozdělení elektrického proudu zaváděného uměle do půdy, do vrstev o různé elektrické vodivosti. Metody tyto uvedeny jsou pouze přehledně, při čemž je brán zvláštní zřetel na možnost jejich použití pro řešení otázek vodohospodářských.

V třetí části knihy, která jest psána na základě četných praktických měření, jež autor během posledních let provedl, je podán přehled měření elektrických, hlavně popis užití metody, která proměřuje postupně průměrný odpor půdy v různých hloubkách. Autor proměřil tímto způsobem podrobně zejména také celé okolí Velkých Popovic a uvádí řadu příkladů z těchto měření. Souhlas hodnot získaných na základě těchto měření s výsledky zhotovených vrtů a studní jest pozoruhodný. Kniha ukazuje, že autor má velmi dobré znalosti geologické, které jsou bezpodmínečným požadavkem pro zdar takových měření, protože bez těchto znalostí není možno ani s nejlepší aparaturou dosáhnouti uspokojivých výsledků. Kniha obsahuje přehled základních geologických vlastností a ukazuje, jak se na základě nich dá získati přehled o možnosti nálezu hledaných hmot a jak se pak na základě těchto poznatků musí vlastní geofysikální měření upraviti. Na konec obrací se zase přímo k otázce, které jest věnována v knize stále hlavní pozornost, totiž na použití praktické geofysiky pro řešení otázky zásobování vodou. Upozorňuje, že provedení řešení bude jiné pro malý podnik, jiné pro velké vodohospodářské projekty. Na konec upozorňuje, že také studium terénu pro hledání rudy, petroleje a jiných užitečných hmot koná se způsobem zcela obdobným.

Kniha bude dobrou informací o těchto měřeních a má cenu hlavně pro údaje o praktických měřeních, kterých u nás bylo dosud provedeno poměrně málo. *K. Šoler.*

C. Původní publikace československých matematiků a fysiků.

J. Hrdlička, M. A. Valouch, L. Zachoval: Contribution à l'étude de l'effet Debye-Hears. C. R. 203, 1936, 786.

D. Publikace redakci zaslané.

K. Šoler: Magnetická a elektrická kontrola kolejnic. Zprávy železničních inženýrů, 1937, č. 1 a 2.

K. Šoler: Přírodní síly v lékařství. Věstník Čsl. fysiatrické společnosti, XVI, č. 3 a 4.

K. Šoler: Kontrola trhlin strojních součástí magnetickou analysou. Strojnický Obzor 1937, č. 6 a 8.

D. E. Smith-J. Ginsburg: Numbers and numerals. A story book for young and old. New York 1937. 8^0 X, 52 str, Kč 8,— Contributions of mathematics to civilization, No. 1.

J. M. Thomas: Differential systems. New York 1937. 4^0 X, 119 str.