Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D155--D157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123395

ÚLOHY.

Úloha 1. Složenou funkci $f(g(x))$ značme kratčeji $f\,g(x)$; podobně místo $f(f(x))$ pišme $f^2(x)$ a pod.; čtenáři je již jasno, co značí na př. $f^2gf^3h^2\,f(x)$; o této funkci budeme říkati, že je „superposicí" funkcí f, g, h a podobně v analogických případech. — Budiž M libovolná uspořádaná množina[1]); znakem $\mathfrak{F}_M$ označme množinu všech „neklesajících" funkcí, definovaných v M, jejichž „hodnoty" patří do M (t. j. každému $x \in M$ je přiřazen určitý prvek $f(x) \in M$; je-li $x \in M$, $y \in M$, $x < y$, je $f(x) \leqq f(y)$). Je-li $a \in M$, $b \in M$, $a < b$, značíme znakem $\langle a, b\rangle_M$ množinu všech $x \in M$, pro něž je $a \leqq x \leqq b$. — Dokažte tyto věty:

Věta I. Budiž M uspořádaná množina; nechť v M existují čtyři prvky $a < b < c < d$ tak, že [2]) $\langle a, b\rangle_M \cong \langle c, d\rangle_M \cong M$. Potom platí: 1. Je-li $f_1(x), f_2(x), \ldots$ libovolná posloupnost funkcí z $\mathfrak{F}_M$, existujív $\mathfrak{F}_M$ *tři* funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ tak, že všechny funkce f_n jsou superposicemi funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. — 2. Existují *tři* funkce v $\mathfrak{F}_M$, jež nejsou superposicemi žádných *dvou* funkcí z $\mathfrak{F}_M$.[3])

Věta II. Budiž nyní M spočetná nekonečná množina dobře uspořádaná.[4]) Potom existuje posloupnost funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots$ z $\mathfrak{F}_M$ tak, že neexistuje *konečný* počet funkcí z $\mathfrak{F}_M$, jejichž superposicí by se daly vyjádřiti všechny funkce $f_1, f_2, \ldots$

Poznámka: Věta 2 platí i pro některé nespočetné dobře uspořádané množiny (pro které?). Dosud neřešena je otázka, zda tato věta platí pro *každou* nekonečnou dobře uspořádanou množinu M.

V. Jarník a V. Knichal.

---

[1]) Množina = množství. Viz Petr, Počet integrální, 2. vyd., str. 671 a násl. Užíváme obyčejného znaku $<$ místo zakřiveného znaku, užívaného v Petrově knize. Znak $x \in M$ značí: x je prvkem množiny M.

[2]) Definice znaku $\cong$ viz v Petrově knize, str. 673.

[3]) Důkaz lze vésti obdobnou metodou jako důkaz vět 5, 6 v článku V. Jarníka a V. Knichala ve Fundamenta Math. **25** (1935), 190—197. Viz též články W. Sierpińského (Fund. Math. **24** (1935), 209—212) a S. Banacha (Fund. Math. **25** (1935), 5—6). Dalo by se snad myšlenky Banachovy užíti k jednoduššímu důkazu věty I? Jaká věta platí, když místo funkcí *neklesajících* vyšetřujeme funkce *rostoucí*, není známo a otázka zdá se býti svrchovaně obtížná.

[4]) Viz knihu Petrovu, str. 675 a násl.

Řešení úloh.

Dokažte, že rovnice $a_0x^4 \pm a_1x^3 + a_2x^2 \pm a_3x + a_4 = 0$, kde a_i jsou čísla vesměs kladná, nemá žádný kořen reálný, jestliže $F = a_0a_3^2 + a_4a_1^2 - 4a_0a_2a_4 < 0$. (Časopis **60** (1931), str. 128, úloha 1.) *Petr.*

Řešení. (Zaslal p. prof. Dr. A. Hyška, Jaroměř.) Bez újmy obecnosti budiž $a_0 = 1$. Jest

$$a_2a_4 = x_1x_2x_3x_4\,(x_3x_4 + x_2x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) =$$
$$= x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\left(\frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_4} + \frac{1}{x_3x_4}\right)$$

(kdež x_1, x_2, x_3, x_4 jsou kořeny předložené rovnice) a tedy

$$F = x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)^2 + x_1x_2x_3x_4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 -$$
$$- 4x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\left(\frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_4} + \frac{1}{x_3x_4}\right) - 4x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4)$$
$$= x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}\right)^2 + x_1x_2x_3x_4\,(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2.$$

Především je $x_1x_2x_3x_4 = a_4 > 0$. Jsou-li všechny kořeny reálné, jsou výrazy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}, \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \tag{1}$$

reálné a tedy $F \geqq 0$. Jsou-li kořeny x_3, x_4 reálné, kořeny $x_1 = \gamma + \delta i$, $x_2 = \gamma - \delta i$ ($\delta \neq 0$) komplexní sdružené, jsou výrazy (1) opět reálné a tedy opět $F \geqq 0$. Případ $F < 0$ může tedy nastati jen tehdy, není-li žádný kořen reálný.

* * *

Jestliže $\Gamma(x)$ značí gamafunkci, pak je platný vztah (n, p jsou čísla celá, kladná):

$$\frac{\prod\limits_{s=0}^{n-1}\Gamma\left(px + \frac{ps}{n}\right)}{\prod\limits_{r=0}^{p-1}\Gamma\left(nx + \frac{nr}{p}\right)} = \left(\frac{p}{n}\right)^{npx+\frac{1}{2}(np-n-p)} . (2\pi)^{\frac{n-p}{2}} .$$

Ze vztahu toho následuje pro $p = 1$ Gaussova relace pro gamafunkci a bývá tudíž označován jakožto zevšeobecnění Gaussovy relace. Dokažte však, že naopak relace uvedená je jednoduchým důsledkem Gaussovy relace. (Časopis **60** (1931), str. 128, úloha 2.) *Petr.*

Řešení. Zaslali p. prof. Dr. A. Hyška, Jaroměř a p. prof. K. Lerl, Valašské Meziříčí.

Nejprve použijeme Gaussovy relace pro jednotlivé činitele čitatele: $s = 0, 1, \ldots, n - 1$

$$\Gamma\left(px + \frac{ps}{n}\right) = (2\pi)^{-\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot p^{p\left(x+\frac{s}{n}\right)} \cdot \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{s}{n} + \frac{i}{p}\right).$$

Vynásobíme-li tyto rovnice mezi sebou, dostaneme:

$$\prod_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(px + \frac{ps}{n}\right) = (2\pi)^{-n \cdot \frac{p-1}{2}} \cdot p^{-\frac{n}{2}} \cdot p^{pnx+p \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{i}{n} + \frac{j}{p}\right)$$

a zcela obdobně pro jmenovatele (zaměníme n za p a naopak; dále r za s):

$$\prod_{r=0}^{p-1} \Gamma\left(nx + \frac{nr}{p}\right) = (2\pi)^{-p \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot n^{-\frac{p}{2}} \cdot n^{pnx+n\frac{p-1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(x + \frac{i}{n} + \frac{j}{p}\right).$$

Dělíme-li tyto rovnice, pak po krácení a jednoduché úpravě dostaneme uvedenou relaci.