Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O jednoduchém stanovení určitého integrálu omezeného

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 1, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123375

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1910

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

O jednoduchém stanovení určitého integrálu omezeného.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

Integrál

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\ sin\ \varphi}{a - b\ sin^2\ \varphi}\, d\varphi,$$

kterým se zabývali pp. G. Huber (Monatsh. XVI, str. 141) a A. Pleskot (Časop. XXXVIII, str. 427), se velmi jednoduše stanoví, zavede-li se dvojnásobný úhel ve jmenovateli, t. j.

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\ sin\ \varphi}{a - \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\, cos\ 2\varphi}\, d\varphi,$$

a při tom se přiměřeně zobecní.

Vzpomeneme-li známých řad platných při

$$|\, r \,| < 1, \quad |\, \varrho \,| < 1,$$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\ cos\ 2\varphi + r^2} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} r^m\ cos\ 2m\varphi, \tag{1}$$

$$log\,(1 - 2\varrho\ cos\ 2\varphi + \varrho^2) = -\, 2 \sum_1^{\infty} \frac{\varrho^n}{n}\ cos\ 2n\varphi, \tag{2}$$

a okolnosti, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ 2m\varphi\ .\ cos\ 2n\varphi\ d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ při } m \gtrless n, \\ \frac{\pi}{4} \text{ při } m = n, \end{cases}$$

obdržíme, násobivše vzorce (1) a (2) a integrujíce součin vůči φ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - r^2)\, log\,(1 - 2\varrho\ cos\ 2\varphi + \varrho^2)\, d\varphi}{1 - 2r\ cos\ 2\varphi + r^2} = \pi\, log\,(1 - r\varrho), \tag{3}$$

poněvadž v pravo se při našem postupu objeví řada

$$-\pi \sum_1^\infty \frac{r^m \varrho^m}{m} = \pi \log (1 - r\varrho).$$

Mimo to plyne z (1) přímo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos 2\varphi + r^2} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Ve vzorci (3) je možný přechod ke krajnímu případu $\varrho = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - r^2) \log (4 \sin^2 \varphi)}{1 - 2r \cos 2\varphi + r^2} d\varphi = \pi \log (1 - r).$$

Z posledních dvou rovnic plyne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - r^2) \log \sin^2 \varphi \, d\varphi}{1 - 2r \cos 2\varphi + r^2} = \pi \log (1 - r) - \pi \log 2,$$

a píše-li se tu $r = -\frac{n}{m}$, po krátké redukci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{m^2 + n^2 + 2mn \cos 2\varphi} = \frac{\pi}{2(m^2 - n^2)} \log \frac{m+n}{2m}.$$

Položme

$$m^2 + n^2 = a - \frac{b}{2}, \quad 2mn = \frac{b}{2},$$

tedy

$$m + n = \sqrt{a}, \quad m - n = \sqrt{a - b},$$

$$2m = \sqrt{a} + \sqrt{a - b}, \quad m^2 - n^2 = \sqrt{a} \sqrt{a - b},$$

tak že pravá strana bude zníti

$$\frac{\pi}{2a\sqrt{1 - \frac{b}{a}}} \log \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a}}}.$$

Tím vychází hledaný vzorec

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{a - b \sin^2 \varphi} = -\frac{\pi}{2a} \frac{\log \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}}}. \tag{5}$$

Výtka, kterou v úvodě ke svému článku činí p. kol. Pleskot, spočívá dle mého pochopení v nedorozumění; p. Huber chtěl říci pouze tolik, že integrace v zakončené formě elementárné se v tomto případě zdaří jen při zvláštních hodnotách mezí; kdyby na př. hoření mez integrační byla libovolná, vedl by integrál k transcendentám složitějším.

Co se tkne rozeznávání různých případů, doporučuje se nahraditi zastaralý způsob p. Huberův modernější methodou řezů.

Položme

$$\frac{b}{a} = u$$

a nahraďme (5) vzorcem rovnomocným

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{1 - u \sin^2 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi}{2} \frac{\log (1 + \sqrt{1 - u})}{\sqrt{1 - u}}. \quad (5^*)$$

Při našem postupu bylo předpokládáno $a > b$, $a > 0$, tedy zejména $0 < u < 1$. Vložíme-li za u komplexní hodnoty, postrádá integrál významu pouze pro hodnoty u kladné, reálné a větší než 1; vede-li se tedy v rovině (u) řez podél osy reálné od $u = 1$ do $u = +\infty$, bude v rozkrojené tak rovině levá strana (5^*) synektickou funkcí u. Odmocnina

$$\sqrt{1 - u}$$

je podél intervallu $(0 \ldots 1)$ kladnou, a výraz

$$\log (1 + \sqrt{1 - u})$$

rovněž kladný a reálný.

Reálná část odmocniny $\sqrt{1 - u}$ vymizí pouze na řezu a tedy v rozkrojené rovině nemění svého znamení, které je kladné; veličina

$$1 + \sqrt{1 - u}$$

má tedy reálnou část kladnou a její logarithmus znamená hlavní větev funkce logarithmické.

Obě strany rovnice (5^*) jsou synektické v rozkrojené rovině a splývají podél mezery $(0 \ldots 1)$; jsou tedy v celém oboru (u) sobě rovny.

Na konec budiž mi dovoleno reprodukovati přímé odvození, které nacházím mezi svými zápisky z doby, kdy mi p. Huber svoji práci zaslal, kteréžto odvození má jistou podobnost s methodou p. Pleskota a mělo mi sloužiti za thema v mathematickém semináři za mého pobytu ve Fryburku.

Daný integrál píši ve tvaru

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \cos \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sec^2 \varphi}{a - b \cos^2 \varphi} d\varphi,$$

a položím $x = tg\ \varphi$; vyjde

$$-2J = \int_0^{\infty} \frac{\log (1 + x^2)}{a - b + ax^2} dx$$

a předpokládá se $a > b$, $a > 0$. V posledním integrálu kladu $x = z\sqrt{u}$, při čemž

$$u = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a},$$

i bude

$$-2J = \int_0^{\infty} \frac{\log (1 + uz^2)}{a\sqrt{u}(1 + z^2)} dz,$$

tak že součin

$$\Phi(u) = -2a\sqrt{u}\, J = \int_0^{\infty} \frac{\log (1 + uz^2)}{1 + z^2} dz$$

závisí toliko na u. Jeho derivace jest

$$\Phi'(u) = \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(1 + x^2)(1 + ux^2)}$$

a určí se rozkladem v část. zlomky

$$\frac{x^2}{(1 + x^2)(1 + ux^2)} = \frac{1}{1 - u}\left(\frac{1}{1 + ux^2} - \frac{1}{1 + x^2}\right),$$

tedy

$$\Phi'(u) = \frac{1}{1 - u}\left\{\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + ux^2} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{1 - u}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{\pi}{2}\right],$$

t. j. $$\Phi'(u) = \frac{\pi}{2\sqrt{u}\,(1+\sqrt{u})};$$

při tom jest $\Phi(0) = 0$ a tedy po substituci $u = v^2$:

$$\Phi(u) = \pi \int_0 \frac{du}{2\sqrt{u}\,(1+\sqrt{u})} = \pi \int_0 \frac{dv}{1+v}$$
$$= \pi \log(1+v) = \pi \log(1+\sqrt{u}).$$

Vzorec tak získaný

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+ux^2)}{1+x^2}\,dx = \pi \log(1+\sqrt{u}) \tag{6}$$

dává hledaný výsledek

$$J = -\frac{\pi \log(1+\sqrt{u})}{2a\sqrt{u}}, \quad u = 1 - \frac{b}{a}.$$

Rovnice (6) platí pro komplexní u v rovině opatřené řezem podél reálné osy od $u = -\infty$ do $u = 0$.

Položí-li se u do nekonečné blízkosti řezu na $u = -v + \varepsilon i$ (ε kladné a malé), bude od $x = \sqrt{v}$ počínaje

$$\log(1+ux^2) = \log(vx^2 - 1) + \pi i$$

a rovnice (6) poskytne

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-vx^2|}{1+x^2}\,dx + \pi i \int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \pi \log(1+i\sqrt{v}) = \pi\left[\log\sqrt{1+v} + i\, arc\, tg \sqrt{v}\right]$$

a tedy

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-vx^2|}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \log(1+v), \tag{7}$$

kde $v > 0$, a $|1 - vx^2|$ značí prostý obnos veličiny $1 - vx$?

Tu však levá strana nemá tvar funkce analytické a proto píši $\frac{x}{\sqrt{v}}$ za x, i nacházím

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-x^2|}{v+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{\log(1+v)}{\sqrt{v}} \tag{8}$$

čili též

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{v+x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi\frac{\log(1+v)}{\sqrt{v}}. \tag{8*}$$

Vzorec ten je zajímavý vzhledem ke známým výsledkům o rozvinování integrálů tvaru

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-u}$$

v řetězové zlomky, an poskytuje příklad funkce, kterou nelze rozvinouti dle záporných celých mocnin ani ve smyslu asymptotickém.

Vzorec (8*) platí v rovině (v) opatřené řezem podél záporné části osy reálné. Položme $v = ui$, $u > 0$; pak bude

$$\log(1+v) = \log\sqrt{1+u^2} + i\,\mathrm{arc\,tg}\,u,$$

$$\sqrt{v} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{u},$$

$$\frac{\log(1+v)}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{2u}}\,[\log\sqrt{1+u^2} + \mathrm{arc\,tg}\,u$$
$$+ i(\mathrm{arc\,tg}\,u - \log\sqrt{1+u^2})],$$

levá strana (8*) bude zníti

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{u^2+x^2}\sqrt{x}\,dx - iu\int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{u^2+x^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

a porovnáme-li výsledky, máme

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{u^2+x^2}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2u}}(\log\sqrt{1+u^2} + \mathrm{arc\,tg}\,u). \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \frac{\log|1-x|}{u^2+x^2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{2u^3}}(\log\sqrt{1+u^2} - \mathrm{arc\,tg}\,u). \tag{10}$$

Ve vzorci (7) kladme $v = \frac{u^2}{m^2}$, a sečtěme výsledky pro $m = 1, 2, 3, \ldots$; poněvadž

$$\sum_{m=1}^\infty \log\left|1 - \frac{u^2x^2}{m^2}\right| = \log\left|\frac{\sin ux\pi}{ux\pi}\right|,$$

$$\sum_{m=1}^\infty \log\left(1 + \frac{u^2}{m^2}\right) = \log\frac{\mathrm{Sin}\,u\pi}{u\pi}$$

při označení

$$Sin\, u\pi = sin\, hyp\, u\pi,$$

vyjde

$$\int_0^\infty log \left| \frac{sin\, ux\pi}{ux\pi} \right| \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} log \frac{Sin\, u\pi}{u\pi}, \quad u > 0.$$

Avšak

$$\int_0^\infty log\, x \frac{dx}{1+x^2} = 0, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

a tedy máme

$$\int_0^\infty \frac{log \mid sin\, ux\pi \mid}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} log \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \tag{11}$$

kterýžto vzorec možno rozmanitým způsobem přetvořiti.

Příspěvek ku plochám šroubovým.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

Ve článku: „Ein Beitrag zur Schattenlehre“ *) odvodil jsem, že orthogonálný průmět křivky vlastního stínu uzavřené šikmé plochy šroubové při ose kolmé k průmětně a při geometrálném osvětlení lze sestrojiti jakožto průmět průsečnice plochy kuželové s jednoplochým hyperboloidem. Tamtéž zabýval jsem se na základě téhož názoru také sestrojením tečny téže křivky. V tomto článku ukáži, že touž cestou s pomocí zásad geometrie kinematické lze dospěti k jejímu středu křivosti.

Úlohou touto zabýval se již *prof. Dr. Ch. Wiener* **), avšak jenom pro její bod dvojný jednoduchý a dvojný bod dotyčný, nesestrojoval však poloměr křivosti v libovolném bodě této křivky.

1. Za tím účelem dejme známé konstrukci orthogonálného průmětu křivky vlastního stínu uzavřené šikmé plochy šroubové

*) *Hoppe*, Archiv für Mathematik und Physik, 2. díl. 1885. Str. 101.

**) *Dr. Christian Wiener*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. díl, str. 504 a 506.