Příspěvek ku geometrii trojúhelníka.

Podává Ing. **Jos. Langr.**

V následujících řádcích chceme se zabývati touto úlohou: Nad stranami daného trojúhelníka co základnami jest sestrojiti vzájemně podobné trojúhelníky tak, aby jich nově vzniklé vrcholy určovaly trojúhelník o žádaném obsahu.

Buď dán k tomu cíli trojúhelník o obsahu P určený souřadnicemi vrcholů $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ a $C(x_3, y_3)$ v soustavě os pravoúhelných. Nad jeho stranami co základnami jsou sestrojeny na vnější nebo vnitřní stranu původního trojúhelníka vzájemně podobné 3 trojúhelníky. Jich sestrojení následovalo tím způsobem, že se strany daného trojúhelníka rozdělily v témž poměru λ (smysl rotace zachován) a v dělících bodech se vztyčily kolmice ku stranám. Na každou z kolmic pak se nanesla pořadem od dělícího bodu úsečka jsoucí ku dotyčné straně v poměru $\varkappa$. Toto $\varkappa$ je buď positivní nebo negativní, dle toho provedlo-li se sestrojení trojúhelníků na vnější nebo vnitřní stranu daného trojúhelníka. Vzniklé vrcholy A', B', C' stanoví trojúhelník, jehož obsah budiž P'. Souřadnice vrcholů dají se vyjádřiti následovně:

Pro A': $$x'_1 = \frac{x_2\lambda - x_1}{\lambda - 1} + \varkappa(y_2 - y_1)$$

a

$$y'_1 = \frac{y_2\lambda - y_1}{\lambda - 1} - \varkappa(x_2 - x_1).$$

Obdobně i pro druhé vrcholy B' a C'.

Dosadíme-li do známého vzorce pro obsah trojúhelníka

$$2P' = \begin{vmatrix} 1, & x'_1, & y'_1 \\ 1, & x'_2, & y'_2 \\ 1, & x'_3, & y'_3 \end{vmatrix},$$

za souřadnice x', y', jich hodnoty z prve uvedených vzorců a upravíme-li náležitě, přicházíme k rovnici

$$\frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\lambda - 1)^2} - \varkappa \frac{A}{4P} + 3\varkappa^2 = \frac{P'}{P}, \tag{1}$$

kdež A značí součet čtverců stran daného trojúhelníka.

Této rovnici musí vyhovovati λ a $\varkappa$, aby $\triangle\, A'B'C'$ měl žádaný obsah P'. Z toho vychází, že lze sestrojiti nad stranami původního trojúhelníka nekonečné množství vždy 3 si podobných trojúhelníků, jichž vrcholy stanoví trojúhelníky o obsahu P'. Při tom vyplňují ony vrcholy A', B', C' tři geometrická místa, jež lze následovně určiti:

Považujme jednu stranu, třebas $BC = a$ za osu X souřadnicového pravoúhlého systému. Střed strany obsahujž počátek souřadnic. Vrchol A' trojúhelníka BCA' mějž souřadnice x, y. Dle dříve řečeného lze psáti:

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad \text{a} \quad y = -\varkappa a.$$

Z toho vyplývá

$$\lambda = \frac{2x + a}{2x - a} \quad \text{a} \quad \varkappa = -\frac{y}{a}.$$

Dosazením těchto hodnot do (1) dospíváme ku rovnici

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{3} \frac{A}{4P} y = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4P' - P}{3P}, \tag{2}$$

což je rovnice kruhu. Střed jeho S_1 nalézá se na symmetrále strany a ve vzdálenosti

$$d_1 = \frac{a}{6} \cdot \frac{A}{4P}$$

od BC na vnitřní její straně.

Poloměr její jest

$$\varrho_1 = \frac{a}{6} \sqrt{\frac{192P \, . \, P' - 48P^2 + A^2}{16P^2}}.$$

Obdobně dospíváme ke kružnicím berouce v ohled druhé strany CA a AB.

Vrcholy odvozených trojúhelníků $A'B'C'$ o témže plošném obsahu pohybují se tedy po kružnicích. Poloměry těchto kružnic jsou úměrny příslušným stranám původního trojúhelníka.

Pro různá P' vycházejí i různé poloměry. Vzniká tedy nad každou stranou pův. trojúhelníka systém koncentrických kružnic. Střed systému leží na symmetrále strany ve vzdálenosti d prve uvedené.

Pozorujme zvláštní případy:
Je-li $P' = P$, nabývá ϱ_1 tvaru

$$\varrho_1 = \frac{a}{24}\sqrt{\frac{A^2 + 144P^2}{P^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + d_1^2},$$

t. j. kružnice objímají strany $\triangle$ ABC co tětivy.
Je-li

$$P' = \frac{48P^2 - A^2}{192P}, \text{ jest } \varrho_1 = 0,$$

a kružnice smrskují se na své středy.

Zajímavý jest případ, kdy $P' = 0$. Odvozený trojúhelník $A'B'C'$ přechází tu ve přímku, jdoucí těžiskem $\triangle$ ABC.

Důvod, proč ona přímka obsahuje těžiště $\triangle$ ABC, vyplývá z okolnosti, že odvozený $\triangle$ $A'B'C'$ má s původním těžiště společné *) a musí tedy i přímka, v niž trojúhelník přešel, těžiště obsahovati.

Zvláštní tento případ lze pojímati také jako řešení následující úlohy:

Sestrojiti nad stranami trojúhelníka co základnami vzájemně podobné trojúhelníky, jichž vrcholy by ležely na jedné přímce. Řešení, jak vidno, je nekonečné množství. Vrcholy trojúhelníků nad společnou stranou sestrojovaných pohybují se po kružnici. Kružnice takové jsou 3 a označme je K_1, K_2 a K_3. Jich poloměry jsou

$$\varrho_1 \doteq \frac{a}{24}\sqrt{\frac{A^2 - 48P^2}{P^2}}$$

a podobně i ϱ_2 a ϱ_3.

Kružnice K vedou ku mnohým zajímavým vlastnostem, z nichž chceme některé uvésti.

1. Všechny 3 kružnice K procházejí těžištěm $\triangle$ ABC. K důkazu třeba uvážiti následující: Aby ku př. kružnice K_1 procházela těžiskem T, musí býti $S_1T = \varrho_1$.

S_1T lze cosinusovou větou z $\triangle$ S_1A_0T vypočísti. A_0 je střed strany BC. Jestiť

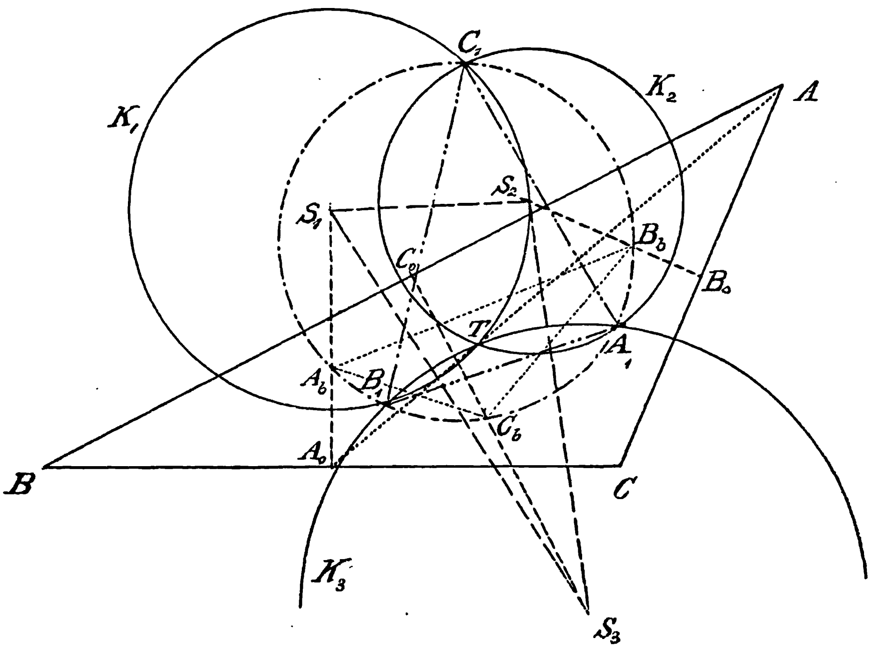
$$\overline{S_1T}^2 = \overline{S_1A_0}^2 + \overline{TA_0}^2 - 2\overline{S_1A_0} \,.\, \overline{TA_0} \,.\, \cos \sphericalangle S_1A_0T.$$

*) Viz Ročník XXIX., strana 214, poznámka**).

Dále jest

$$\overline{S_1A_0} = d_1,\ \overline{TA_0}^2 = \frac{1}{9}\ \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

a
$$\cos \sphericalangle S_1A_0T = \frac{2P}{a\ .\ \overline{A_0A}}.$$



Dosazením a úpravou přesvědčíme se, že $\overline{S_1T} = \varrho_1$, čímž důkaz podán.

2. Strany $\triangle\ S_1S_2S_3$ jsou úměrny tížnicím $\triangle\ ABC$.

Poněvadž $\triangle\ S_1S_2S_3$ má s původním těžiště společné, jsou tedy poloměry ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3 jeho dvoutřetinovými tížnicemi. Lze tedy psáti dle známého vztahu mezi tížnicí a stranami trojúhelníka rovnice

$$9\varrho_1^2 = 2s_2^2 + 2s_3^2 - s_1^2,$$
$$9\varrho_2^2 = 2s_1^2 + 2s_3^2 - s_2^2,$$
$$9\varrho_3^2 = 2s_2^2 + 2s_3^2 - s_3^2,$$

kdež s_1, s_2 a s_3 značí strany $\triangle\ S_1S_2S_3$.

Sečtením všech rovnic vzniká pomocná rovnice

$$6\,(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2) = 2\,(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2).$$

Postupným odečítáním oněch tří rovnic od rovnice pomocné obdržíme

$$s_1^2 = 2\varrho_2^2 + 2\varrho_3^2 - \varrho_1^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)\,.\,\frac{A^2 - 48P^2}{144P^2}.$$

Podobně i pro s_2^2 a s_3^2.

Položíme-li dále $\frac{A}{4P} = \mathfrak{K}$, a zavedeme-li tížnice t_1, t_2 a t_3 původního $\triangle ABC$, vyjde

$$s_1 = \frac{t_1}{3}\sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3}, \quad s_2 = \frac{t_2}{3}\sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3}, \quad s_3 = \frac{t_3}{3}\sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3},$$

z kterýchžto vzorců svrchu uvedená úměrnost vyplývá.

3. Vnitřní úhly $\triangle S_1S_2S_3$ vyhledají se použitím vzorce

$$\sin\alpha_s = \frac{2P_s}{s_2 s_3}.$$

Dle svrchu vytčeného vzorce $P' = \frac{48P^2 - A^2}{192P}$ jest

$$P' = P_s = \frac{\mathfrak{K}^2 - 3}{12}\,.\,P,$$

a tedy dosazením

$$\sin\alpha_s = \frac{3P}{2t_2t_3} = \sin\alpha_t,$$

je-li α_t úhel sevřený tížnicemi t_2 a t_3 v pův. $\triangle ABC$.

Vnitřní úhly $\triangle S_1S_2S_3$ rovnají se souhlasným tížnicovým úhlům trojúhelníka ABC.

Taktéž platí i opačná věta, že tížnicové úhly $\triangle S_1S_2S_3$ rovnají se vnitřním úhlům stran $\triangle ABC$.

4. Druhé průsečíky kružnic K_1, K_2 a K_3 stanoví trojúh. $A_1B_1C_1$. Jeho strany a úhly určíme následujícím způsobem: Spojnice TA_1, TB_1 a TC_1 musí býti kolmy na příslušné strany $\triangle S_1S_2S_3$. Poněvadž pak T jest těžištěm zmíněného trojúhelníka, rovnají se ony spojnice $^2/_3$ výšek v onom trojúhelníku. Jest tedy

$$TA_1 = \frac{4P_s}{3s_1}, \quad TB_1 = \frac{4P_s}{3s_2} \quad \text{a} \quad TC_1 = \frac{4P_s}{3s_3}.$$

Pak jest

$$\overline{A_1B_1^2} = c_1^2 = \overline{A_1T^2} + \overline{B_1T^2} + 2\overline{A_1T} \,.\, \overline{B_1T} \,.\, \cos\gamma_s.$$

Dosazením příslušných hodnot obdržíme

$$c_1 = P \,.\, \frac{c}{2t_1t_2} \,.\, \sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3}.$$

Obdobně i druhé 2 strany

$$a_1 = P \,.\, \frac{a}{2t_2t_3}\sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3}, \quad b_1 = P \,.\, \frac{b}{2t_1t_3}\sqrt{\mathfrak{K}^2 - 3}.$$

Plošný obsah P_1 vypočteme jako součet tří trojúhelníkův:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1C_1T + \triangle A_1B_1T + \triangle B_1C_1T.$$

Jednotlivé trojúhelníky se určí:

Označíme-li $\triangle B_1C_1T = P'_1$, jest

$$P'_1 = \frac{\overline{TC_1} \,.\, \overline{TB_1} \,.\, \overline{B_1C_1}}{4\varrho_1}.$$

Dosazením vyplývá

$$P'_1 = \frac{P^3(\mathfrak{K}^2 - 3)}{12t_2^2t_3^2}.$$

Obdobně

$$P''_1 = \frac{P^3(\mathfrak{K}^2 - 3)}{12t_1^2t_3} \quad \text{a} \quad P'''_1 = \frac{P^3(\mathfrak{K}^2 - 3)}{12t_1^2t_2^2}.$$

Součet pak dává

$$P_1 = P'_1 + P''_1 + P'''_1 = \frac{P^3(\mathfrak{K}^3 - 3)}{12} \,.\, \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{t_1^2t_2^2t_3}$$

$$= \frac{AP(\mathfrak{K}^2 - 3)}{16t_1^2t_2^2t_3^2}.$$

Vnitřní úhly $\triangle A_1B_1C_1$ jsou

$$\sin\alpha_1 = \frac{AP}{2bct_2t_3} = \frac{A}{4t_2t_3} \,.\, \sin\alpha, \text{ atd.}$$

Poloměr r_1 opsané kružnice jest

$$r_1 = \frac{a_1b_1c_1}{4P_1} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{K}^2 - 3}{\mathfrak{K}^2}},$$

je-li r poloměr kružnice opsané původnímu trojúhelníku.

4. Kružnice K opsaná trojúhelníku $A_1B_1C_1$ stotožňuje se s Brocardovou kružnicí původního trojúhelníka.

Ku provedení důkazu pokračujme následovně:

Nechť jest v připojeném obrazci $\triangle A_b B_b C_b$ trojúhelník Brocardův. O něm jest známo, že jest původnímu trojúhelníku podoben, maje s ním těžiště společné*). Vrcholy jeho leží na symmetrálách stran $\triangle ABC$ ve vzdálenostech

$$\overline{A_b A_0} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{K}}, \quad \overline{B_b B_0} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{K}} \quad \text{a} \quad \overline{C_b C_0} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{K}}.$$

Dále jest

$$\frac{\overline{A_b B_b}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_b C_b}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_b A_b}}{\overline{CA}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{K}^2 - 3}{4\mathfrak{K}^2}}.$$

Určeme mocnosti vrcholu ku př. (A_b) vzhledem ke kružnicím K_2 a K_3.

Vzhledem ke kružnici K_2 obnáší ona mocnost

$$M_2^a = (\overline{A_b S_2} + \varrho_2)(\overline{A_b S_2} - \varrho_2) = \overline{A_b S_2^2} - \varrho_2^2.$$

Spojnice $\overline{A_b S_2}$ vyhledá se užitím cosinusové věty z $\triangle A_b S_2 C$. Jestiť

$$\overline{A_b C^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{\mathfrak{K}^2},$$

$$\overline{S_2 C^2} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} \mathfrak{K}^2$$

a

$$\sphericalangle S_2 C A_b = \gamma - \sphericalangle S_2 C B_0 - \sphericalangle A_b C A_0.$$

Dosazením a příslušnou úpravou dospějeme k výsledku

$$M_2^a = \frac{b^2 + c^2}{12} \cdot \frac{\mathfrak{K}^2 - 3}{\mathfrak{K}^2}.$$

Vzhledem ke kružnici K_3 podobně počítaná mocnost M_3^a bodu A_b podává, že

$$M_2^a = M_3^a,$$

z čehož vyplývá, že bod A_b leží na chordále kružnic K_2 a K_3.

Na základě toho dá se vysloviti věta: Spojnice vrcholů Brocardova trojúhelníka s protilehlými vrcholy $\triangle A_1 B_1 C_1$ procházejí těžištěm původního trojúhelníka.

---

*) Viz ročník XXIX, str. 210: Brocardova kružnice trojúhelníka jako místo geometrické.

Mysleme si nyní, že spojnice $A_b T$ protíná Brocardovu kružnici v bodě A'. Mocnost těžiště T vzhledem k Brocardově kružnici jest známa a obnáší

$$\overline{TA_b}\,.\,\overline{TA'} = \frac{A}{36}\,.\,\frac{\mathfrak{R}^2-3}{\mathfrak{R}^2}.$$

Poněvadž

$$\overline{TA_b} = \frac{2}{3}\,t_1\,.\,\frac{\sqrt{\mathfrak{R}^2-3}}{2\mathfrak{R}},$$

jest

$$\overline{TA'} = \frac{A}{12t_1}\,.\,\frac{\sqrt{\mathfrak{R}^2-3}}{\mathfrak{R}}.$$

Srovnáním s předešlými výsledky shledáváme, že

$$TA' = TA_1,$$

t. j. bod A' se stotožňuje s bodem A_1, čili společný průsečík kružnic K_2 a K_3, t. j. bod A_1 leží na Brocardově kružnici. Totéž platí obdobně i pro vrcholy B_1 a C_1. Leží tedy vrcholy $\triangle A_1 B_1 C_1$ na Brocardově kružnici, což bylo dokázati.

Řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ celými čísly.

Napsal **Josef Jandásek**, technik.

Pokusme se vyhověti rovnici $x^3 + y^3 + z^3 = u^2$ tvarem

$$(kx^3 + lx^2 + mx + n)^3 = (ax^2 + bx + c)^3 + (fx)^3 + (gx^3 + hx^2 + jx)^3,$$

kde $k, l, \ldots j$ jsou pevná celá čísla, x proměnné číslo.

Má-li rovnice platiti pro každé x, tu musí platit soustava:

$$\begin{aligned}
k^3 &= g^3\\
3k^2l &= 3g^2h\\
3k^2m + 3kl^2 &= 3g^2j + 3gh^2\\
3k^2n + 6klm + l^3 &= 6ghj + h^3 + a^3\\
3km^2 + 6kln + 3l^2m &= 3gj^2 + 3h^2j + 3a^2b\\
6kmn + 3l^2n + 3lm^2 &= 3a^2c + 3hj^2 + 3ab^2\\
3kn^2 + 6lmn + m^3 &= 6abc + j^3 + f^3 + b^3\\
3ln^2 + 3mn^2 &= 3ac^2 + 3b^2c\\
3mn^2 &= 3bc^2\\
n^3 &= c^3.
\end{aligned}$$