Vilém Jung

O ploše tečen, stanovených ke křivkám intensitním v bodech určité křivky kruhové na libovolné ploše točné

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 240--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123353`

O ploše tečen, stanovených ke křivkám intensitním v bodech určité křivky kruhové na libovolné ploše točné.

Sepsal

Vilém Jung,

professor státní průmyslové školy v Praze.

§ 1.

Především buďtež uvedeny některé věty, jichž v pojednání užito bylo.

1. Řez plochy s rovinou, procházející normalou v určitém bodě této plochy, nazývá se *normalným řezem* plochy ve zmíněném bodě; budiž ϱ poloměrem křivosti tohoto normálného řezu.

Naneseme-li na tečny všech řezů normalných v určitém bodě plochy od tohoto pokaždé průvodič δ, tak aby $\delta^2 = k\varrho$, tvoří koncové body v tečné rovině křivku, jež vyznačuje křivost plochy v tomto bodě.

Tato křivka jest podobná a podobně položená (homothetická) s indicatricí*) v příslušném bodě plochy a jest křivkou 2. stupně.

Její osy nalezají se v rovinách hlavních řezů normalných, jichž poloměry křivosti mají maximalní a minimalní hodnotu; ony se zároveň dotýkají křivoznačných křivek plochy. Inflekční tečny plochy tvoří asymptoty indicatrice.

V elliptickém (hyperbolickém) bodě plochy jest indicatrix ellipsa (hyperbola); v parabolickém bodě plochy rozpadá se na dvě rovnoběžné přímky.**)

---

*) Rovinný řez, vedený nekonečně blízko a rovnoběžně s rovinou tečnou v určitém bodě plochy, jest nekonečně malá kuželosečka a nazývá se indicatrix plochy v tomto bodě.

**) Znači-li ϱ_1, ϱ_2 hodnoty hlavních poloměrů křivosti, a jsou-li R_1, R_2 roviny hlavních řezů normalných, R rovina libovolného řezu normalního v určitém bodě plochy, $\sphericalangle(R_1, R) = \varphi$, platí dle Eulerovy poučky

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2},$$

2. Stanovíme-li ku ploše A dle křivky C dotyčnou plochu rozvinutelnou B, jsou v určitém bodě c křivky C tečna T této křivky a povrchová přímka P rozvinutelné plochy B inflekčními tečnami plochy A v bodě c harmonicky rozděleny. Tečna T křivky C a povrchová přímka P plochy B tvoří směry združených průměrů indicatrice plochy A v bodě c.

3. Křivoznačnými křivkami točné plochy jsou její povrchové kružnice a meridianové křivky. Jedna z os indicatrice v určitém bodě točné plochy dotýká se příslušné křivky kruhové a druhá křivky meridianové. Pro veškeré body téže povrchové kružnice se poměr os indicatrice jakož i poloha jejich k ose točné nemění.

Jeden z hlavních řezů normalných nalezá se v rovině, položené tečnou k povrchové kružnici a normalou točné plochy, druhým jest křivka meridianová sama.

Jedním z hlavních poloměrů křivosti jest část normaly mezi bodem plochy a točnou osou, druhým jest poloměr křivosti křivky meridianové v tomto bodě.

Znamená-li $x = f(z)$ rovnici merid. křivky ohledně osy Z, jakožto osy úseček, jest onen (tento) poloměr křivosti vyjádřen formulí

$$\varrho_1 = f \cdot u \qquad \left(\varrho_2 = -\frac{u^3}{f''}\right),$$

píšeme-li krátce f místo $f(z)$ a znamená-li u kladnou hodnotu výrazu $\sqrt{1+f'^2}$, při čemž f bereme kladně.

Směr poloměru křivosti jde od bodu plochy ke středu křivosti, směr poloměru křivosti ϱ_1 považujeme za kladný.

---

z čehož obdržíme

$$\frac{k}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right) \quad \text{čili} \quad \frac{x^2}{k\varrho_1} + \frac{y^2}{k\varrho_2} = 1,$$

jakožto rovnici křivky, podobné a podobně položené s indicatricí, t. j. osovou rovnici křivky 2. stupně; při tom značí k libovolnou konstantu, nejpohodlněji $k = 1$.

V parabolickém bodě plochy jest jeden hlavní poloměr křivosti na př. $\varrho_2 = \infty$; rovnice pak má tvar $x^2 = k\varrho_1$ a vyjadřuje dvě rovnoběžné přímky.

Točná plocha jest ve všech bodech určité křivky kruhové syn- (anti-)klastickou, obrací-li merid. křivka v příslušném bodě k ose točné svou stranu vydutou (vypuklou), což nastane, jest-li pro zmíněné body $f'' < o$, ($f'' > o$).

Uvedené formule pro poloměry křivosti podávají také pro $f'' < o$, ($f'' > o$) souhlasně, (opačně) označené hodnoty pro ϱ_1 a ϱ_2, jak toho forma plochy vyžaduje.

Indicatrix pro veškeré body určité povrchové kružnice točné plochy jest ellipsa (hyperbola), když $f'' < o$, ($f'' > o$). Jest-li $f'' = o$ jsou veškeré body příslušné povrchové kružnice parabolickými body plochy, pro všechny platí $\varrho_2 = \infty$; v těchto bodech točné plochy se obě inflekční tečny ztotožňují.

4. Tečné roviny, stanovené v bodech intensitní křivky J na ploše A, svírají s daným směrem S konstantní úhel. Z té příčiny jest řídící plochou kuželovou rozvinutelné plochy B, opsané dle křivky intensitní J ploše A, točná plocha kuželová, jejíž osou jest přímka směru S.

V určitém bodě i intensitní křivky J obdržíme příslušnou povrch. přímku P rozv. plochy B, vedeme-li tímto bodem přímku směru S a promítneme-li tuto orthogonalně do tečné roviny T, stanovené v bodě i ku ploše A*).

§ 2.

1. Budiž K povrchovou kružnicí točné plochy A a S směr, k němuž se intensitní křivky vztahují.

Vyšetřeme pomocí pravoúhlých souřadnic, jakou plochu tvoří tečné přímky, stanovené v bodech kružnice K k intensitním křivkám plochy A.

Střed kružnice K budiž počátkem souřadnic, točná osa plochy A osou Z, rovina kružnice K souřadnou rovinou (XY).

---

*) Dle obou vět:

a) Každé povrchové přímce (tečné rovině) rozvinutelné plochy přísluší rovnoběžná povrchová přímka (tečná rovina) její řídící plochy kuželové.

b) Každá rovina, procházející osou tečné plochy kuželové a některou povrchovou přímkou, stojí kolmo na příslušné rovině tečné.

Rovinu, procházející osou Z rovnoběžně se směrem S, považujme za rovinu (ZX). Jest-li

$$x = f(z) \tag{1}$$

rovnicí merid. křivky v soustavě (ZX), má točná plocha rovnici

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2. \tag{2}$$

Označíme-li $\sphericalangle (S, Z) = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = a$, má paprsek S, procházející počátkem, rovnice

$$\begin{aligned} x &= az, \\ y &= o. \end{aligned} \tag{3}$$

Bod m kružnice K, jenž se nalézá v merid. rovině, nakloněné v úhlu φ k hlavnímu meridianu (ZX), má souřadnice

$$x = f \,.\, \cos \varphi, \quad y = f \,.\, \sin \varphi, \quad z = o,$$

píšeme-li f místo $f(z)$.

V bodě m protíná křivku K určitá intens. křivka J.

V rovině tečné T, v bodě m ku ploše A stanovené, nalézá se povrchová přímka P rozvinutelné plochy, opsané dle intens. křivky J ku ploše A, jakož i tečná přímka F ku křivce J.

Buďtež μ, ν poměrné délky poloos indicatrice točné plochy v bodě m, a nechť dotýká se poloosa μ, (ν) povrchové kružnice, (merid. křivky).

Dle předeslaného pak platí:

$$\mu^2 = k\varrho_1, \quad \nu^2 = k\varrho_2.$$

Protíná-li přímka P, (F) poloosu μ, jež se nalézá v přímce V, dotýkající se kružnice K v bodě m, v úhlu $\Theta_1 (\Theta_2)$, platí, poněvadž jsou P, F dva združené průměry indicatrice, dle známé zásady následující rovnice:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 \,.\, \operatorname{tg} \Theta_2 = -\frac{\nu^2}{\mu^2} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Promítněme indicatrici i s přímkami P, F orthogonalně do roviny (XY).

Průměty P_1, F_1 jsou opět združenými průměry orthog. průmětu indicatrice. Ježto poloosa μ nalézá se v průmětně (XY), jsou průměty μ_1, ν_1 poloosami průmětu indicatrice.

(Dokončení.)