Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

Casus irreducibilis

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 257--259

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123349

Casus irreducibilis.

Studujícím napsal **Eduard Weyr.**

Obecnou kubickou rovnici lze, jakož známo, snadno převésti na rovnici

$$x^3 + px + q = 0; \tag{1}$$

hoví-li realná čísla p, q nerovnosti $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, má rovnice tato tři realné kořeny, ač formule Cardanova

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

je podává všecky ve tvaru imaginarném. Jest tu dojista otázka, kterak v tomto případě, *casus irreducibilis* zvaném, by bylo lze řešiti rovnici (1) bez použití theorie imaginarných veličin, zcela oprávněna, anyť i rovnice (1) i všecky její kořeny jsou realné hodnoty. K této otázce lze snadno odpověděti takto:

Budiž a libovolná kladná neb záporná veličina, však číselně menší než 1. Pak lze a pokládati za cosinus nějakého úhlu obsaženého třeba v prvním neb druhém kvadrantu; označíme-li třetí díl tohoto úhlu literou α_0, máme tedy

$$a = \cos 3\alpha_0, \quad 0 < 3\alpha_0 < \pi.$$

Všecky úhly, jichž cosinus jest táž hodnota a, jsou patrně dány výrazy

$$3\alpha_0 + 2k\pi, \quad -3\alpha_0 + 2k\pi,$$

v nichž k nabývá všech celistvých hodnot, tedy

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

Označíme-li kterýkoli z těchto úhlů 3α, platí tedy

$$\cos 3\alpha = a;$$

a poněvadž, jakož známo,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha,$$

máme pro hodnotu $u = \cos \alpha$ rovnici třetího stupně

$$a = 4u^3 - 3u$$

čili

$$u^3 - \frac{3}{4} u - \frac{a}{4} = 0. \tag{2}$$

Kořeny této rovnice jsou

$$u = \cos \frac{\pm 3\alpha_0 + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Poněvadž dva úhly, jichž součet neb rozdíl jest celistvým násobkem 2π, mají týž cosinus, tedy snadno shledáme, že obdržíme jen tři různé hodnoty u, totiž

$$u_1 = \cos \alpha_0, \quad u_2 = \cos\left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\right), \quad u_3 = \cos\left(\alpha_0 + \frac{4\pi}{3}\right). \tag{3}$$

Tím řešena kubická rovnice (2), v níž číselný obnos hodnoty a jest menší než 1; stačí totiž stanoviti pomocí logarithmických tabulek úhel $3\alpha_0$ dle podmínky $\cos 3\alpha_0 = a$, a pak podávají formule (3) kořeny rovnice (2).

Rovnici (1) původně danou hleďme nyní převésti na rovnici (2), kladouce v (1)

$$x = cu;$$

tím obdržíme pro u rovnici

$$u^3 + \frac{p}{c^2} u + \frac{q}{c^3} = 0,$$

a ta se ztotožní s rovnicí (2), lze-li položiti

$$\frac{p}{c^2} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{q}{c^3} = -\frac{a}{4}, \text{ při } |a| < 1. \tag{4}$$

První rovnici vyhovuje hodnota

$$c = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

patrně realná, jelikož vzhledem k nerovnosti

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

hodnota p jest nutně záporná; a druhá rovnice (4) pak podává

$$a = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

což jest hodnota číselně skutečně menší než 1, jelikož vzhledem k oné nerovnosti $\frac{q^2}{4}$ jest menší než číselná hodnota podílu $\frac{p^3}{27}$.

Položivše tedy

$$a = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

stanovme úhel $3\alpha_0$, jehož cosinus se rovná a, a budou pak

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha_0,$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_0 + \frac{4\pi}{3}\right)$$

kořeny rovnice (1).