Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Graf

O vlastnostech Newtonova a logarithmického potenciálu i jeho prvních derivací v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 1, 5--19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123345`

Poněvadž E půlí vzdálenosť mezi y a v, proto, pohybuje-li se K na y, pohybuje se N na v, takže t obaluje parabolu k mající E za ohnisko, v za tečnu vrcholovou. Značíme-li I bod $t \,.\, x$ jest $NH = IN$ a tedy jest H bod dotyku přímky t s parabolou k, pročež přímka n jest normalou paraboly k v bodě H.

(Dokončení.)

O vlastnostech Newtonova a logarithmického potenciálu i jeho prvních derivací v některých jednoduchých singularitách hmotných ploch a křivek.

Napsal

Dr. **František Graf** v Praze.

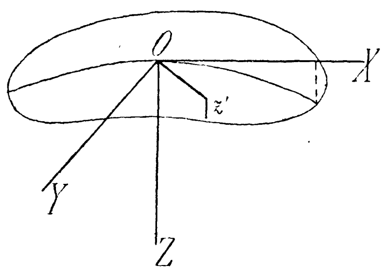
V elementární theorii potenciálu předpokládá se, že hutnosť fluida jest spojitou funkcí místa na ploše resp. křivce; přestává-li tato funkce být spojitou, je třeba dle její povahy specielní analyse o vlastnostech potenciálu. Chci se na tomto místě nejprve zabývati případem, že sice hutnosť fluida není nikde nekonečnou, ale jest nespojitou. U ploch budiž μ vyjádřeno funkcí, která není spojitou, překročíme-li dané křivky na ploše; u hmotných křivek pak mysleme si hutnosť jako funkci, která jen v diskretních bodech má po obou stranách rozdílné hodnoty. Jelikož zde jednám o analyticky definovaných plochách resp. křivkách, chci z nekonečné rozmanitosti útvarů těchto vzíti v úvahu nejdůležitější druh: plochy, mající v každém bodě jen omezený počet rovin tečných, obdobně pak u křivek rovinných. Dále předpokládám, že v okolí každého bodu plochy rovnice její dá se vyvinouti následovně:

$$z' = ax'^2 + 2bx'y' + cz'^2 + \cdots$$

je-li XY rovina tečná. (Obr. 1.) Podobně ovšem co se týče čar v rovině. Je-li fluidum na takto vytčených plochách resp. křivkách uvedeným způsobem dislokováno, poučí nás, jak později uvidíme, studium jeho potenciálu o vlastnostech této funkce odpovídající plochám s hranami a kraji, resp. křivkám neuzavřeným.

Náš problem dá se tedy formulovati následovně: Budiž dána plocha uvedeného druhu, na které hutnosť μ jest všude konečná, však nespojitá podél jisté křivky S a sice tak, že na jedné její straně $\lim \mu_1 = f_1(s)$, na druhé pak $\lim \mu_2 = f_2(s)$, při čemž s značí délku oblouku. Hodnoty f_1 a f_2 buďtež nezávislými od způsobu, jakým se přibližujeme na ploše k jistému bodu křivky S. Jaké vlastnosti vykazuje potenciál V v okolí bodu křivky S? Jak známo, rozumíme integrálem funkce, která v bodě c integračního intervallu $b - a$ se stává nespojitou, limitu:

$$\lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx \quad \text{pro } \lim \varepsilon,\ \varepsilon' = 0.$$



Obr. 1.

Mysleme si nyní část plochy, ohraničenou křivkou, určenou průmětem kruhu malého poloměru ϱ, který sestrojíme v tečné rovině určitého bodu plochy M. Tento bod budiž zároveň středem. Je-li osa X tečnou křivky S, označíme číslicemi 1 a 2 oba díly plochy, odpovídající polokruhům, které povstanou průsekem osy X a kruhu ϱ. Máme tudíž:

$$V = \int_o \frac{\mu d\omega}{r},$$

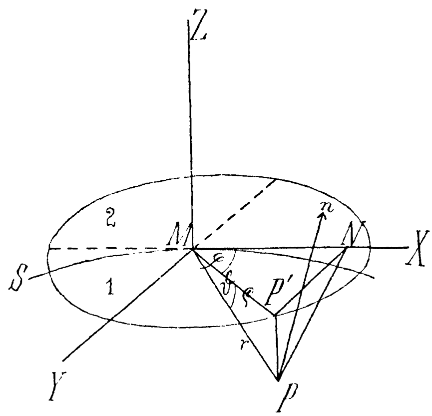
kde o je část plochy nad plochou kruhu,

$$d\omega = \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\cos(n, Z)}, \qquad r = \frac{\varrho}{\cos \vartheta}.$$

Nazveme-li dále úhel mezi normálou plochy n a osou Z η, jest

$$\cos\eta = \frac{1}{\sqrt{1+4(ax'+by')^2+4(bx'+cy')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+S\varrho^2}},$$

při čemž S značí homogenní funkci druhého řádu s argumenty $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$.



Obr. 2.

Vyvinujeme-li cosinusy úhlů η a ϑ i jich reciproké hodnoty, následuje:

$$\cos\eta = 1 - \frac{1}{2} S\varrho^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} S^2\varrho^4 - \cdot\cdot$$

$$\cos^{-1}\eta = 1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 - \frac{1}{2\,.\,4} S^2\varrho^4 + \cdot\cdot$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2} R^2\varrho^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} R^4\varrho^4 - \cdot\cdot$$

$$\cos^{-1}\vartheta = 1 + \frac{1}{2} R^2\varrho^2 - \frac{1}{2\,.\,4} R^4\varrho^4 + \cdot\cdot$$

$$R = a\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi.$$

Potenciál V rozpadá se ve dva díly, jež vztahují se na části plochy 1 a 2:

$$V_0 = \int_1 \mu_1 \frac{d\omega}{r} + \int_2 \mu_2 \frac{d\omega}{r},$$

při čemž označení limit vynecháme, ježto index hutnosti μ již udává dotyčnou část plochy hmotné. Z toho vyplývá:

$$|V_0| < |\mu_1| \int_1 \frac{d\omega}{r} + |\mu_2| \int_2 \frac{d\omega}{r},$$

kde $|\mu_1|$ a $|\mu_2|$ značí absolutně největší hodnoty hutnosti v dotyčné části.

Poněvadž jest dále $\varrho < r$, platí

$$|V_0| < |\mu_1| \int_1 \frac{d\omega}{\varrho} + |\mu_2| \int_2 \frac{d\omega}{\varrho}$$

a po dosazení hodnot:

$$|V_0| < |\mu_1| \int_0^\pi \int_0^\varrho d\varphi \, d\varrho \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 - \cdots\right]$$

$$+ |\mu_2| \int_0^\pi \int_0^\varrho d\varphi \, d\varrho \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 - \cdots\right].$$

Oba integrály jsou, jak zřejmo, téhož řádu jako veličina ϱ, a funkce V má v bodu M křivky S konečnou a určitou hodnotu.

Jest V spojitou funkcí ve směru tečny ku křivce S? Tážeme se tedy, k jaké limitě blíží se $[V_M - V_N]$ (N značí bodu M blízký bod osy X), konverguje-li x, abscissa bodu N k nulle?

$$V_M = \int_1 \mu_1 \frac{d\omega}{r} + \int_2 \mu_2 \frac{d\omega}{r}, \qquad V_N = \int_1 \mu_1 \frac{d\omega}{r'} + \int_2 \mu_2 \frac{d\omega}{r'},$$

$$V_M - V_N = \int_1 \mu_1 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right] d\omega + \int_2 \mu_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right] d\omega.$$

Uvážíme-li, že

$$|r - r'| < x$$

$$rr' > \varrho\varrho' > \varrho(\varrho - x)$$

obdržíme:

$$|V_M - V_N| < |\mu_1| \int_1 x \frac{d\varphi \, d\varrho}{|\varrho - x|} \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 - \cdots\right]$$

$$+ |\mu_2| \int_2 x \frac{d\varphi \, d\varrho}{|\varrho - x|} \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 - \cdots\right].$$

Hlavní hodnoty integrálů jsou:

$$|\mu_1|\,\pi x lg\left(1-\frac{\varrho}{x}\right), \qquad |\mu_2|\,\pi x lg\left(1-\frac{\varrho}{x}\right).$$

Dlužno nyní vyšetřiti, jaké jsou limity těchto výrazů, annuluje-li se ϱ i x a nejsou-li snad závislými od pořadu, v jakém se tyto dvě veličiny stávají nekonečně malými.

Zlomek $\frac{\varrho}{x}$ stane se rovným nulle, konverguje-li dříve ϱ a pak x k této hodnotě, vzrůstá však do nekonečna, obrátíme-li tento pořad. Výslovně zde podotýkám, že obě tyto proměnné representují konečné inkrementy neodvisle proměnné, tedy veličiny řádu prvého. Annuluje-li se nejprve ϱ, přejde dotyčný výraz v nullu, i když x neklesne pod konečnou hodnotu. To znamená, že náš výraz možno učiniti nekonečně malým, zvolíme-li jen velikost hmotné plochy dostatečně nepatrnou, při čemž bod N se nalézá od bodu M v konečné vzdálenosti. Klesá-li však dříve x pod každou konečnou hodnotu, bude

$$x lg\varrho - x lg x$$

veličinou nekonečně malou, i když ϱ konečně se annuluje. Naše funkce tedy v obou případech se blíží nulle. Správný pořad je ovšem ten, že dříve x klesne pod každou konečnou hodnotu. Neboť ϱ jen proto volíme malým, bychom svůj počet zjednodušili, jak tomu též jest na př. v theorii funkcí komplexní proměnné při vyčíslení modulu periodicity.

První integrály našich řad tedy zmizí, blíží-li se bod N k bodu M; ostatní členy řady jsou však vyššího řádu, a z toho vyplývá spojitosť potenciálu ve směru tečny ku křivce S.

Pozorujme nyní kontinuitu ve směru osy Y, tedy kolmo ku křivce S v rovině tečné. Máme jako dříve:

$$V_M - V_N = \int_1 \mu_1\, d\omega\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) + \int_2 \mu_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) d\omega,$$

při čemž N leží nyní na ose Y. Podobně jest:

$$\frac{|r-r'|}{rr'} < \frac{y}{\varrho(\varrho-y)}$$

a obdržíme dřívější výraz, ve kterém však místo x jeví se y. Tedy i v tomto směru zůstává funkce naše spojitou.

Zbývá ještě směr normály. Bod N, položený na normále bodu M, mějž koordinatu z, úsečky PN resp. $P'N$ buďtež opět r' a ϱ'; pak obdržíme:

$$V_M = \int_1 \mu_1 \frac{d\omega}{r} + \int_2 \mu_2 \frac{d\omega}{r}, \qquad V_N = \int_1 \mu_1 \frac{d\omega}{r'} + \int_2 \mu_2 \frac{d\omega}{r'}.$$

Sledujeme-li differenci $\frac{|r - r'|}{rr'}$, lze nahraditi $|r - r'|$ opět větší stranou z, r pak větší úsečkou ϱ. Však r' nemožno více nahraditi vzdáleností ϱ', ježto z' mění své znaménko uvnitř kruhu ϱ. Avšak $\lim\limits_{\varrho = 0} \frac{\overline{PP'}}{\varrho} = 0$, a je-li část plochy velmi malá, stává se z' nejméně veličinou řádu druhého. Ježto dále ϱ' a r' mají se k sobě jako sinusy protilehlých úhlů, zůstává poměr tento jistě konečným a blíží se pro $\lim \varrho = 0$ jedné. Můžeme tudíž položiti $r' = q\varrho'$, kde q oscilluje mezi $1 \pm \varepsilon$, při čemž ε rychleji blíží se nulle než ϱ. Budiž q nejmenší hodnota tohoto poměru na ploše. Z toho plyne:

$$\frac{|r - r'|}{rr'} < \frac{z}{q\varrho\varrho'}$$

$$|V_M - V_N| < \frac{|\mu_1|}{q} \int_1 \frac{z d\omega}{\varrho\varrho'} + \frac{|\mu_2|}{q} \int_2 \frac{z d\omega}{\varrho\varrho'}$$

aneb:

$$|V_M - V_N| < \frac{|\mu_1|}{q} z \int_0^\pi \int_0^\varrho \frac{d\varphi\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 + \cdot\cdot\right]$$

$$+ \frac{|\mu_2|}{q} z \int_\pi^{2\pi} \int_0^\varrho \frac{d\varphi\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} \left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 + \cdot\cdot\right].$$

Integrací prvních členů obdržíme:

$$\frac{\pi|\mu_1|}{q} z \lg \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 + z^2}}{z}, \qquad \frac{\pi|\mu_2|}{q} z \lg \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 + z^2}}{z}.$$

Výrazy tyto annulují se pro lim $z=0$. Jelikož

$$\cos^{-1}\eta = \sqrt{1+S\varrho^2} < 1 + \frac{1}{2} S\varrho^2$$

dlužno jen druhé členy ještě vyšetřiti. Vyčíslením integrálu povstane:

$$\frac{1}{2}\left[\varrho\sqrt{\varrho^2+z^2} - z^2 lg\left(\varrho+\sqrt{\varrho^2+z^2}\right)\right]$$

a poněvadž integrací dle φ povstanou jen konečné hodnoty, konvergují též druhé členy k nulle, V jest spojitým i ve směru normály; je-li z negativní, změní se jen znaménko integrálu, ježto tato souřadnice přichází jen před integrálem v prvé mocnině. Potenciál V je tudíž ve všech směrech okolí bodu M funkcí spojitou.

Zajímavější vlastnosti skytá prvý differenciálný quotient funkce V v okolí bodu křivky S. Sledujme nejprve směr tečny:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \mu d\omega \frac{x-x'}{r'^3}$$

a pro $x=0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu d\omega \frac{x'}{r'^3}$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\varrho \mu_1 d\omega \frac{x'}{r^3} + \int_\pi^{2\pi} \int_0^\varrho \mu_2 d\omega \frac{x'}{r^3}.$$

Ježto pak:

$$\frac{\cos^3\vartheta}{\cos\eta} = 1 + G_2(S, R^2)\varrho^2 + G_4(S, R^2)\varrho^4 + \cdots$$

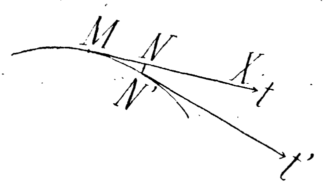
kde G značí celistvé rationální funkce forem S a R, obdržíme

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^\pi \int_0^\varrho \frac{d\varphi d\varrho}{\varrho} \cos\varphi\, [\mu_{10} + \mu_{11}\varrho + \ldots][1 + G_2\varrho^2 + \ldots]$$

$$+ \int_\pi^{2\pi} \int_0^\varrho \frac{d\varphi d\varrho}{\varrho} \cos\varphi\, [\mu_{20} + \mu_{21}\varrho + \ldots][1 + G_2\varrho^2 + \ldots].$$

První členy těchto dvojitých integrálů zmizí jednotlivě, ač $\frac{1}{\varrho}$ stává se nekonečným pro lim $\varrho = 0$, jak ihned vyplývá z vlastnosti funkce cos; ostatní členy jsou jen positivní potence radia ϱ, násobené celistvými, rationálními funkcemi $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$, derivace naše zůstane tudíž konečnou.

Jedná se nyní o její kontinuitu. Poněvadž lze pro bod M element osy X nahraditi až na veličiny vyššího řádu differenciálem oblouku ds, jest derivace funkce V dle oblouku s v každém jejím bodu konečná a příspěvek okolí každého bodu křivky S k hodnotě této derivace stává se zároveň s tímto nekonečně malým. Ježto však V jest spojitým ve směru tangenty t, mohou se hodnoty



Obr. 3.

V_N a $V_{N'}$ jen o veličiny nejméně druhého řádu od sebe lišiti. Následkem spojitosti zakřivení nemohou tedy hodnoty $\frac{\partial V_N}{dt}$ a $\frac{\partial V_{N'}}{\partial t'}$ dáti konečný rozdíl; jsou-li body M a N' dostatečně blízko sebe položeny, lze kolem nich omeziti část plochy tak, že

$$\left|\frac{\partial V_N}{\partial t} - \frac{\partial V_M}{\partial t}\right|$$

se stane libovolně malým. Jest tedy spojitosť této derivace dle směru tečny dokázána. Přesnější důkaz toho dal by se provésti tak, že bychom porovnali potenciál vytčené části plochy s potenciálem kruhového výseku roviny tečné, na které fluidum mělo by hutnosť $\frac{\mu}{\cos\eta}$, jelikož jeho potenciál lze lehce vyčísliti; zde však omezuji se na úvahu předešlou.

Jiné vlastnosti vykazuje však derivace dle směru na křivku S kolmého.

Jest totiž:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int \mu d\omega \frac{y' - y}{r'^3}$$

a pro $y = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_0^{\pi}\int_0^{\varrho} \mu_1 d\omega \frac{y'}{r^3} + \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\varrho} \mu_2 d\omega \frac{y'}{r^3}$$

a dosadíme-li příslušné hodnoty:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_0^{\pi}\int_0^{\varrho} \mu_1 \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\varrho}{\varrho} \frac{\cos^3\vartheta}{\cos\eta} + \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\varrho} \mu_2 \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\varrho}{\varrho} \frac{\cos^3\vartheta}{\cos\eta}$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\varrho} [\mu_{10} + \mu_{11}\varrho + ..] \frac{\sin\varphi d\varphi d\varrho}{\varrho} [1 + G_2\varrho^2 + ..]$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\varrho} [\mu_{20} + \mu_{21}\varrho + ..] \frac{\sin\varphi d\varphi d\varrho}{\varrho} [1 + G_2\varrho^2 + ..];$$

integrováním prvních členů obdržíme:

$$\mu_{10} \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = 2\mu_{10}\, [lg\varrho]_0^{\varrho},$$

$$\mu_{20} \int_{\pi}^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = -\,2\mu_{20}\, [lg\varrho]_0^{\varrho}$$

a členy ostatní obsahují jen kladné mocniny ϱ. Tudíž přispívá okolí bodu M k derivaci hodnotou:

$$2\,[\mu_{10} - \mu_{20}]\, [lg\varrho]_0^{\varrho},$$

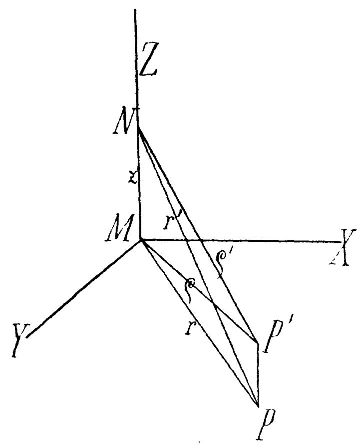
která jest tedy logarithmicky nekonečnou. Jen v případě, že hutnosť zůstane spojitou, lze μ vyvinovati dle mocnin ϱ; součin inkrementu této veličiny a jeho logarithmu dá pak ovšem za výsledek nullu.

Konečně přichází na řadu směr normály N. Máme pak:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\int \mu d\omega \frac{z - z'}{r'^3}, \qquad r' = \sqrt{(z - z')^2 + \varrho^2}.$$

K jaké hodnotě blíží se tento integrál, stává-li se z nekonečně malým? Máme především:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\int \mu d\omega \frac{z}{r'^3} + \int \mu d\omega \frac{z'}{r'^3}.$$



Obr. 4.

První integrál porovnati chceme s následujícím: $\int \mu d\omega \frac{z}{\varrho'^3}$ tvoříce jich rozdíl:

$$D = z \int \mu d\omega \left[\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho'^3}\right]$$

$$\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho'^3} = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\varrho'}\right) . \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r'\varrho'} + \frac{1}{\varrho'^2}\right),$$

tudíž:

$$\left|\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho'^3}\right| < |\varrho' - r'| \left(\frac{1}{r'^3\varrho'} + \frac{1}{r'^2\varrho'^2} + \frac{1}{r'\varrho'^3}\right).$$

Jak lze lehce dokázati, platí pak nerovnost:

$$\frac{1}{r'^3\varrho'} + \frac{1}{r'^2\varrho'^2} + \frac{1}{r'\varrho'^3} < 3\left[\frac{1}{\varrho'^4} + \frac{1}{r'^4}\right]$$

a poněvadž, jak již dříve bylo uvedeno, $\frac{r'}{\varrho'} = q$ zůstane konečným:

$$\left|\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho'^3}\right| < \frac{3z'}{\varrho'^4}\left[1 + \frac{1}{q^4}\right] < \frac{3cz'}{\varrho'^4}$$

kde do c dlužno dosaditi nejmenší hodnotu q. Z toho následuje:

$$|D| < 3c\,|\mu_1|\,z \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\varrho \frac{R\varrho^3 d\varrho d\varphi}{(\varrho^2 + z^2)^2}\left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2\right]$$

$$+ 3c\,|\mu_2|\,z \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_0^\varrho \frac{R\varrho^3 d\varrho d\varphi}{(\varrho^2 + z^2)^2}\left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2\right]$$

$$\int\limits_0^\varrho \frac{\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^2} = lg\,\frac{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}{z} - \frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + z^2}.$$

Integrováním dle proměnné φ vznikají jen konečné veličiny. Násobíme-li tudíž faktorem z, konvergují první členy k nulle, blíží-li se N bodu M. Integrály druhých členů, jichž čitatelé obsahují ϱ v páté mocnosti, dávají pro lim $z = 0$ hodnotu $\frac{\varrho^2}{2}$, kterou nutno ještě násobiti z. Z toho následuje, že lim $D = 0$ pro $z = 0$, a zbývá vytknouti mez integrálu, jejž s původním porovnáváme

$$\int \mu d\omega \frac{z}{\varrho'^3} = \int\limits_1 \mu_1 d\omega \frac{z}{\varrho'^3} + \int\limits_2 \mu_2 d\omega \frac{z}{\varrho'^3}.$$

Každý z integrálů dle ϱ má formu:

$$z \int\limits_0^\varrho \frac{\mu}{\cos\eta} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^{\,3}} = M(\mu) z \int\limits_0^\varrho \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^{\,3}}\left[1 + \frac{1}{2} S\varrho^2 + \ldots\right],$$

kde $M(\mu)$ značí střední hodnotu v intervallu integračním. Vyčíslíme-li určitý integrál prvého členu, vychází:

$$\left.\frac{-1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}\right|_0^\varrho = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}$$

a jest proto:

$$\lim z \int_0^{\varrho} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^3} = 1.$$

První členy jsou tedy $\pi\mu_{10}$ a $\pi\mu_{20}$. Zbytek jest menší než integrál členu druhého a součin tohoto s veličinou z konverguje k nulle pro lim $z = 0$. Jest tedy limita první části naší derivace $- \pi [\mu_{10} + \mu_{20}]$.

Ve druhé její části nahraďme r' součinem $q\varrho'$; pak jest

$$\left| \int \mu \, d\omega \frac{z'}{r'^3} \right| < \frac{|\mu_1|}{q^3} \int_1 d\omega \frac{z'}{\varrho'^3} + \frac{|\mu_2|}{q^3} \int_2 d\omega \frac{z'}{\varrho'^3}$$

$$< \frac{|\mu_1|}{q^3} \int_0^{\pi} \int_0^{\varrho} \frac{d\varphi d\varrho}{\cos \eta} \frac{R\varrho^3}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^3} + \frac{|\mu_2|}{q^3} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\varrho} \frac{d\varphi d\varrho}{\cos \eta} \frac{R\varrho^3}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^3}$$

kde za q dosazena opět jeho nejmenší hodnota. První člen dá integrací:

$$\int_0^{\varrho} \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}^3} = \sqrt{\varrho^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}$$

a stává se tudíž pro lim $z = 0$ nekonečně malým; integrujeme-li dle φ, obdržíme co faktor opět celistvé rationální funkce sin φ a cos φ; ostatní členy pak jsou vyššího řádu a náš výsledek zní:

$$\lim_{z=0} \frac{\partial V}{\partial z} = - \pi [\mu_{10} + \mu_{20}].$$

Je-li z negativní a tvoříme-li differenciální quotient dle dřívějšího směru, mění první část derivace své znaménko; neboť vzhledem k části roviny jsou oba směry normály stejně oprávněny; ostatně přichází v řečené části koordinata z v první mocnosti V druhém integrálu pak vyskytuje se, zaměníme-li r radiem ϱ, v mocnosti druhé a tudíž:

$$\lim_{\lim z = 0} \frac{\partial V_{-z}}{\partial z} = \pi [\mu_{10} + \mu_{20}]$$

a označíme-li oba směry normály n_1 a n_2:

$$\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}=-2\pi[\mu_{10}+\mu_{20}].$$

Jest zřejmo, jak by se modifikoval náš počet, protíná-li se v řečeném bodě více křivek, podél nichž hutnosť μ přestává býti spojitou.

Z uvedených výsledků vyplývají ihned vlastnosti potenciálu a jeho prvních derivací v bodech kraje hmotných ploch t. j. v bodech křivek, podél nichž plochy končí; můžeme si totiž představiti, že hmotná plocha rozkládá se dle libovolného zákona i za křivkou řečenou, majíc však stále spojité zakřivení a na přimyslené části všude hutnosť $\mu = 0$. Vytkneme zde výslovně jen ony vlastnosti potenciálu, kterých nenacházíme v případě obvyklé dislokace fluida:

První derivace dle směru ležícího v rovině ku ploše tečné kolmo na kraj plochy stává se v bodě kraje logarithmicky nekonečnou.

První derivace dle normály zůstane v bodu krajním konečnou, jest však nespojitou při překročení plochy a sice tak, že

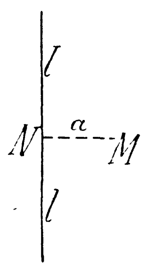
$$\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}=-2\pi\mu.$$

Dle principu geometrického sčítání seznáme na základě získaných výsledků beze všeho dalšího vlastnosti potenciálu v bodech křivek, ve kterých hmotná plocha tvoří hranu aneb sama sebe protíná.

Přejdeme nyní ku vlastnostem potenciálu rovinného či logarithmického v bodech hmotných křivek, ve kterých hutnosť fluida jest nespojitou funkcí. Připomínám ještě jednou, že křivky řečené mají spojité zakřivení (opačné případy lze jako dříve redukovati rozložením v jednotlivé větve) a že μ nikde nestává se nekonečným. Jak známo jest logarithmický potenciál bodu N v jeho okolí, tedy na př. v bodu M až na additivní konstantu roven Newtonovu potenciálu homogenní hmotné přímé čáry velmi značné délky dle formule:

$$V=\int_{-l}^{+l}\mu\frac{dl}{\sqrt{l^2+a^2}}=\mu lg\frac{\sqrt{l^2+a^2}+l}{\sqrt{l^2+a^2}-l}=2\,\mu lg\frac{l^2}{a}+\text{const.},$$

při čemž a jest oproti l velice malým a hutnosť bodu hmotného rovná se dvojnásobné hutnosti lineární, ovšem jen co do číselné hodnoty, nikoli však co do dimense. Bude tedy prostorový potenciál dlouhého válce, na němž hutnost dle povrchových přímek se nemění, pro body této ploše velmi blízko ležící rovnati se logarithmickému potenciálu rovinného řezu válce, procházejícího tímto bodem, při čemž lineární hutnosť jeho fluida jest dvakrát tak velká, jako povrchová hutnosť na válci. Řez veden jest kolmo k povrchovým paprskům válce. Mění-li se tedy hutnosť μ v některém bodě hmotné křivky způsobem nespojitým, nastává týž případ pro hutnosť na válci a sice převezme povrchová



Obr. 5.

přímka jeho úlohu dřívější křivky S. Směr přímek těchto jest bez významu pro potenciál rovinný. Vyvodíme tedy ihned následující věty:

Rovinný potenciál zůstává i v bodě nespojitosti funkce μ až na konstantu additivní určitým a v každém směru roviny spojitým.

První derivace funkce V dle směru tangenty jest v řečeném bodě logarithmicky nekonečnou.

První differenciální quotient potenciálu dle normály křivky zůstane konečným, nabývá však rozdílných hodnot, blížíme-li se k bodu křivky s rozdílných stran ve směru normály. Tyto limity stojí k sobě v relaci:

$$\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}=-\pi(\mu_{10}+\mu_{20}),$$

kde μ_{10} a μ_{20} značí limity, ku kterým konverguje hutnosť lineární, blížíme-li se na křivce hmotné bodu nespojitosti s obou stran.

Má-li tedy hmotná křivka bod konečný, myslíme si ji prodlouženu v tomto směru způsobem libovolným, však s podmínkou, že v tomto bodě směr tečny zůstane spojitým. Na připojené části dlužno μ položiti rovno nulle. Protíná-li se v některém bodě více větví hmotných křivek aneb končí-li zde tyto, ovšem v obmezeném počtu, stačí použiti našich výsledků, bychom poznali vlastnosti potenciálu a jeho první derivace v libovolném směru roviny. (Dokončení.)

Descartesův list jako cissoidala.

Dr. K. Zahradník.

V ročníku II. pg. 183 tohoto časopisu dokázal jsem, že každá křivka racionální třetího stupně je cissoidalou a že ji dle toho též konstruovati můžeme. Máme-li ve zvláštním případě Descartesův list, můžeme jeho rovnici

$$x^3+y^3-3axy=o$$

psáti

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)-3axy=0$$

aneb

$$(x^2-xy+y^2)(x+y+a)-a(x+y)^2=0,$$

z čehož vysvítá ihned, že je základní kuželosečka

$$C_2\equiv x^2-xy+y^2-a(x+y)=0$$

a rovnice přímky

$$P\equiv x+y+a=0.$$

Jest tudíž přímka P reálnou asymptotou Descartes-ova listu, a kuželosečka C_2 je ellipsou, kterou snadně lze konstruo-