Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Poznámka o konstrukci racionálných křivek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 1, 43--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123344

protipůsobení k síle dostředivé, a musí dle toho, co shora řečeno, býti téhož druhu jako síla dostředivá — je-li síla dostředivá silou gravitační, jest jí i síla odstředivá, je-li síla dostředivá molekulovým tahem neb tlakem, jest jím i síla odstředivá. Něco více ve skutečnosti ani zjistiti se nedá.

Co se didaktické stránky dotýče, rozumí se samo sebou, že pojem síly tuto naznačený připouští různá zpracování methodická, ani zpracování methodou historickou nevyjímajíc.

Poznámka o konstrukci racionálných křivek.

Napsal

Dr. K. Petr.

Křivka racionálná n-tého stupně ustanovena jest jak známo v souřadnicích pravoúhlých vztahy

$$x = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots}{b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots},$$

$$y = \frac{b_0 t \;\; + b_1 t^{n-1} + \dots}{c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \dots},$$

kde a_0, b_0, c_0 nejsou současně všechny tři rovny nulle Pokládáme-li t za (měnící se) poměr dvou délek, můžeme, jak známo z elementů geometrie, délky x, y jednoznačně sestrojiti a tak zjednati si libovolný počet bodů předložené křivky. V následujícím chci vyložiti jeden způsob konstrukce zcela jednoduchý a na snadě ležící, při čemž chci míti na zřeteli případ dosti obecný, že jest přímka, která křivku danou protíná v n bodech reálných a různých.*)

Aby výklad stal se co nejjednodušším, zavedu souřadnice trojúhelníkové. Zavedu však tyto souřadnice v specielním tvaru, aby zůstal srozumitelným i těm, jimž pojem souřadnic trojúhelníkových není docela dobře znám. Přiberu ku osám pravoúhlým X, Y, jichž průsek označím C, přímku třetí protínající osy X, Y

*) Tato okolnost nastane vždy při křivkách racionálných druhého a třetího stupně.

v bodech A, B různých od C a o které přímce právě budu předpokládati, že protíná křivku racionálnou v n různých bodech. Ku určování polohy bodu budu pak užívati mimo souřadnice x, y ještě vzdálenosti z bodu od přímky AB se znaménkem vhodně voleným (ku př. lze zvoliti znaménko kladné pro vzdálenosti těch bodů, jež jsou na stejné straně přímky jako bod C atd.). Tyto tři veličiny x, y, z. souřadnice to jednoho bodu, nejsou na sobě nezávisly (jak okamžitě patrno jest mezi nimi lineárný vztah, jejž dostaneme, vypočteme-li pomocí nich plochu trojúhelníka ABC), postačí tudíž znáti poměry těchto souřadnic, ku př. $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Vypočtu-li si tyto poměry pro libovolný bod křivky racionálné dané, dostanu tyto výrazy

$$\frac{x}{z} = \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots}{d_0 t^n + d_1 t^{n-1} + \dots},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{b_0 t^n + b_1 t^{\lambda-1} + \dots}{d_0 t^n + d_1 t^{n-1} + \dots}.$$

Rovnice $d_0 t^n + d_1 t^{n-1} + \dots + d_n = 0$ má vesměs reálné a různé kořeny, vzhledem ku předpokladu o přímce AB učiněnému. Můžeme pak položiti $d_0 = 1$, neboť parametr t lze vždy zvoliti tak, aby nebyl ∞ pro žádný průsek přímky AB s křivkou. Dále chci předpokládati, že bod C jest bodem křivky a že tomuto bodu odpovídá parametr $t = 0$, což obojí lze vždy zaříditi. Za takovýchto předpokladů lze rovnice křivky psáti v tomto tvaru:

$$\frac{x}{z} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t - \delta_1} + \frac{\alpha_2}{t - \delta_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{t - \delta_n};$$

$$\frac{y}{z} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{t - \delta_1} + \frac{\beta_2}{t - \delta_2} + \dots + \frac{\beta_n}{t - \delta_n};$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\delta_1} + \frac{\alpha_2}{\delta_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\delta_n}, \qquad \beta_0 = \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_2}{\delta_2} + \dots + \frac{\beta_n}{\delta_n}.$$

Při sestrojení výrazů takto upravených má velikou důležitost konstrukce základní, kterou nejprve popíši. Buďtež dány dva body P, P' o souřadnicích (a, b, c), (a', b', c'). Průměty těchto bodů z bodu C na přímku AB nechť jsou P_1, P_1'.

Průsek přímek PP_1', $P'P_1$ jest bod Q. Tak jsme určitou geometrickou operací našli ze dvou bodů P, P' bod třetí Q; budeme tuto operaci označovati krátce Ω a budeme dle toho psáti

$$\Omega(P, P') = Q.$$

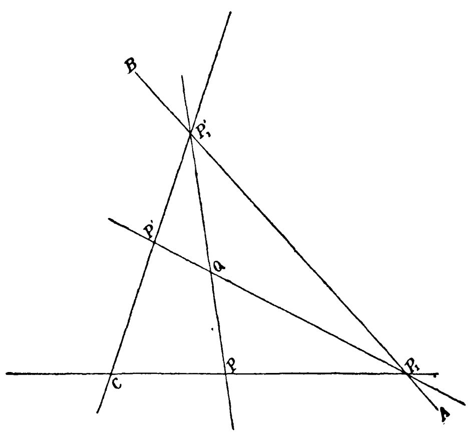
Souřadnice bodu Q jsou úměrny číslům

$$ac' + a'c, \quad bc' + b'c, \quad cc',$$

jak snadným počtem se přesvědčíme; tento výsledek lze velmi jednoduše psáti takto

$$\text{(I)} \qquad \frac{x_Q}{z_Q} = \frac{a}{c} + \frac{a'}{c'}, \qquad \frac{y_Q}{z_Q} = \frac{b}{c} + \frac{b'}{c'},$$

anebo slovy: Poměry souřadnic bodu výsledného $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ dosta-



neme, když příslušné poměry souřadnic obou bodů, od nichž jsme vycházeli, sečteme.

Nakresleme nyní n přímek

$$\frac{x}{z} = \frac{\alpha_k}{\delta_k} + \frac{\alpha_k}{t - \delta_k}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\beta_k}{\delta_k} + \frac{\beta_k}{t - \delta_k},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tyto přímky procházejí počátkem C a odpovídá tomuto bodu u všech přímek hodnota parametru $t = 0$. Přiřadme k sobě ty body vždy dvou přímek, jež mají stejné t, dostaneme tak řady bodové v poloze perspektivné. Toto přiřadění jest geometricky stanoveno středem perspektivnosti, jichž jest patrně u našich n přímek $n - 1$ na sobě nezávislých a jež jsou pomocí α_k, β_k, δ_k zcela stanoveny. Známe-li středy perspektivnosti, tu pouhým promítáním bodu jedné z n přímek z příslušných středů perspektivnosti na přímky ostatní sestrojíme body přiřaděné na těchto přímkách. Označme tyto body, k nimž patří stejné t, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a sestrojme

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \Omega(P_1, P_2) &= Q_2 \\ \Omega(Q_2, P_3) &= Q_3 \\ &\ldots\ldots \\ \Omega(Q_{n-1}, P_n) &= Q_n, \end{aligned}$$

tu dle formulí (I) má Q_n souřadnice

$$z = \frac{\alpha_1}{\delta_1} + \frac{\alpha_1}{t - \delta_1} + \frac{\alpha_2}{\delta_2} + \frac{\alpha_2}{t - \delta_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\delta_n} + \frac{\alpha_n}{t - \delta_n},$$

$$\bar{z} = \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_1}{t - \delta_1} + \frac{\beta_2}{\delta_2} + \frac{\beta_2}{t - \delta_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\delta_n} + \frac{\beta_n}{t - \delta_n},$$

t. j. Q_n jest bodem naší křivky racionálné. Zároveň jest patrno, že poloha bodu Q_n jest úplně nezávisla od pořadí bodů P_1, $P_2, \ldots, P_n$ a že body $Q_2, Q_3, \ldots,$ leží na křivkách racionálných 2., 3., ... stupně, kteréžto křivky současně s křivkou n-tého stupně se kreslí. Dále jest jasno, že body, ve kterých n přímek protíná přímku základní AB, jsou body naší křivky n-tého stupně (parametry jich jsou $t = \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$).

Nechci na příkladech zvláštních ukazovati užití této obecné konstrukce, ukážu jenom, že tato konstrukce řeší, položíme-li $n = 2$, známý úkol *sestrojiti kuželosečku danou pěti body* C, C_1, C_2, C_3, C_4. Bod C zvolíme si za základní bod a přímku C_1C_2 za základní přímku konstrukce Ω. Na přímce CC_1 sestrojíme bod P_1 a na přímce CC_2 bod P_2 tak, aby $\Omega(P_1, P_2) = C_3$; ihned jest zřejmo, že P_1 dostaneme, když C_3 promítneme z C_2; P_2 dostaneme, promítneme-li C_3 z C_1. Tak dostali jsme pomocí bodu C_3 dvojici bodů k sobě přiřaděných, pomocí C_4 obdržíme druhou dvojici bodů, a obě tyto dvojice určují střed perspektivnosti. Ostatní jest dle předcházejícího zcela jasno.

Z n řad bodových v poloze perspektivné získali jsme pomocí konstrukce Ω konstrukci křivky racionálné, ovšem ne zcela libovolné, nýbrž protínající přímku AB, jež zvolili jsme si za základní přímku konstrukce Ω, v n různých bodech. Avšak konstrukci tuto lze snadno různým způsobem zevšeobecniti. Abych aspoň jeden směr tohoto zevšeobecnění naznačil, poukáži k tomu, že při řadě konstrukcí (II), kde vycházeli jsme z n řad perspektivných, není třeba prováděti každou z těch konstrukcí vzhledem ku jediné pevné přímce; jest možno při každé z oněch $n - 1$ konstrukcí Ω za základní přímku zvoliti si přímku jinou (tedy celkem $n - 1$ přímek, z nichž některé mohou splývati a z nichž prvá jest základní pro konstrukci bodů Q_2, bodů to kuželosečky atd.). I v tomto případě kreslí bod Q_n racionálnou křivku n-tého stupně, vyjma polohy zcela zvláštní a provésti lze konstrukcí takto modifikovanou sestrojení křivek racionálných daných rovnicí a při nichž není přímky, jež by protínala křivku v n různých bodech reálných.

Věstník literární.

Federigo Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare. Bologna, Zanichelli, 1900. Str. VII + 532. Cena 12 lir.

K modernímu ruchu v mathematice patří snaha zlepšiti vyučování mathematické, spec. v elementární geometrii; svědčí o tom na př. diskusse, vedená předními odborníky v Německu o vyučování na vysokých školách (Klein, Pringsheim a j.), přednášky F. Kleina, které ohlásil pro prázdninový kurs učitelů středoškolských,*) živé úsilí v Anglii o reformu učby geometrické jakož i radikální změnu všeho vyučování v mathematice (Perry)**),

---

*) V Göttingách v době 11.—23. IV. 1904: Vyučování v elem. geometrii se zřetelem k novému vývoji v cizině. Differenciální a integrální počet ve škole.

**) Viz na př. referát R. Frickea „Über Reorganisationsbestrebungen des mathem. Elementarunterrichts in England," Jahresbericht der Deut. Math.-Verein. XIII. 1904, pg. 283—95 (květen).