stíme na přímku aa_v'' kolmici $a_v s_A$, obdržíme v průsečíku této přímky s normalou N_A žádaný střed křivosti křivky A.

(Dokončení).

O soustavách orthogonálných ploch.

Napsal

Eduard Weyr.

(Dokončení.)

3. Krásný theorem *Dupinův*, že se plochy tří orthogonalných soustav protínají ve svých křivoznačných čarách, lze utvořením differencialné rovnice těchto čar a přímou její integrací následujícím způsobem dokázati.

Buďte soustavy orthogonalné dány rovnicemi (1); označme literou G matici $\dfrac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}$ a připomeňme, že applikací této matice na soustavu dx, dy, dz patrně obdržíme soustavu $d\varrho$, $d\mu$, $d\nu$, t. j. že

$$\mathrm{G}\,(dx, dy, dz) = (d\varrho, d\mu, d\nu),$$

a že tedy

$$(dx, dy, dz) = \mathrm{G}^{-1}\,(d\varrho, d\mu, d\nu). \tag{6}$$

Avšak z rovnosti

$$\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\left[\frac{\partial(\varrho, \nu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\right] = \begin{Bmatrix} \mathrm{P}^2, & 0, & 0 \\ 0, & \mathrm{M}^2, & 0 \\ 0, & 0, & \mathrm{N}^2 \end{Bmatrix}$$

přímo vychází rovnost

$$\begin{Bmatrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho_1\mathrm{P}^{-2}, & \mu_1\mathrm{M}^{-2}, & \nu_1\mathrm{N}^{-2} \\ \varrho_2\mathrm{P}^{-2}, & \mu_2\mathrm{M}^{-2}, & \nu_2\mathrm{N}^{-2} \\ \varrho_3\mathrm{P}^{-2}, & \mu_3\mathrm{N}^{-2}, & \nu_3\mathrm{N}^{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix},$$

z níž patrno, že

$$G^{-1} = \begin{Bmatrix} \varrho_1 P^{-2}, & \mu_1 M^{-2}, & \nu_1 N^{-2} \\ \varrho_2 P^{-2}, & \mu_2 M^{-2}, & \nu_2 N^{-2} \\ \varrho_3 P^{-2}, & \mu_3 M^{-2}, & \nu_3 N^{-2} \end{Bmatrix}.$$

Rovnost (6) tedy podává pro dx, dy, dz výrazy

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\varrho_1}{P^2}\, d\varrho + \frac{\mu_1}{M^2}\, d\mu + \frac{\nu_1}{N^2}\, d\nu, \\ dy &= \frac{\varrho_2}{P^2}\, d\varrho + \frac{\mu_2}{M^2}\, d\mu + \frac{\nu_2}{N^2}\, d\nu, \\ dz &= \frac{\varrho_3}{P^2}\, d\varrho + \frac{\mu_3}{M^2}\, d\mu + \frac{\nu_3}{N^2}\, d\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Tím nalezeny partialné derivace hodnot x, y, z podle proměnných x, y, z; že tyto derivace skutečně hoví rovnicím (5), jest na první pohled patrné.

To předeslavše, utvořme differencialnou rovnici čar křivoznačných. Buď x, y, z bod na nějaké ploše a buďte

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c}$$

rovnice normaly plochy. Aby normala naplnila rozvinutelnou plochu, nutno voliti taková dx, dy, dz, aby bylo lze, se zřetelem na

$$X = x + at, \qquad Y = y + bt, \qquad Z = z + ct,$$

ustanoviti dX, dY, dZ úměrné s a, b, c, t. j. musí

$$\frac{d\,(x + at)}{a} = \frac{d\,(y + bt)}{b} = \frac{d\,(z + ct)}{c}.$$

Vynecháme-li v každém členu dt, máme

$$\frac{dx + tda}{a} = \frac{dy + tdb}{b} + \frac{dz + tdc}{c},$$

z kterých rovnic eliminací t plyne

$$\begin{vmatrix} dx, & da, & a \\ dy, & db, & b \\ dz, & dc, & c \end{vmatrix} = 0$$

jakožto differencialná rovnice čar křivoznačných.

Přihlédněme specialně k ploše $\varrho = \text{const.}$ Rovnice jejich křivoznačných čar jest

$$\varDelta = \begin{vmatrix} dx, & d\varrho_1, & \varrho_1 \\ dy, & d\varrho_2, & \varrho_2 \\ dz, & d\varrho_3, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Uvážíme-li, že

$$\begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{vmatrix}^2 = \mathrm{P}^2\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2 > 0,$$

můžeme onu rovnici psáti

$$\begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx, & d\varrho_1, & \varrho_1 \\ dy, & d\varrho_2, & \varrho_2 \\ dz, & d\varrho_3, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$\begin{vmatrix} d\varrho, & \mathrm{P}d\mathrm{P}, & \mathrm{P}^2 \\ d\mu, & \mu_1 d\varrho_1 + \mu_2 d\varrho_2 + \mu_3 d\varrho_3, & 0 \\ d\nu, & \nu_1 d\varrho_1 + \nu_2 d\varrho_2 + \nu_3 d\varrho_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} d\mu, & \mu_1 d\varrho_1 + \mu_2 d\varrho_2 + \mu_3 d\varrho_3 \\ d\nu, & \nu_1 d\varrho_1 + \nu_2 d\varrho_2 + \nu_3 d\varrho_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Derivujeme-li identity (3) dle x, y, z, obdržíme devět nových identit, z nichž první tři jsou

$$\begin{aligned}
(\varrho_{11}\mu_1 + \varrho_{21}\mu_2 + \varrho_{31}\mu_3) + (\mu_{11}\varrho_1 + \mu_{21}\varrho_2 + \mu_{31}\varrho_3) &= 0, \\
(\varrho_{12}\mu_1 + \varrho_{22}\mu_2 + \varrho_{32}\mu_3) + (\mu_{12}\varrho_1 + \mu_{22}\varrho_2 + \mu_{32}\varrho_3) &= 0, \\
(\varrho_{13}\mu_1 + \varrho_{23}\mu_2 + \varrho_{33}\mu_3) + (\mu_{13}\varrho_1 + \mu_{23}\varrho_2 + \mu_{33}\varrho_3) &= 0,
\end{aligned}$$

a z nichž dalších šest plyne z těchto tří cirkularnou permutací liter ϱ, μ, ν.

Násobíme-li napsané tři rovnice resp. ν_1, ν_2, ν_3, obdržíme jich sečtením

$$\Sigma\varrho_{hk}\mu_k\nu_h + \Sigma\mu_{hk}\varrho_k\nu_h = 0, \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

čili stručněji

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} + \mathrm{M}_{\varrho\nu} = 0,$$

kde výraz $\mathrm{P}_{\mu\nu}$ jest právě tak utvořen, jako polára kuželosečky $\Sigma\varrho_{hk}\nu_h\nu_k = 0$ o souřadnicích ν pro pol. μ, a kde patrně platí

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = \mathrm{P}_{\nu\mu}\,.$$

Další dvě skupiny oněch devíti rovnic podávají obdobně

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\nu\varrho} + \mathrm{N}_{\mu\varrho} &= 0\,, \\ \mathrm{N}_{\varrho\mu} + \mathrm{P}_{\nu\mu} &= 0\,. \end{aligned}$$

Z těchto tří rovnic plyne ihned

$$\mathrm{P}_{\mu\nu} = \mathrm{M}_{\nu\varrho} = \mathrm{N}_{\varrho\mu} = 0\,. \tag{9}$$

Vzhledem k (8) utvořme nyní součet

$$\begin{aligned} \mu_1 d\varrho_1 + \mu_2 d\varrho_2 + \mu_3 d\varrho_3 = \mu_1\,(\varrho_{11}dx + \varrho_{12}dy + \varrho_{13}dz) \\ + \mu_2\,(\varrho_{21}dx + \varrho_{22}dy + \varrho_{23}dz) + \mu_3\,(\varrho_{31}dx + \varrho_{32}dy + \varrho_{33}dz)\,; \end{aligned}$$

vložíme-li do něho za dx, dy, dz hodnoty (7), obdržíme

$$\mu_1 d\varrho_1 + \mu_2 d\varrho_2 + \mu_3 d\varrho_3 = \frac{d\varrho}{\mathrm{P}^2}\,\mathrm{P}_{\mu\varrho} + \frac{d\mu}{\mathrm{M}^2}\,\mathrm{P}_{\mu\mu} + \frac{d\nu}{\mathrm{N}^2}\,\mathrm{P}_{\mu\nu}\,,$$

a podobně

$$\nu_1 d\varrho_1 + \nu_2 d\varrho_2 + \nu_3 d\varrho_3 = \frac{d\varrho}{\mathrm{P}^2}\,\mathrm{P}_{\nu\varrho} + \frac{d\mu}{\mathrm{M}^2}\,\mathrm{P}_{\nu\mu} + \frac{d\nu}{\mathrm{N}^2}\,\mathrm{P}_{\nu\nu}\,.$$

Kladouce tyto hodnoty do (8) a přihlížejíc k (9), jakož i k tomu, že na ploše $\varrho = \text{const.}$ platí $d\varrho = 0$, máme rovnici křivoznačných čar

$$\left(\frac{P_{\nu\nu}}{N^2} - \frac{P_{\mu\mu}}{M^2}\right) d\mu d\nu = 0 .$$

Ježto, jak snadno lze ukázati, první faktor nevymizí, musí

$$d\mu d\nu = 0,$$

z čehož pro křivoznačné čáry plyne jedna neb druhá rovnice

$$\mu = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.},$$

a tím theorem *Dupinův* přímou integrací dokázán *).

4. Zmíněný faktor lze snadno geometricky interpretovati, z čehož pak vychází, že všeobecně nemizí.

Máme

$$P_{\mu\mu} = \Sigma \varrho_{hk} \mu_h \mu_k , \quad P_{\nu\nu} = \Sigma \varrho_{hk} \nu_h \nu_k , \quad (h, k = 1, 2, 3).$$

Supponujme přírůsty dx, dy, dz takovými, že

$$\frac{dx}{\mu_1} = \frac{dy}{\mu_2} = \frac{dz}{\mu_3} = \frac{ds}{M} ;$$

pak při stálých differencialech dx, dy, dz platí

$$d^2\varrho = \Sigma \varrho_{hk} \frac{ds}{M} \mu_h \frac{ds}{M} \mu_k = \frac{ds^2}{M^2} \Sigma \varrho_{hk} \mu_h \mu_k = \frac{ds^2}{M^2} P_{\mu\mu} ,$$

z čehož

$$\frac{P_{\mu\mu}}{M^2} = \frac{d^2\varrho}{ds^2} ,$$

při čemž druhá derivace vzata ve směru normaly k ploše $\mu =$ const.

Obdobně

$$\frac{P_{\nu\nu}}{N^2} = \frac{d^2\varrho}{ds_1^2} ,$$

je-li ds_1 element normaly k ploše ν.

Abychom interpretovali též podíl $\frac{P_{\mu\nu}}{MN}$, uvažme, že differencováním podél normaly k ploše μ máme

---

*) Sr. *Hesse*, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. 3. Aufl., XXXIte. Vorlesung.

$$d\varrho = \varrho_1 dx + \varrho_2 dy + \varrho_3 dz;$$

differencujeme-li na novo podél normaly k ploše ν, pokládajíce dx, dy, dz za stálé, obdržíme

$$d^2\varrho = dx\,(\varrho_{11}dx_1 + \varrho_{12}dy_1 + \varrho_{13}dz_1) + dy\,(\varrho_{21}dx_1 + \varrho_{22}dy_1 + \varrho_{23}dz_1) + dz\,(\varrho_{31}dx_1 + \varrho_{32}dy_1 + \varrho_{33}dz_1).$$

Vložíme-li za dx, dy atd. hodnoty plynoucí z relac

$$\frac{dx}{\mu_1} = \frac{dy}{\mu_2} = \frac{dz}{\mu_3} = \frac{ds}{\mathrm{M}},$$
$$\frac{dx_1}{\nu_1} = \frac{dy_1}{\nu_2} = \frac{dz_1}{\nu_3} = \frac{ds_1}{\mathrm{N}},$$

obdržíme hledanou formuli

$$\frac{d^2\varrho}{ds\,ds_1} = \frac{\mathrm{P}_{\mu\nu}}{\mathrm{MN}}.$$

Za příčinou zjednodušení položme počátek souřadnic do uvažovaného bodu plochy ϱ, a osy x, y, z do normal ploch ϱ, μ, ν. Pak v tomto bodě platí

$$\varrho_2 = \varrho_3 = 0, \quad \mu_3 = \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,$$

a z rovnic (3) plynou derivováním resp. dle z, x, y relace

$$\varrho_1\mu_{13} + \mu_2\varrho_{23} = 0,$$
$$\mu_2\nu_{21} + \nu_3\mu_{31} = 0,$$
$$\nu_3\varrho_{32} + \varrho_1\nu_{12} = 0,$$

t. j. tři linearné homogenní relace mezi ϱ_{23}, μ_{31}, ν_{12}. Poněvadž determinant těchto rovnic $2\varrho_1\mu_2\nu_3$ není nullou, máme

$$\varrho_{23} = \mu_{31} = \nu_{12} = 0,$$

a tím věta *Dupinova* v podstatě přímo verifikována.

Skutečně lze rovnici $\varrho = 0$ plochy ϱ psáti

$$0 = \varrho_1 x + \frac{1}{2}(\varrho_{11}x^2 + \varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2 + 2\varrho_{12}xy + 2\varrho_{23}yz + 2\varrho_{31}zx) + \ldots;$$

vzhledem $\varrho_{23} = 0$ zapadají osy její indikatrix,

$$0 = \varrho_1 x + \frac{1}{2}(\varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2 + 2\varrho_{23}yz), \qquad x = \text{const.}$$

do směrů os y a z, čímž věta ona verifikována.

Poněvadž směr ds splývá se směrem y a směr ds_1 se směrem z, máme nyní

$$\frac{P_{\mu\mu}}{M^2} = \frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2} = \varrho_{22}, \quad \frac{P_{\nu\nu}}{N^2} = \frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2} = \varrho_{33}, \quad \frac{P_{\mu\nu}}{MN} = \frac{\partial^2\varrho}{\partial y \partial z} = \varrho_{23} = 0,$$

a faktor

$$\frac{P_{\nu\nu}}{N^2} - \frac{P_{\mu\mu}}{M^2}$$

vymizí tudíž jen tenkráte, kdy indikatrix jest kružnicí, t. j. en v bodech kruhových plochy ϱ.

O řešení rovnice Keplerovy methodou iterační.

Sdílí

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

1. Má-li se řešiti rovnice

$$(1) \qquad E = M + e \sin E,$$

ve které M jest daná veličina realná a e malá veličina kladná $\left(\text{mezi } 0 \text{ a } \frac{1}{3}\right)$, užívá se někdy methody, jejíž podstata jest následující: Vycházejíce od libovolné veličiny E_0 tvořme řadu čísel E_1, E_2, E_3, ... pomocí rovnic

$$(2) \qquad E_1 = M + e \sin E_0, \; E_2 = M + e \sin E_1, \ldots, \\ E_n = M + e \sin E_{n-1}, \ldots$$

Pak se předpokládá, že čísla ta blíží se určité hodnotě, která jest právě hledaným kořenem E rovnice (1). Chceme ukázati, že methoda tato je správná, a vyšetřiti, jak rychle konverguje řada čísel E_0, E_1, E_2, ... ke své mezi E.

Především ukažme, že pro veličiny E_n definované rovnicemi (2) existuje limita