Matyáš Lerch

O řešení rovnice Keplerovy methodou iterační

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 2, 109--114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123317`

$$0 = \varrho_1 x + \frac{1}{2}(\varrho_{22} y^2 + \varrho_{33} z^2 + 2\varrho_{23} yz), \qquad x = \text{const.}$$

do směrů os y a z, čímž věta ona verifikována.

Poněvadž směr ds splývá se směrem y a směr ds_1 se směrem z, máme nyní

$$\frac{P_{\mu\mu}}{M^2} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} = \varrho_{22}, \quad \frac{P_{\nu\nu}}{N^2} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} = \varrho_{33}, \quad \frac{P_{\mu\nu}}{MN} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y \partial z} = \varrho_{23} = 0,$$

a faktor

$$\frac{P_{\nu\nu}}{N^2} - \frac{P_{\mu\mu}}{M^2}$$

vymizí tudíž jen tenkráte, kdy indikatrix jest kružnicí, t. j. en v bodech kruhových plochy ϱ.

O řešení rovnice Keplerovy methodou iterační.

Sdílí

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

1. Má-li se řešiti rovnice

$$E = M + e \sin E, \tag{1}$$

ve které M jest daná veličina realná a e malá veličina kladná $\left(\text{mezi } 0 \text{ a } \frac{1}{3}\right)$, užívá se někdy methody, jejíž podstata jest následující: Vycházejíce od libovolné veličiny E_0 tvořme řadu čísel E_1, E_2, E_3, ... pomocí rovnic

$$E_1 = M + e \sin E_0, \; E_2 = M + e \sin E_1, \ldots, \\ E_n = M + e \sin E_{n-1}, \ldots \tag{2}$$

Pak se předpokládá, že čísla ta blíží se určité hodnotě, která jest právě hledaným kořenem E rovnice (1). Chceme ukázati, že methoda tato je správná, a vyšetřiti, jak rychle konverguje řada čísel E_0, E_1, E_2, ... ke své mezi E.

Především ukažme, že pro veličiny E_n definované rovnicemi (2) existuje limita

$$\lim_{n=\infty} E_n = E, \text{ je-li } 0 < e < 1.$$

K tomu cíli odečtěme rovnice

$$E_n = M + e \sin E_{n-1}, \quad E_{n-1} = M + e \sin E_{n-2},$$

a v rovnici tak vzniklé

$$E_n - E_{n-1} = e (\sin E_{n-1} - \sin E_{n-2})$$

užijme známé věty

$$f(E_{n-1}) - f(E_{n-2}) = (E_{n-1} - E_{n-2}) f'(E'_{n-2}),$$

kde $f'(x)$ značí derivaci a E'_{n-2} veličinu obsaženou uvnitř mezery $(E_{n-2} \ldots E_{n-1})$. Tím způsobem vznikne rovnice

$$\frac{E_n - E_{n-1}}{E_{n-1} - E_{n-2}} = e \cos E'_{n-2}. \tag{3}$$

Zde klaďme po řadě za n hodnoty 2, 3, 4, 5, . . ., n a znásobme výsledky; tím vznikne

$$\frac{E_n - E_{n-1}}{E_1 - E_0} = e_{n-1} \prod_{\nu=0}^{n-2} \cos E'_\nu .$$

Znamenáme-li k vůli stručnosti

$$\prod_{\nu=0}^{m} \cos E'_\nu = a_m, \text{ takže } |a_m| < 1, \tag{4}$$

obdržíme tak

$$E_n - E_{n-1} = (E_1 - E_0) \, . \, a_{n-2} \, e^{n-1}.$$

Sečteme-li tyto výsledky pro $n = p + 1, p + 2, \ldots, p + m$, vznikne

$$E_{p+m} - E_p = (E_1 - E_0) \sum_{n=p+1}^{p+m} a_{n-2} \, e^{n-1}. \tag{4^a}$$

Výraz na pravé straně jest číselně menší než

$$|E_1 - E_0| \, . \, e^p \frac{1 - e^m}{1 - e} < |E_1 - E_0| \frac{e^p}{1 - e}$$

a tedy klesá s rostoucím p bez ohledu na m. Z toho plyne, že existuje limita $\lim_{p=\infty} E_p = E$, a zároveň plyne ze (4^a) přechodem k limitě pro $m = \infty$:

$$(5) \qquad E - E_p = (E_1 - E_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p+\nu-1}\, e^{p+\nu},$$

kterýžto vzorec je pro posouzení aproximace velmi důležitý.

Zbývá především ukázati, že definovaný právě výraz $\lim E_n = E$ hoví rovnici Keplerově; že tomu tak, plyne z rovnice

$$E_n = M + e \sin E_{n-1},$$

přejde-li se v ní k limitě pro $n = \infty$; obdrží se tak

$$E = M + e \sin E,$$

takže E skutečně jest kořenem rovnice Keplerovy.

Poněvadž pro skutečné počítání jest počet kroků při iteraci rozhodujícím, dlužno vyšetřiti, jak veliká jest odchylka mezi hodnotou idealní E a hodnotou sbližnou E_p, t. j. rozdíl

$$(5^*) \qquad R_p = E - E_p = (E_1 - E_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p+\nu-1}\, e^{p+\nu};$$

ježto

$$a_m = \cos E'_0 \,.\, \cos E'_1 \,.\, \cos E'_2 \ldots \cos E'_m,$$

a úhel E'_ν leží mezi E_ν a $E_{\nu+1}$, budou od jistého místa počínaje úhly E_ν, $E_{\nu+1}$, E'_ν všecky blízko při E. Bude tedy konvergence zvláště rychlou, je-li E blízko $\frac{\pi}{2}$, poněvadž tam jsou cosinusy velmi malé.

Zároveň je z rovnice (5^*) patrno, že chyba R_p je tím menší, čím menší jest rozdíl $E_1 - E_0$, takže methoda iterační jest výhodnou zvláště v případě, kdy známe s předu jednu hodnotu sbližnou pro E, kterou pak volíme za E_0.

Není-li žádný z výrazů $\cos E'_\nu$ číselně větší než ϱ, bude

$$|R_p| < |E_1 - E_0| \,.\, (e\varrho)^p \frac{1}{1 - \varrho e}.$$

2. Je-li M blízko 0 neb π, bude aspoň pro menší hodnoty e úhel E blízko při týchž hodnotách, takže zde cosinusy úhlů E'_μ nebudou malé. V tom případě se doporučuje úprava následující: *)

Klademe-li $E - M = \varphi$, lze rovnici psáti

$$\varphi = e \cos M . \sin \varphi + e \sin M . \cos \varphi ;$$

znamenejme $e \cos M = a$, $e \sin M = b$, a rovnici udělme tvar

$$(1 - a)\varphi = a(\sin \varphi - \varphi) + b \cos \varphi .$$

Vycházejíce z určité hodnoty φ_0, tvořme řadu veličin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ pomocí rovnice

$$(6) \qquad (1 - a)\varphi_n = a(\sin \varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}) + b \cos \varphi_{n-1} .$$

Pak existuje $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n = \infty$. Neboť odečteme-li od (6) rovnici, která z ní vznikne záměnou n za $n - 1$, obdržíme

$$(1 - a) \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}} = a(\cos \varphi'_{n-2} - 1) - b \sin \varphi'_{n-2} ,$$

kde úhel φ'_{n-2} leží mezi φ_{n-2} a φ_{n-1}. Odtud pak plyne

$$(7) \qquad \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\varphi_1 - \varphi_0} = \prod_{\nu=0}^{n-2} \frac{a(\cos \varphi'_\nu - 1) - b \sin \varphi'_\nu}{1 - a} = A_{n-2} .$$

Ježto a a b jsou menší než e, bude při $e < \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{a}{1-a} \right| < 1, \quad \left| \frac{b}{1-a} \right| < \frac{1}{2} ,$$

a tedy bude řada

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

absolutně konvergentní. Poněvadž pak z rovnice poslední plyne

$$\varphi_n - \varphi_p = (\varphi_1 - \varphi_0)(A_{p-1} + A_p + A_{p+1} + \ldots + A_{n-2}),$$

*) Methoda v podstatě dokázána Weierstrassem v přednáškách o theorii funkcí.

shledáváme, že 1) $\lim \varphi_n = \varphi$ existuje, a 2) že platí rovnice k posouzení aproximace důležitá:

$$(8) \quad \varphi - \varphi_p = (\varphi_1 - \varphi_0)(A_{p-1} + A_p + A_{p+1} + A_{p+2} + \ldots).$$

Je-li $\varphi_1 - \varphi_0$ malé, budou všecka φ_ν blízka při φ a výrazy $a(\cos \varphi'_\nu - 1)$, $b \sin \varphi'_\nu$ budou velmi malé.

3. Konečně budiž nám dovoleno poznamenati, že známe-li s předu sblíženou hodnotu neznámé E, můžeme obdržeti hodnotu přesnější pomocí obecné methody řešení rovnic, jež nastoupiti musí na místo zastaralé methody Newtonovy a regule falsi, které od doby, co známa jest řada Taylorova, nelze bráti vážně.

Buď $f(x)$ analytická funkce, která se v okolí místa x_0 chová pravidelně a na jednom místě v tomto okolí mizí. V tomto okolí nechť zároveň derivace $f'(x)$ svojí absolutní hodnotou převyšuje určitou konstantu, takže pak bude lze z řady

$$(9) \quad y - f(x_0) = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

obrácením vyjádřiti h jako funkci rozdílu $y - f(x_0) = y - y_0$ ve tvaru

$$(9^a) \quad h = A_1(y - y_0) + A_2(y - y_0)^2 + A_3(y - y_0)^3 + \ldots$$

V rovnici (9) má y význam $f(x_0 + h)$, takže je-li h_1 hledaná oprava sbližné hodnoty kořene x_0, bude $y = f(x_0 + h_1) = 0$ a tedy

$$(10) \quad h_1 = - A_1 y_0 + A_2 y_0^2 - A_3 y_0^3 + \ldots$$

Zbývá tedy pouze vypočísti koefficienty $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Tu jest

$$\nu!\, A_\nu \left(\frac{d^\nu h}{dy^\nu}\right)_{y = y_0}, \quad y = f(x_0 + h),$$

tedy dle elementarných vzorců

$$\frac{dh}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dh}}, \quad \frac{d^2h}{dy^2} = - \frac{\dfrac{d^2y}{dh^2}}{\left(\dfrac{dy}{dh}\right)^3},$$

$$\frac{d^3h}{dy^3} = \frac{3\left(\frac{d^2y}{dh^2}\right)^2 - \frac{dy}{dh}\cdot\frac{d^3y}{dh^3}}{\left(\frac{dy}{dh}\right)^5}, \dots$$

bude

$$A_1 = \frac{1}{f'(x_0)},\quad A_2 = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^3},$$

$$A_3 = \frac{3f''(x_0)^2 - f'(x_0)f'''(x_0)}{6f'(x_0)^5}, \dots$$

Tedy *je-li* $f(x_0 + h_1) = 0$, *bude oprava* h_1 *dána řadou*

$$(10^*)\quad \begin{cases} h_1 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \dfrac{f''(x_0)\,f(x_0)^2}{2f'(x_0)^3} - \dfrac{[3f''(x_0)^2 - f'(x_0)f'''(x_0)]}{6f'(x_0)^5}\,f(x_0)^3 \\ \quad + \dots \end{cases}$$

Podržíme-li pouze prvý člen této řady, máme methodu Newtonovu.

V našem případě jest

$$f(\mathrm{E}) = \mathrm{E} - \mathrm{M} - e\sin\mathrm{E},$$

tedy

$$f'(\mathrm{E}_0) = 1 - e\cos\mathrm{E}_0,\quad f''(\mathrm{E}_0) = e\sin\mathrm{E}_0,\quad f'''(\mathrm{E}_0) = e\cos\mathrm{E}_0,$$

takže bude s velikou přesností:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{E} = \mathrm{E}_0 - \dfrac{f(\mathrm{E}_0)}{1 - e\cos\mathrm{E}_0} - \dfrac{f(\mathrm{E}_0)^2 \,.\, e\sin\mathrm{E}_0}{2(1 - e\cos\mathrm{E}_0)^3} \\ + \dfrac{e\cos\mathrm{E}_0 - e^2(1 + 2\sin^2\mathrm{E}_0)}{6(1 - e\cos\mathrm{E}_0)^5}\,f(\mathrm{E}_0)^3, \end{cases}$$

kde $f(\mathrm{E}_0) = (\mathrm{E}_0 - \mathrm{M}) - e\sin\mathrm{E}_0$.

Z laboratoře fysikalního ústavu české university.

Podává

Dr. **Vladimír Novák,**

assistent ústavu.

1. Zrcadla Fresnelova.

Pokud mi známo, užívá se na školách středních k interferenčnímu pokusu Fresnelově dosti složitého přístroje, který ne