Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bedřich Procházka

O trajektroriích průsečíkových. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 2, 81--103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123316`

O trajektoriích průsečíkových.

Napsal

Bedřich Procházka,
docent na c. k. české vysoké škole technické v Praze.

Část prvá.

Základní pojmy. Pohyb posouvání nepromĕnného útvaru rovinného. Základní pohyby nepromĕnného útvaru rovinného. Trajektorie bodu při pohybu nepromĕnného útvaru rovinného.

1. *Nepromĕnným útvarem rovinným* nazýváme onen útvar rovinný, jehož všecky body zůstávají při pohybu v nepromĕnných vzdálenostech. Za takový útvar možno považovati každou *tuhou rovinu hmotnou.*

Když se rovinný útvar nepromĕnný ^1A pohybuje po jiné, v poloze stálé*) se nalezající rovinĕ A, tu třeba rozeznávati následní dva základní druhy pohybu: *pohyb posuvný* (posouvání) **) č. *translační* a *pohyb otáčení* č. *rotační.* Skládáním jednoho nebo obou tĕchto druhů povstávají *rovinné pohyby složené.*

Když se rovinný útvar ^1A nĕkterým z tĕchto způsobů pohybuje, pak každý jeho bod vytvořuje určitý útvar linearný, který zoveme *trajektorií.*

Každými dvĕma nekonečnĕ blízkými č. soumeznými polohami bodu se pohybujícího určen jest prvek trajektorie, stanovící tečnu ku této křivce. Naopak tečna v jistém bodu trajektorie udává smĕr pohybu bodu z polohy příslušné do soumezné.

I. Jednoduchý pohyb posouvání nepromĕnného útvaru rovinného.

2. *Pohyb posouvání.* Když se po rovinĕ A pohybuje nepromĕnný útvar rovinný ^1A tak, že všechny jeho body vytvořují

---

*) Stálost polohy roviny A jest arciť vzhledem ku pohybu zemĕ kol slunce a vzhledem ku pohybu tohoto ve vesmíru jen *relativní.*

**) Užito zde názvu, který zavedl pan professor *Frant. Tilšer* ve svých přednáškách o deskriptivní geometrii na c. k. české vysoké škole technické.

trajektorie shodné, pak nazýváme pohyb takový *posuvným* (posouváním) čili *translačním*. Známe-li trajektorii jednoho bodu rovinného útvaru ^{1}A, můžeme sestrojiti trajektorii každého jiného bodu této roviny.

Pohyb translační jest buď *přímým* nebo *křivým* dle toho, zdali vytvořují body pohybujícího se útvaru rovinného trajektorie přímé nebo křivé. Druhý z těchto případů můžeme považovati za pohyb složený z nekonečného množství nekonečně malých translačních pohybů přímých, jichž směr se nepřetržitě mění a jest dán v každém místě směrem nekonečně malých prvků a^1a, $^1a^2a$, $^2a^3a, \ldots$ $^{\beta}a^{1\beta}a, \ldots$ $^{\mu}a^{1\mu}a$ určujících tečny T_{a^1a}, $T_{^1a^2a}$, $T_{^2a^3a}, \ldots$ $T_{^{\beta}a^{1\beta}a}, \ldots$ $T_{^{\mu}a^{1\mu}a}, \ldots$ trajektorie B_a vytvořené libovolným bodem a rovinného útvaru se pohybujícího ^{1}A (obr. 1.). Každý takový jistému okamžiku příslušící směr pohybu budeme zváti *okamžitým směrem křivého pohybu posouvání.*

3. *Křivka obalová útvaru vytvořeného při posouvání nějaké křivky rovinného útvaru* ^{1}A.

Pohybuje-li se s rovinným útvarem ^{1}A nějaká křivka jeho A, pak vytvořený útvar rovinný z části bude omezen křivkou O obalující jednotlivé polohy křivky A (obr. 1.).

Je-li pohyb translační roviny ^{1}A po rovině A dán trajektorií B_a bodu a, pak jest v každém okamžiku dán směr nekonečně malého pošinutí, směrem tečny Ta v příslušném bodu trajektorie B_a. Při tom zároveň přechází křivka A do soumezných poloh ^1A, ^2A, $^3A, \ldots {}^{\beta}A$, $^{1\beta}A \ldots {}^{\mu}A$, $^{1\mu}A \ldots$ Soumezné křivky A^1A protínají se v určitém bodu o*); taktéž každé další dvě soumezné křivky $^1A^2A$, $^2A^3A, \ldots {}^{\beta}A$ $^{1\beta}A, \ldots {}^{\mu}A^{1\mu}A, \ldots$ protínají se v určitých bodech: ^1o, $^2o, \ldots$ $^{\beta}o, \ldots$ $^{\mu}o, \ldots$ Jelikož křivky A, ^1A, $^2A, \ldots$ jsou soumeznými, budou i jich body průsečné o, ^1o, $^2o, \ldots$ takovými a proto budou určovati souvislý útvar linearný — určitou křivku O, kteráž majíc s křivkou ^1A soumezné body o, ^1o, s křivkou ^2A body ^1o, $^2o, \ldots$ s křivkou $^{\beta}A$ body ^1o $^{2\beta}o$, atd. společny, dotýká se

*) Průsečíků těchto jak zřejmo bude obecně více; počet jich závisí na stupni křivky se posouvající A. Souhrnem těchto různých průsečíků tvořeny jsou pak různé buď souvisící části neb od sebe úplně oddělené větve křivky obalující O.

všech těchto soumezných křivek čili, jak pravíme *všechny je obaluje.*

Zároveň zřejmo, že jest každý dotyčný prvek $o\,{}^1o$, ${}^1o\,{}^2o$, ... křivky obalové O s křivkami ${}^1A$, ${}^2A$, ... též dotyčným prvkem tečen T_{o^1o}, $T_{{}^1o^2o}$, ... sestrojených ku křivkám ${}^1A$, ${}^2A$, ... resp. rovnoběžně s příslušnými tečnami T_{a^1a}, $T_{{}^1a^2a}$ ... trajektorie B_a. Neboť ku př. prvek $o\,{}^1o$ obalové křivky O jest zároveň dotyčným prvkem tečny T_{o^1o} křivky ${}^1A$ rovnoběžné s tečnou T_{a^1a}, protože bod o zaujme při nekonečně malém pošinutí křivky ${}^1A$ do polohy soumezné ${}^2A$ polohu ${}^1o$ a bude průsečným bodem obou soumezných poloh ${}^1A$, ${}^2A$.[4])

Jest zřejmo, že křivku O můžeme považovati za mez orthogonalného průmětu plochy posouvání, vytvořené křivkou rovinnou A, jejíž rovina jest s průmětnou rovnoběžna, a kteráž posouvá se podle křivky šroubové, jejíž osa jest kolmá ku průmětné a mající za křivku základní křivku B_a.

Zvláštní případ. Je-li křivka A kružnicí (obr. 2.), pak jest křivka obalová O určena meznými body průměrů oné křivky, které jsou kolmy ku příslušným okamžitým směrům pohybu posouvání. Skládá se tudíž v tomto případě křivka obalová ze dvou větví *ekvidistantních* vzhledem k sobě jakož i ku trajektorii B_s vytvořené středem s kružnice A.

Z té příčiny má tato obalová křivka *týž střed křivosti, který trajektorii středu přísluší.*

4. *Sestrojení středu křivosti křivky obalové O při pohybu translačním.* Sestrojujíce střed křivosti křivky obalové O nějaké libovolné posouvající se křivky A v bodu o, použijeme její příslušné křivky kruhové křivosti K.

Protože má tato s křivkou A dvě soumezné tečny společné, bude tečna ku křivce obalové O křivky A v bodě ${}^1o$ totožna s tečnou ku obalové křivce O^1 kružnice oskulační K. Tedy ***křivka obalová křivky se pohybující A a křivka obalová její příslušné kružnice křivosti se v bodě o oskulují.***

Avšak dle předcházejícího článku křivka kruhová křivosti

[4]) Jelikož jsou křivky A a ${}^1A$ nekonečně blízkými, nemůžeme je v obraze od sebe rozeznávati a bod o bude v obraze dotyčným bodem křivky obalové O s křivkou A.

K má za obalovou křivku ekvidistantní vzhledem ku trajektorii B_s, vytvořené středem křivosti s křivky A, a proto *střed křivosti křivky obalové O nalezneme, sestrojíme-li střed křivosti trajektorie B_s vytvořené středem křivosti s křivky A.* (Obr. 3.). Z toho plyne dále, že poloměr křivosti křivky obalové se rovná algebraickému součtu příslušných poloměrů křivosti křivky A a křivky B_s.

5. *O rychlostech při stejnoměrném pohybu translačním.* Pohybuje-li se bod nějaký v dráze přímé nebo křivé takovým způsobem, že dráhy vykonané jsou úměrny času, pak zoveme takový pohyb *stejnoměrným. Rychlostí* stejnoměrného pohybu nazýváme onu dráhu v, kterou vykoná bod v jednotce časové.[5])

Při pohybu ve dráze křivé vyznačuje se rychlost v v jistém bodě a trajektorie B_a délkou $\overline{at} = v$, vytknutou v příslušné tečně T_a. Úsečka $\overline{at}$ udává pak směr pohybu i velikost jeho rychlosti. Značí-li s dráhu, vykonanou rychlostí v v čase t, pak souvisí tyto veličiny známými vzorci:

$$s = v \,.\, t,$$

$$v = \frac{s}{t}.$$

Tento druhý vzorec má platnost i v tom případě, kdy dráha ds vykonaná v nek. krátkém čase dt jest nekonečně malou:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

II. Složený pohyb posouvání.

6. Posouvá-li se rovinný útvar ^{1}A po rovině ^{2}A v určité dráze ^1A stejnoměrně s rychlostí ^1v, tato rovina však současně po třetí rovině A ve dráze ^2A stejnoměrně s rychlostí ^2v, pak vytvoří libovolný bod a roviny ^{1}A určitou výslednou trajektorii A, jejíž body takto sestrojíme:

Proběhne-li v jistém čase bod a (obr. 4.) při pohybu ro-

[5]) Za jednotku časovou béřeme obyčejně sekundu, t. j. 86400-tý díl dne středního času.

viny ^{1}A po rovině ^{2}A v trajektorii ${}^1A$ dráhu a^1a, přijde současně při pohybu roviny ^{2}A po rovině A onen bod trajektorie ${}^1A$, který s bodem a momentaně spadá, do polohy ${}^2a$ v trajektorii ${}^2A$ a křivka ${}^1A$ dospěje do polohy ${}^{1\cdot 2}A$. Tím přijde pohyblivý bod a vlivem těchto obou současných pohybů do polohy ${}^{1\cdot 2}a$ jakožto bodu křivky A a vytvořuje takto postupně v rovině A tuto křivku, jakožto výslednou trajektorii složeného pohybu.

7. *Tečna ku trajektorii při složeném pohybu. Rovnoběžník rychlostí.*

Je-li doba, po kterou se dějí současné pohyby rovin ^{1}A a ^{2}A nekonečně malá *(dt)*, pak jsou dráhy $\overline{a^1a}$, $\overline{a^2a}$ nekonečně malými (obr. 5.) a prvky $\overline{a^1a}$ a $\overline{{}^2a^{1\cdot 2}a}$ spolu rovnoběžny; proto jest čtyřúhelník $a^1a\ {}^{1\cdot 2}a^2a$ nekonečně malým rovnoběžníkem. Mysleme si k tomuto nekonečně malému rovnoběžníku $a^1a\ {}^{1\cdot 2}a^2a$ sestrojen podobný a podobně sestrojený zvětšený rovnoběžník a^1tt^2t, tak že stejnolehlé strany se mají jako $dt : 1$, pak jsou strany:

$$\overline{a^1t} = \frac{\overline{a^1a}}{dt} = {}^1v, \quad \overline{a^2t} = \frac{\overline{a^2a}}{dt} = {}^2v,$$

a konečně úhlopříčna rovnoběžníka

$$\overline{at} = \frac{\overline{a^{1\cdot 2}a}}{dt} = v.$$

Úsečka a^1t v tečně ${}^1T$ křivky ${}^1A$ představuje podle velikosti i směru rychlost ${}^1v$ bodu spadajícího s bodem a v této křivce ${}^1A$. Úsečka a^2t v tečně ${}^2T$ křivky ${}^2A$ představuje co do velikosti a směru rychlost, kterou má s bodem a spadající bod křivky ${}^1A$ při pohybu v trajektorii ${}^2A$. Úsečka $\overline{at}$ v tečně T výsledné trajektorie A bodu a udává velikost a směr rychlosti, s kterou se bod tento pohybuje na základě obou pohybů. Z toho plyne důležitá věta: ***Je-li bod a podroben dvěma současným pohybům posouvání, kteréž mu rychlosti o velikosti a směru úseček a^1t, a^2t udělují, pak repraesentuje úhlopříčna at rovnoběžníka a^1tt^2t výslednou rychlost bodu a co do velikosti i směru.***

Můžeme tudíž sestrojovati na základě této věty tečnu trajektorie jakožto výsledku složeného pohybu dvou pohybů translačních.

Poněvadž to, co jsme odvodili pro bod a, platí pro každý bod roviny ${}^1A$, budou všechny body roviny této vytvořovati v témž okamžiku prvky stejně dlouhé a stejného směru a proto i trajektorie shodné. Z toho plyne, že *výsledný pohyb dvou translačních pohybů jest opět pohyb translační.*

Můžeme však také dle uvedeného složiti tři i více současných pohybů posuvných, jimž jistý útvar rovinný jest podroben, když složíme dva v jeden výslední, tento pak s třetím a tak pokračujeme, až všechny jednoduché pohyby posuvné vyčerpáme. Naopak můžeme také každý pohyb translační ve dva neb více translačních pohybů *komponentních* (ve *složky*) rozložiti, které jsou onomu danému ekvivalentní.

8. *Sestrojení středu křivosti křivky vytvořené při složeném pohybu posouvání.*

Jsou-li dány středy křivosti ${}^1s$, ${}^2s$ (obr. 5.) křivek ${}^1A$, ${}^2A$ (článek 6. a 7.) v bodu a, pak určíme také střed křivosti křivky výsledné A následním způsobem:

Pohyb s bodem a spadajícího bodu do obou nekonečně blízkých poloh v křivce ${}^1A$ můžeme pokládati za nekonečně malé otočení o amplitudě $d\Theta$ kolem středu ${}^1s$. Týž pohyb může však býti nahrazen nekonečně malým pošinutím $d\tau$ bodu a v tečně ${}^1T$ a nekonečně malým otáčením kolem bodu a o amplitudě $d\Theta$. Označíme-li poloměr křivosti $\overline{a\,{}^1s}$ křivky ${}^1A$ písmenou ${}^1\varrho$, pak platí pro tyto veličiny známý vztah

$$
{}^1\varrho = \frac{d\tau}{d\Theta}.\ ^{6)}
$$

Vyjádříme-li dále nekonečně malou rotaci $d\Theta$ kolem bodu a nekonečně malým obloukem $d\omega$, který při této rotaci bod ${}^1t$ vytvořuje, dle známého vzorce:

$$
d\theta = \frac{d\omega}{\overline{a\,{}^1t}} = \frac{d\omega}{{}^1v},
$$

pak obdržíme:

---

[6]) *Dr. Wilhelm Schell: „Theorie der Bewegung und der Kräfte"*, pag. 200. — *Dr. Christian Wiener* uvádí ve svém díle: *„Lehrbuch der darstellenden Geometrie"*, I. svaz. pag. 170. nový od Robervalova rozdílný způsob konstrukce tečen ku křivkám rovinným na základě jejich zákona výtvarného.

$$^1\varrho = \frac{d\tau}{d\omega} \cdot {}^1v.$$

Nahradíme-li konečně poměr nekonečně malých veličin $\frac{d\tau}{d\omega}$ poměrem příslušných rychlostí ^1v resp. ^1u, z nichž poslední vyjadřuje rychlost bodu ^1t při jeho otáčení kolem bodu a, obdržíme

$$(1) \qquad {}^1\varrho = \frac{{}^1v^2}{{}^1u},$$

z čehož vyplývá také, že

$$(2) \qquad {}^1u = \frac{{}^1v^2}{{}^1\varrho}.$$

Z rovnice 2. vyplývá tudíž konstrukce rychlosti ^1u na základě dané rychlosti ^1v a poloměru křivosti $^1\varrho$. Spustíme totiž s bodu a ku přímce $^1s\,^1t$ kolmici $a\,^1k$, kteráž určuje v přímce $^1t\,^1k \perp {}^1T$ úsečku $^1t\,^1k = {}^1u$.

Z toho plyne následní věta: *Nekonečně malé otočení bodu a kol středu ^1s, dějící se s rychlostí ^1v, můžeme nahraditi pošinutím v tečně ^1T s rychlostí $^1v = \overline{a\,^1t}$ a otočením tečny této kolem bodu a s rychlostí takovou, při níž bod ^1t se otáčí s rychlostí $^1u = \frac{{}^1v^2}{{}^1\varrho}$.*

Opáčnou konstrukcí lze ze známých rychlostí ^1v a ^1u odvoditi poloměr $^1\varrho$.

Právě takovou konstrukcí, kterou jsme si zjednali rychlost $\overline{^1t\,^1k} = {}^1u$ bodu ^1t, stanovíme i rychlost $\overline{^2t\,^2k} = {}^2u$ bodu ^2t při otáčení tečny ^2T kol bodu a.

Následkem přechodu bodů ^1t a ^2t do poloh ^1k a ^2k přijde i bod t do nové polohy k, kterou obdržíme jakožto vrchol rovnoběžníka $a\,^1k\,k\,^2k$, sestrojeného nad délkami $\overline{a\,^1k}$ a $\overline{a\,^2k}$.

Z rychlosti $\overline{tk}$ bodu t, ve směru obecně šikmém ku tečně T stojící, odvodíme si rychlost $u = \overline{tl}$ $(tl \perp T)$ bodu t při otáčení tečny T kol bodu a na základě rozkladu rychlosti ve složky. Přímka $kl \parallel T$ odetíná v přímce $tl \perp T$ délku $\overline{tl}$, udávající rychlost u bodu t. Na základě rychlosti u a v sestrojíme střed křivosti s křivky A dle vzorce 1. tím, že vedeme $ts \perp al$, kteráž normalu N_A v bodě s protíná. —

Uvedené konstrukce užijeme v následních *dvou zvláštních případech:*

a) Mějme na zřeteli případ, kdy *^1A jest křivkou kruhovou a křivka ^2A přímkou a oba stejnoměrné translační pohyby nechť mají rychlost stejnou* (obr. 6.).

Proto jsou dráhy bodu a při prvém i druhém pohybu translačním stejné. Mezi tím, co proběhne při pohybu prvém bod a celý obvod křivky kruhové ^1A, vykoná týž bod v přímce ^2A dráhu rovnou tomuto obvodu. Když dospěje bod a do polohy $^1a'$, ku př. do $\frac{1}{12}$ celého obvodu křivky ^1A, přijde ^2A do polohy $^2A' \parallel {}^2A$ a mezi tím dospěje bod a do polohy $^2a'$, tak že $\overline{a^2a'} = \overset{\frown}{a^1a'}$ a křivka ^1A zaujme polohu $^1A'$. V bodu průsečném obou křivek $^1A'$ a $^2A'$ dostaneme novou polohu a' bodu a při pohybu výsledném. Tak lze sestrojiti i ostatní body trajektorie A.

Kostrukce tečny a středu křivosti. Užijme dříve uvedené konstrukce a vyjadřeme rychlost $^1v = {}^2v$ délkou poloměru $^1\varrho$ křivky kruhové ^1A. Jak z konstrukce tečny patrno, prochází normala v bodu a křivky A bodem b, ve kterém přímka $B \parallel {}^2A$ křivky kruhové ^1A se dotýká, neboť $\triangle a^1sb \cong \triangle a^1tt$; mimo to jest $\overline{tk} = {}^1\varrho$, a když úhel $ta^1t = ktl$ označíme φ, bude

$$u = \overline{tl} = {}^1v \cos\varphi = {}^1\varrho \cos\varphi.$$

Použijeme-li nyní rovnice 1., obdržíme pro poloměr křivosti:

$$\varrho = \frac{v^2}{{}^1\varrho \cos\varphi}.$$

Poněvadž však v, jak z trojúhelníka $\triangle a'tt$ plyne, rovno jest $2 \,.\, {}^1\varrho \cos\varphi$, obdržíme

$$\varrho = \frac{v^2}{\frac{v}{2}} = 2v,$$

čímž jest určen střed křivosti s v normale N.

Trajektorie A může se však také jiným způsobem vytvořiti; neboť bod a dospěje do polohy a' také tím, že se kružnice ${}^1A$ kolem svého středu otáčí až bod ten do polohy ${}^1a'$ přijde a pak se v přímce ${}^2A'$ po dráze $\overline{{}^1a'a'}$ pošine. Na základě tohoto vytvoření můžeme křivku A pokládati za průmět klinogonalní křivky šroubové, jejíž základní kružnice spadá s kružnicí A a jejíž tečny s průmětnou tvoří týž úhel, jaký s ní určuje směr promítání klinogonalného. Takový klinogonalný průmět jest obecná cykloida, která se vytvoří kotálením kružnice ${}^1A$ po přímce B, a pro jejíž poloměr křivosti známe již nahoře odvozenou hodnotu

$$\varrho = 2 \,.\, ab = 2v.$$

b) Předpokládejme dále týž případ složeného pohybu posouvání, kde však jest *rychlost bodu a v kružnici ${}^1A$ dvojnásobná jeho rychlosti v přímce ${}^2A$ (obr. 7.).*

Použijeme-li i v tomto případě konstrukce tečny a středu křivosti uvedené ve článku 7. a 8., přijdeme, když příslušné úsečky tak jako dříve označíme ku vztahu:

$$\varrho = \frac{v^2}{u}.$$

Také v tomto případě můžeme tento pohyb pokládati za rotaci kol bodu ${}^1s$ a současně pošinutí ve směru přímky ${}^2A$. Můžeme ho tedy nahraditi kotálením a to kotálením jisté s kružnicí ${}^1A$ soustředné kružnice ${}^1B$, jejíž poloměr roven polovině poloměru křivky ${}^1A$, po přímce ${}^2B$, která s přímkou ${}^2A$ jest rovnoběžna. Normala N bodu a prochází bodem b, v kterém kružnice ${}^1B$ se přímky ${}^2B$ dotýká a z konstrukce (obr. 7.) dá se odvoditi, že úsečka $\overline{ab} = v$.

Použijíce nyní známou konstrukci středu křivosti pro křivky kotálení, vztýčíme ku normale $N \equiv ab$ v obr. 8. bodu b kolmici bm a protneme ji spojnicí bodu a se středem ${}^1s$ kružnice ${}^1B$ v bodu m. S tohoto bodu na přímku ${}^1B$ spuštěná kolmice ms protíná normalu N v hledaném středu křivosti.

Z této právě uvedené konstrukce plyne, když ještě kolmici ${}^1sn$ s bodu ${}^1s$ na normalu spustíme:

$$\frac{\overline{as}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{am}}{\overline{a^1s}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{an}}.$$

A poněvadž $\overline{ab} = v$, $\overline{an} = \overline{tl} = u$*), obdržíme pro poloměr křivosti jako dříve:

$$\overline{as} = \frac{v^2}{u}.$$

Z toho vyplývá, že touto konstrukcí docílený střed křivosti s dříve určeným bodem s se shoduje.

9. *Poloměr křivosti* ϱ křivky A můžeme však také v *obecném případě algebraicky odvoditi* a vyjadřiti veličinami ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$, ${}^1v$, ${}^2v$ a úhlem na těchto veličinách závislým, který tvoří tečna ${}^2T$ (obr. 9.) s tečnou T.

Za příčinou zjednodušení předpokládejme, že jednak poloměry křivosti ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ jinak rychlosti ${}^1v$, ${}^2v$ takto souvisejí:

$$\begin{aligned} {}^2\varrho &= \mu \, . \, {}^1\varrho \\ {}^2v &= \nu \, . \, {}^1v. \end{aligned}$$

Vyjádřeme rychlost ${}^1v = \overline{a{}^1t}$ délkou poloměru ${}^1\varrho$; pak jest rychlost ${}^2v = \overline{a{}^2t} = \nu \, . \, {}^1\varrho$.

V rovnoběžníku rychlostí $a{}^1tt{}^2t$ označme úhel ${}^1tat$ písmenou ${}^1\varphi$ a úhel ${}^2tat$ písmenou ${}^2\varphi$. Z konstrukce jest patrno, že ${}^1u = \overline{{}^1t{}^1k} = {}^1\varrho$ a

$${}^2u = \overline{{}^2t{}^2k} = \frac{{}^2v^2}{{}^2\varrho} = \frac{\nu^2 \, . \, {}^1v^2}{\mu \, . \, {}^1\varrho} = \frac{\nu^2 \, . \, {}^1\varrho^2}{\mu \, . \, {}^1\varrho} = \frac{\nu^2 \, . \, {}^1\varrho}{\mu}.$$

Úsečku $\overline{tk}$ (článek 8.) obdržíme také jakožto diagonalu rovnoběžníka $t{}^1k'k{}^2k'$, jehož strany:

$$t{}^1k' \;\#\; {}^1t{}^1k \quad \text{a} \quad \overline{t{}^2k'} = \overline{{}^2t{}^2k}$$

a s ní úhly

$${}^1k'tk = {}^1\varphi, \text{ a } kt{}^2k' = {}^2\varphi.$$

tvoří.

Při určení úsečky $u = \overline{tl}$, promítněme na přímku $tl \perp T$ na místě úhlopříčny tk dvě strany $\overline{t{}^1k'}$ a $\overline{{}^1k'k} = \overline{t{}^2k'}$ rovnoběžníka $t{}^1k'k{}^2k'$.

Následkem toho obdržíme:

---

*) Podmínka tato plyne ze shodnosti trojúhelníků:

$a{}^1sn$ a tkl.

$$u = \overline{tl} = \overline{t^1k'} \cos {}^1\varphi + t^2k' \cos {}^2\varphi = {}^1\varrho \cos {}^1\varphi + \frac{\nu^{2\,1}\varrho}{\mu} \cos {}^2\varphi$$

nebo

$$u = {}^1\varrho \cos {}^1\varphi + {}^2v \cos {}^2\varphi - \left({}^2v \cos {}^2\varphi - \frac{\nu^1\varrho}{\mu} \cos {}^2\varphi\right).$$

Z trojúhelníka at^2t jest zřejmo, že

$${}^1\varrho \cos {}^1\varphi + {}^2v \cos {}^2\varphi = v$$

a proto

$$u = v - \left({}^2v \cos {}^2\varphi - \frac{\nu^2 \,.\, {}^1\varrho}{\mu} \cos {}^2\varphi\right)$$

nebo

$$u = v - {}^1\varrho \cos {}^2\varphi \left(v - \frac{\nu^2}{\mu}\right).$$

Dosadíme-li tuto hodnotu pro u do rovnice (1), obdržíme

$$\varrho = \frac{v^2}{v - {}^1\varrho \cos {}^2\varphi \left(v - \frac{\nu^2}{\mu}\right)},$$

kteroužto rovnici převésti můžeme na tvar:

$$\frac{\varrho}{v} = \frac{1}{1 - \frac{\cos {}^2\varphi}{v} \,.\, \frac{\mu\nu - \nu^2}{\mu} \,.\, {}^1\varrho}$$

nebo konečně

$$\text{(I)} \qquad \frac{v}{\varrho} = 1 - \frac{\cos {}^2\varphi}{v} \,.\, \frac{\mu\nu - \nu^2}{\mu} \,.\, {}^1\varrho.$$

Rovnice tato souhlasí, co se formy týče, s transformovaným vzorcem *Eulerovým**) pro poloměr křivosti trochoid:

$$\text{(II)} \qquad \frac{v}{\varrho} = 1 - \frac{\cos {}^2\varphi}{v} \,.\, \frac{R_1 \,.\, R_2}{R_1 + R_2}.$$

Jak známo značí ve vzorci tomto ϱ poloměr křivosti trochoidy, která se vytvoří kotálením křivky L po křivce K, R_1 a R_2 poloměry křivosti těchto křivek L a K, které jejich bodu

---

*) Professora Eduarda Weyra: *„Strojení středů zakřivení trochoid“*, uveřejněno v *„Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“*, ročník XXIII. pag. 6.

dotyčnému d příslušejí a ${}^2\varphi$ úhel, který normala $N \equiv ad$ trochoidy o délce $\overline{ad} = v$ tvoří se společnou normalou křivek K a L v bodu d.

Můžeme tudíž poloměr křivosti trajektorie A, vytvořené složeným pohybem translačním, určiti jakožto poloměr křivosti křivky kotálení.

Abychom určili dotyčný bod d obou křivek K a L, jichž poloměry křivosti pro tento bod nejsou dosud známy, naneseme na normalu křivky A v bodě a délku $\overline{ad} = v$. A abychom obdrželi jednoduše společnou normalu křivek K a L, která s normalou N úhel ${}^2\varphi$ tvoří, spojíme, jak ze shodnosti trojúhelníků

$$a^1sd \quad \text{a} \quad a^1tt$$

plyne bod d s bodem s.

Abychom také neznámé poloměry R_1 a R_2 křivek K a L určili, použijeme podmínky, že

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mu v - v^2}{\mu}\,{}^1\varrho,$$

z kteréž plyne, když poloměr křivosti R_2 druhým vyjádříme, že

$$\text{(III)} \qquad R_2 = \frac{(\mu v - v^2)\,{}^1\varrho}{\mu R_1 - (\mu v - v^2)\,{}^1\varrho}\,R_1.$$

10. Následující příklady nám poslouží ku objasnění těchto odvozených vzorců:

První příklad. Nechť jsou křivky ${}^1A$ a ${}^2A$ zastoupeny dvěma kružnicemi o stejných poloměrech ${}^1\varrho$ a ${}^2\varrho$ a rychlost ${}^2v$ nechť jest dvojnásobná rychlosti ${}^1v$.

Vyjádříce jako dříve rychlost ${}^1v$ poloměrem ${}^1\varrho$, obdržíme na základě konstrukce uvedené ve článku 7. tečnu T složeným pohybem translačním vytvořené trajektorie A v bodě a (obr. 10.).

Při konstrukci bodu d (člán. 9.) pozorujeme, že bod ${}^1s$ jakožto střed kružnice ${}^1A$ na základě shodnosti trojúhelníků

$$a^1sd \quad \text{a} \quad a^1tt,$$

jichž stejnolehlé strany k sobě kolmo stojí, nalézá se na kružnici ${}^2A_{1s}$, vytvořené středem kružnice ${}^1A$.

Poněvadž strana ${}^1sd$ trojúhelníka $a{}^1sd$ kolmo stojí ku příslušné straně $a^2t \equiv {}^2T$ trojúhelníka a^2tt, stojí také kolmo ku kružnici ${}^2A_{1s}$ a proto jejím středem o prochází. Poněvadž dále však

$$\overline{{}^1sd} = {}^2v = 2 \,.\, {}^1\varrho$$

leží zároveň bod d na kružnici ${}^2A_{1s}$.

Když dle článku 9. pokládáme kružnici ${}^2A_{1s}$ za K, po níž se kružnice L kotálí, pak jest její poloměr $R_1 = - {}^1\varrho$, a druhý poloměr R_2 dle vzorce III., do kterého se zřetelem na tento specialní případ

$$\mu = 1 \quad \text{a} \quad \nu = 2$$

dosadíme, nabude hodnoty $2 \,.\, {}^1\varrho$. Proto má kotálející se kružnice L, která se okamžitě kružnice K dotýká v bodu d svůj střed v bodě ${}^1s$.

Sestrojujíce však středy křivosti v jiných bodech křivky A za týchž podmínek, poznáme, že příslušné k sobě body ${}^1s$ a d budou vždy ležeti na kružnici ${}^2A_{1s}$ a proto kružnice K a L pro všechny body křivky A týmiž kružnicemi budou. Můžeme tudíž *tuto křivku pokládati jakožto vytvořenou kotálením křivky L na kružnici K o polovičním poloměru tuto objímajíc.*

Jak známo, vytvořuje bod a, který se uvnitř se kotálející kružnice L nalézá, *křivku Pascalovou* mající bod dvojný.*)

Sestrojujíce pak střed křivosti této křivky A v bodě a na základě jednoho nebo druhého zákona výtvarného, obdržíme týž bod s. První konstrukce, zakládající se na vytvoření křivky A složenou translací, jest z obr. 10. úplně patrna. Při druhém určení středu křivosti použito známé konstrukce *Eulerovy*: V bodě d kružnice K a L, byla vztýčena ku normale $N \equiv ad$ křivky A kolmice dm, která spojnici bodu a se středem ${}^1s$ kružnice L protíná v bodu m. Přímka, která bod m spojuje se středem o pevného kruhu K protíná normalu N v žádaném středu křivosti s.

Vyjádříce však při konstrukci tečny T rychlost ${}^2v$ poloměrem ${}^1\varrho$, pak obdržíme druhý možný způsob vytvoření**)

---

*) *Dr. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik"*, I. svazek, pag. 152.
**) Tamtéž, pag. 137.

křivky A kotálením jisté kružnice L' po jiné kružnici K', jichž poloměry se tentokráte rovnají polovině poloměru $^1\varrho$ (obr. 10.).

Druhý případ. Křivky ^1A a ^2A jsou opět kružnice a to tenkrát poloměr $^2\varrho = 2 \,.\, ^1\varrho$ a rychlost $^2v = {}^1v$ (obr. 11.).

Abychom určili poloměr křivosti v tomto případě vytvořené křivky na základě druhého názoru, pokračujeme týmž způsobem jako při příkladu prvém. Obdržíme také zde, že táž křivka A dá se vytvořiti dvěma různými páry křivek kruhových. Jeden nebo druhý pár kružnic obdržíme, položíce buď

$$^1v = {}^2v = {}^1\varrho \quad \text{nebo} \quad {}^1v = {}^2v = {}^2\varrho.$$

V prvém případě jest kružnice K jako dříve identickou s kružnicí $^1A_{2s}$, kterou vytvořuje střed ^2s kružnice ^2A při složeném pohybu posouvání a střed kružnice L nalézá se na kružnici $^2A_{1s}$, kterou vytvořuje střed ^1s kružnice ^1A. Proto, jak z obr. 11. patrno, kotálí se kružnice L na stejně velké kružnici K a bod a, nalezající se na kružnici L, vytvořuje, jak známo, *kardioidu.**)

V druhém případě (který není v obr. 11. vyjádřen) vytvoří se křivka A, když na křivce $K \equiv {}^1A_{2s}$ se kotálí dvakrát tak veliká kružnice L' onu kružnici objímajíc.

Obě konstrukce středu křivosti (na základě složeného pohybu posouvání a na základě kotálení křivky L po křivce K), které jsou v obr. 11. vyjádřeny, vedou nás k témuž bodu s jakožto středu křivosti křivky A v bodu a.

11. Konečně povšimneme si *nejobecnějšího případu složeného pohybu posouvání kruhového* a předpokládejme jako dříve

$$^2\varrho = \mu \,.\, {}^1\varrho \text{ a } {}^2v = \nu \,.\, {}^1v.$$

Ony dva různé páry kruhové, jichž kotálením táž křivka A se vytvoří jako složeným pohybem posouvání, obdržíme dle toho, položíme-li buď rychlost $^1v = {}^1\varrho$ (pak také $^2v = \nu \,.\, {}^1\varrho$) nebo $^2v = {}^2\varrho$ $\left(\text{a pak } {}^1v = \frac{^2v}{\nu} = \frac{2\varrho}{\nu} = \frac{\mu\, {}^1\varrho}{\nu}\right)$.

V *prvém případě* (obr. 12.) obdržíme, označíce společný střed kružnic $^2A_{1s}$ a $^1A_{2s}$ písmenou o,*) poloměr R_1 pevné kruž-

*) Tamtéž, pag. 151.

nice K a poloměr R_2, kružnice na ní se kotálející L, následovně:

Jak z obr. 12. patrno, jest poloměr s kružnicemi ${}^2A_{1s}$ a ${}^1A_{2s}$ soustředné kružnice K

$$R_1 = \overline{od} = \overline{{}^1so} - \overline{{}^1sd}.$$

Poněvadž však jest poloměr $\overline{{}^1so}$ kružnice ${}^2A_{1s}$ poloměru ${}^2\varrho$ kružnice ${}^2A$ roven a $\overline{{}^1sd} = {}^2v = \nu \,.\, {}^1\varrho$ (článek 9.) obdržíme

$$R_1 = {}^2\varrho - {}^2v = (\mu - \nu)\,{}^1\varrho.$$

Abychom poloměr R_2 obdrželi, dosadíme tuto hodnotu pro R_1 do vzorce III. (článek 9.) a obdržíme po jednoduché redukci:

$$R_2 = \nu \,.\, {}^1\varrho = {}^2v,$$

z čehož plyne, že střed křivosti kružnice L spadá se středem křivosti ${}^1s$ kružnice ${}^1A$ (obr. 12.).

V tomto případě můžeme tedy složený pohyb posouvání nahraditi kotálením kružnice L (jejíž poloměr se $\nu \,.\, {}^1\varrho$ rovná) po pevné kružnici K [o poloměru $(\mu - \nu)\,{}^1\varrho$]. Poloměr kružnice K nalézá se ve čtvrtém vrcholu o rovnoběžníka $a\,{}^1so\,{}^2s$*) a dotyčný bod d obou kružnic jest na přímce ${}^1so$ určen poměrem:

$$(1)\qquad \frac{\overline{{}^1sd}}{\overline{do}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{{}^2v}{(\mu - \nu)\,{}^1v} = \frac{\nu \,.\, {}^1v}{(\mu - \nu)\,{}^1v} = \frac{\nu}{\mu - \nu}.$$

V *druhém případě*, učiníme-li ${}^2v = {}^2\varrho$, obdržíme poloměry R'_1 a R'_2 druhého páru kružnic K' a L' takto:

$$R'_1 = \overline{d'o} = \overline{{}^2so} - \overline{{}^2sd'}.$$

A poněvadž $\overline{{}^2so} = {}^1\varrho$ jakožto poloměru kružnice ${}^1A_{2s}$, a

$$\overline{{}^2sd'} = {}^1v = \frac{{}^2v}{\nu} = \frac{{}^2\varrho}{\nu} = \frac{\mu \,.\, {}^1\varrho}{\nu},$$

jest $$R_1' = {}^1\varrho - {}^1v = {}^1\varrho - \frac{\mu}{\nu}\,{}^1\varrho = \frac{\nu - \mu}{\nu}\,{}^1\varrho.$$

*) Poloměry $\overline{a\,{}^1s}$, $\overline{a\,{}^2s}$, $\overline{{}^1so}$, $\overline{{}^2so}$ tvoří rovnoběžník $a\,{}^1s$, $o\,{}^2s$.

Abychom obdrželi příslušný poloměr R_2', použijeme vzorce III. a obdržíme, že

$$R_2' = \frac{\mu}{\nu}\, {}^1\varrho = {}^1 v\,,$$

z čehož plyne, že střed kružnice L' spadá se středem kružnice ${}^1A$.

V druhém případě můžeme tedy složený pohyb posouvání nahraditi kotálením kružnice L' o poloměru $R_2' = {}^1v$ po pevné kružnici K', jejíž poloměr $R_1 = \frac{\nu - \mu}{\nu}\, {}^1\varrho$. Střed pevné kružnice nalézá se v bodu o, a dotyčný bod obou kružnic jest určen poměrem:

$$(2)\quad \frac{\overline{{}^2sd'}}{\overline{d'o}} = \frac{R_2'}{R_1'} = \frac{{}^1v}{\frac{\nu - \mu}{\nu}\, {}^1\varrho} = \frac{\frac{\mu\, {}^1\varrho}{\nu}}{\frac{\nu - \mu}{\nu}\, {}^1\varrho} = \frac{\mu}{\nu - \mu} = -\frac{\mu}{\mu - \nu}\,.$$

Z rovnic (1) a (2) tohoto článku plyne dále podmínka:

$$\frac{\overline{{}^1sd}}{\overline{do}} + \frac{\overline{{}^2sd'}}{\overline{d'o}} = \frac{\nu}{\mu - \nu} - \frac{\mu}{\mu - \nu} = -1\,.$$

Na základě těchto výsledků můžeme vysloviti větu:

Každá složeným translačním pohybem kruhovým vytvořená křivka jest křivkou cyklickou, kterou lze také vytvořiti kotálením dvou různých párů kružnic, jejichž pevné kruhy jsou soustředné, vzdálenost tvořícího bodu od středu kotálející se kružnice jest při vytvoření jedním párem kružnic rovna vzdálenosti středů druhého páru; a když $\overline{{}^1sd}$, $\overline{do}$ *značí poloměry jednoho a* $\overline{{}^2sd'}$, $\overline{d'o}$ *poloměry druhého páru, pak existuje vztah*:

$$\frac{\overline{{}^1sd}}{\overline{do}} + \frac{\overline{{}^2sd'}}{\overline{d'o}} = -1.^{*)}$$

Vyjdeme-li však při konstrukci cestou opáčnou přijdeme ku větě druhé:

Každá kotálením dvou různých párů kružnic vytvořená křivka cyklická může býti opsána také složenou translací kruho-

---

*) Tamtéž, pag. 137.

vou; značí-li R_1, R_2 *poloměry jednoho a* R'_1, R'_2 *poloměry druhého páru a* ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ *a* μ, *v týž význam mají jako dříve, pak se vyskytují* (jak z obr. 12. snadno patrno) *vztahy*:

$$ {}^1\varrho = R'_2 - R'_1, \qquad {}^2\varrho = R_2 + R_1; $$
$$ \mu = \frac{R_1 - R_2}{R'_2 - R'_1} \quad \text{a} \quad \nu = \frac{R_2}{R'_2 - R'}. $$

III. Trajektorie průsečíkové při dvou pohybech posouvání.

12. Konstrukce středu křivosti, uvedené ve článku 8., můžeme také užiti *při konstrukci středu křivosti trajektorie průsečíkové, kterou vytvořuje průsečík dvou v různých směrech se posouvajících křivek.*

Tečnu takové křivky průsečíkové sestrojuje *Burmester**) takto:

„Pozorujme průsečík a (obr. 13.) dvou po pevné soustavě ${}^1S$ se pohybujících křivek G, H a předpokládejme, že křivka G náleží k jisté nepromněné soustavě rovinné ^{2}S a křivka H k jiné taktéž nepromněné soustavě rovinné ^{3}S. Náleží-li průsečíku a jakožto bodu křivky G rychlost $\overline{a\,a_v^{2.1}}$ a jakožto bodu křivky H rychlost $\overline{aa_v^{3.1}}$, pak obdržíme rychlost $\overline{aa_v}$ na křivce A se pohybujícího průsečíku a, vedeme-li body $a_v^{2.1}$, $a_v^{3.1}$ respekt. ku tečnám T_G, T_H sestrojeným v bodu a ku křivkám G, H rovnoběžky, které se protínají v koncovém bodu a_v rychlosti $\overline{aa_v}$, udávající zároveň tečnu T_A křivky A."

Abychom také poloměr křivosti křivky A v bodu a určili, uvažme, co představují úsečky $\overline{a_v^{2.1}a_v}$, $\overline{a_v^{3.1}a_v}$ vyskytující se při právě provedené konstrukci tečny T_A.

Jest patrno, že těmito dvěma úsečkami vyjádřeny jsou rychlosti, které náležejí bodům s bodem a spadajícím a respekt. v křivkách G, H se pohybujícím.

Pohybuje-li se však bod a v křivce G rychlostí $\overline{aa_v^G}$ která se rychlosti $\overline{a_v^{2.1}\,a_v}$ rovná (obr. 13.), pak otáčí se zároveň tečna

*) Tamtéž, pag. 52. — Na základě jiného názoru dospívá *Dr. Christian Wiener* ve svém díle „*Lehrbuch der darstellenden Geometrie,*" pag. 170. ku konstrukci tečny.

T_G kolem bodu a. Tuto rotaci můžeme vyjádřiti rychlostí otáčejícího se bodu a_v^G. Tuto rychlost $\overline{a_v^G\, a_{v'}^G}$ obdržíme, spustíme-li dle článku 8. bodem a ku spojnici bodu a_v^G se středem křivosti s_G kolmici $aa_{v'}^G$, která protíná přímku $\overline{a_v^G\, a_{v'}^G} \perp T_G$ v bodu $a_{v'}^G$.

S touto tečnou otáčí se kolem bodu $a_v^{2.1}$ rovnoběžně úsečka $\overline{a_v^{2.1}\, a_v} \mathrel{\#} \overline{aa_v^G}$; proto otáčí se bod a_v rychlostí $\overline{a_v\, a_v^2} \mathrel{\#} \overline{a_v^G\, a_{v'}^G}$.

Zároveň pohybuje se však bod a na křivce H rychlostí $\overline{a\, a_v^H} \mathrel{\#} \overline{a_v^{3.1}\, a_v}$ v tečně T_H, kteráž se zároveň kolem bodu a otáčí. Také tuto rychlost můžeme vyjádřiti rychlostí $\overline{a_v^H\, a_{v'}^H}$ otáčejícího se bodu a_v^H, a obdržíme ji, spustíce bodem a ku přímce $a_v^H\, s_H$ *) kolmici, kteráž protíná přímku $a_v^H\, a_{v'}^H \perp T_H$ v bodu $a_{v'}^H$.

S touto tečnou T_H otáčí se kolem bodu $a_v^{3.1}$ rovnoběžně úsečka $a_v^{3.1}\, a_v$, tak že se bod a_v otáčí také rychlostí $\overline{a_v\, a_v^3} \mathrel{\#} \overline{a_v^H\, a_{v'}^H}$.

Jest tudíž bod a_v podroben dvěma rychlostem $\overline{a_v\, a_v^2}$ a $\overline{a_v\, a_v^3}$ a vedeme-li tak, jak jsme to na počátku tohoto článku učinili při sestrojení tečny T_A, bodem a_v^2 rovnoběžku T'_G ku tečně T_G a bodem a_v^3 rovnoběžku T'_H ku tečně T_H, pak protínají se tyto rovnoběžky v bodě a'_v, který určuje s bodem a_v rychlost $\overline{a_v\, a'_v}$ bodu a_v.

Sestrojíce v bodu a_v kolmici $a_v\, a''_v$ ku tečně T_A a vedouce bodem a'_v s touto tečnou rovnoběžku $a'_v a''_v$, pak obdržíme v úsečce $\overline{a_v a''_v}$ rychlost, kterou nabude bod a_v při otáčení tečny T_A kolem bodu a, a spustíme-li (článek 8.) konečně s bodu a_v na přímku $\overline{a\, a''_v}$ kolmici, protíná tato normalu v žádaném středu křivosti s_A křivky A.

Jakožto *příklad* předpokládejme onen případ, kdy se jistá kružnice stejnoměrně posouvá současně ve dvou různých směrech (obr. 14.).

Při prvé translaci příjde střed o_m pohybující se kružnice v stejných intervallech časových do poloh ${}^1o$, ${}^2o$, ${}^3o$, ... a při druhém pohybu do poloh ${}^1s$, ${}^2s$, ${}^3s$, ... Průsečíky ${}^1a{}^1a'$, ${}^2a{}^2a'$, ${}^3a{}^3a'$, ... těmto polohám středu příslušících kružnic ${}^1G$, ${}^2G$, ${}^3G$, ... a ${}^1H$, ${}^2H$, ${}^3H$, .. tvoří ellipsu A, jak následovně dokážeme:

*) Bod s_H jest střed křivosti křivky H v bodu a.

Každé dva průsečíky ${}^1a{}^1a'$, ${}^2a{}^2a'$, ${}^3a{}^3a'$, ... dvou příslušných poloh kružnice ${}^1G{}^1H$, ${}^2G{}^2H$, ${}^3G{}^3H$... leží v přímce, která kolmo stojí ku spojnici příslušných středů ${}^1o{}^1s$, ${}^2o{}^2s$, ${}^3o{}^3s$.. v jejich rozpolovacím bodě ${}^1m$, ${}^2m$, ${}^3m$, ... Tyto rozpolující body ${}^1m$, ${}^2m$, ${}^3m$, ... tvoří určitou přímku X. Kružnice ${}^0G$, ${}^0H$, které s kružnicí K se ztotožňují, protínají dle toho v bodech ${}^0a$ ${}^0a'$, které se nalézají na přímce Y, kolmé ku přímkám ${}^1o{}^1s$, ${}^2o{}^2s$, ${}^3o{}^3s$, ...

Považujeme-li přímky X, Y za osy šikmé soustavy souřadnic, pak přísluší libovolnému bodu křivky A, ku př. bodu ${}^2a$, souřadnice x a y, které se v následujícím vztahu nalézají:

Jak z konstrukce (obr. 14.) patrno, jest úsečka

$$\overline{{}^2m{}^2s} = \frac{x}{\alpha},$$

když α jakousi konstantu vyjadřuje, a příslušná pořadnice y, jak z pravoúhlého trojúhelníku ${}^2m{}^2s{}^2a$ plyne, jest určena následním vztahem:

$$y^2 = \beta^2 - \frac{x^2}{\alpha^2}$$

nebo

$$\frac{x^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

když konstantní poloměr kružnice G a H označíme písmenou β.

Z formy této odvozené rovnice křivky A jest patrno, že křivka tato jest *ellipsou*, jejíž dva průměry spadají s přímkami X a Y a délky $2\alpha\beta$ a 2β mají.

Konstrukce tečny a středu křivosti křivky A jest provedena (obr. 15.) pro bod $a \equiv {}^3a$ *).

Abychom tečnu T_A sestrojili, předpokládejme, že rychlosti $\overline{aa^{2,1}_v}$, $\overline{aa^{3,1}_v}$ respekt. křivek G, H vyjadřeny jsou úsečkami $\overline{{}^0m{}^2o}$, $\overline{{}^0m{}^2s}$ a veďme body $a^{2,1}_v$, $a^{3,1}_v$ rovnoběžky $a^{2,1}_v a_v$, $a^{3,1}_v a_v$ respekt. ku tečnám T_G, T_H. Tyto rovnoběžky protínají se v bodě a_v, který s bodem a vyjadřuje rychlost $\overline{aa_v}$ průsečíku a a tečnu T_A určuje.

*) Tento bod jest určen jakožto průsečík dvou příslušných křivek $G \equiv {}^3G$ a $H \equiv {}^3H$, jichž středy body $o_G \equiv {}^3o$, a $o_H \equiv {}^3s$ jsou.

Sestrojujíce střed křivosti křivky A (obr. 15.), naneseme úsečku $\overline{a^{2.1}_{v}a_a}$ od bodu a na tečnu T_G v témže směru. V dosaženém bodě a^G_v vztýčíme na tečnu T_G kolmici $a^G_v a^G_{v'}$, a spustíme s bodu a ku přímce $o_G a^G_v$ kolmici, která protíná přímku $a^G_v a^G_{v'}$ v bodě $a^G_{v'}$. Od bodu a_v naneseme pak úsečku $\overline{a_v a^2_v} \# \overline{a^G_v a^G_{v'}}$. Stejným způsobem sestrojíme také bod a^3_v, učiníce $\overline{aa^H_v} = \overline{a^{3.1}_v a_v}$, sestrojíce $a^H_v a^H_{v'} \perp T_H$ a $aa^H_{v'} \perp s_H a^H_v$. Učiníme-li pak $\overline{a_v a^3_v} \# \overline{a^H_v a^H_{v'}}$, obdržíme bod a^3_v.

Sestrojíme-li dále body a^2_v, a^3_v rovnoběžky T'_G, T'_H respekt. ku tečnám T_G, T_H protínají se ony přímky v bodě a'_v, kterýž s bodem a_v rychlost $\overline{a_v a'_v}$ tohoto bodu určuje. Vztýčíce nyní v bodě a_v kolmici $a_v a''_v$ ku tečně T_A a vedouce bodem a'_v s touto tečnou rovnoběžku $a'_v a''_v$, obdržíme v úsečce $\overline{a_v a''_v}$ rychlost, kterou obdrží bod a_v při otáčení tečny T_A kolem bodu a. Přímka $a_v s_A \perp aa''_v$ protíná pak normalu N_A v hledaném středu křivosti s_A křivky elliptické A.

Zároveň jest patrno, že můžeme pokládati křivku elliptickou A pohybem průsečíku a vytvořenou za průmět klinogonalný křivky průsečné dvou šikmých ploch válcových, kteréž mají v průmětně společnou kružnici základní.

13. *Konstrukce středu křivosti trajektorie, kterou vytvořuje průsečík dvou v různých drahách křivých se posouvajících křivek.*

Pozorujme průsečík a dvou po jisté pevné rovině ^1S se posouvajících křivek G, H a předpokládejme, že tyto křivky přísluší respekt. dvěma v křivkách K, L se pohybujících nepromĕnným rovinným soustavám ^2S, ^3S.

Když bodu a jakožto bodu křivky G přísluší rychlost $\overline{aa^{2.1}_v}$ (obr. 16.) v tečně T_K křivky K a jakožto bodu křivky H rychlost $\overline{aa^{3.1}_v}$ v tečně T_L křivky L, pak obdržíme rychlost $\overline{aa_v}$ bodu po křivce A se pohybujícího, když jako v případě předcházejícím (článek 12.) body $a^{2.1}_v$, $a^{3.1}_v$ vedeme rovnoběžky $\overline{a^{2.1}_v a_v}$, $\overline{a^{3.1}_v a_v}$ respekt. ku tečnám T_G, T_H; tyto rovnoběžky protínají se v koncovém bodě a_v rychlosti $\overline{aa_v}$, která zároveň jest tečnou T_A vytvořené trajektorie A.

Střed křivosti křivky A, sestrojíme jako dříve se zřetelem ku rychlostem $\overline{a^{2.1}_v a_v}$, $\overline{a^{3.1}_v a_v}$, jakými se bod a respekt.

v křivkách G, H pohybuje, a ku středům křivosti s_G, s_H křivek těchto pomocí bodů a_v^2, a_v^3.

Poněvadž se křivky G, H neposouvají jako dříve v dráhách přímých, nýbrž respekt. v křivkách K, L, budou se při tomto pohybu tečny T_K, T_L a tudíž i body $a_v^{2.1}$, $a_v^{3.1}$ kolem bodů a otáčeti.

Rychlost $\overline{a_v^{2.1} a_K}$, s kterou se při otáčení tečny T_K kol bodu a bod $a_v^{2.1}$ pohybuje, obdržíme, když s bodu a spustíme na spojnici středu křivosti s_K křivky K s bodem $a_v^{2.1}$ kolmici aa_K, kteráž přímku kolmo v bodě $a_v^{2.1}$ na tečnu T_K vztýčenou protíná v bodě a_K.

Když tuto konstrukci pro bod $a_v^{2.1}$ se zřetelem ku středu křivosti s_L křivky L opakujeme, obdržíme, spustíce s bodu a na spojnici středu křivosti s_L s bodem $a_v^{3.1}$ kolmici aa_L, v přímce $a_v^{3.1} a_L \perp T_L$ rychlost $\overline{a_v^{3.1} a_L}$ bodu $\overline{a_v^{3.1}}$.

První z těchto posledně stanovených dvou rychlostí $\overline{a_v^{2.1} a_K}$ bude míti za následek, že se bod a_v^2 posouvne do polohy a'_K, tak že $\overline{a_v^2 a'_K} \# \overline{a_v^{2.1} a_K}$, druhá pak rychlost $\overline{a_v^{3.1} a_L}$, že se bod a_v^3 pošine do polohy a'_L, tak že $\overline{a_v^3 a'_L} \# \overline{a_v^{3.1} a_L}$. Vedeme-li takto docílenými body a'_K, a'_L respekt. rovnoběžky T'_G, T'_H ku tečnám T_G, T_H, pak obdržíme v jejich průsečíku bod a'_v, který s bodem a_v určuje rychlost tohoto bodu. Vztýčíme-li dále v bodu a_v kolmici $a_v a''_v$ ku tečně T_A a vedeme-li bodem a'_v rovnoběžku $a'_v a''_v$ ku této tečně, pak obdržíme bod a''_v. Spustíme-li konečně bodem a_v na přímku aa''_v kolmici $a_v s_A$, pak protíná tato přímka normalu N_A v hledaném středu křivosti s_A křivky A.

Tato konstrukce má také úplnou platnost i v tom zvláštním případě, kdy křivka $K \equiv H$ a zároveň křivka $L \equiv G$, když tedy křivka G se v křivce H a křivka H v křivce G posouvá a pohyb takový za složený pohyb translační považovati můžeme. Konstrukce se v tomto zvláštním případu značně zjednoduší a bude s onou pro týž případ ve článku 8. uvedenou úplně souhlasiti.

Zároveň jest patrno, že křivku A můžeme pokládati za orthogonálný průmět průsečnice dvou ploch posouvání, které jsou vytvořeny dvěma rovinnými křivkami G, H, jichž roviny s průmětnou rovnoběžny jsou, a které se posouvají po dvou ku této rovině kolmých křivkách šroubových, jichž základními křivkami jsou křivky K, L.

Pomocí uvedené konstrukce tečny a poloměru křivosti, můžeme pak sestrojiti rovinu křivosti průsečnice obou ploch posouvání jakož i středu křivosti této křivky.

Jakožto *příklad* uvedeme následní zvláštní případ:

Kružnice ${}^0G \equiv {}^0H$ posouvá se současně ve dvou různých kružnicích, tak že jeho střed $s_G \equiv s_H$ stejně veliké kruhové trajektorie Ks_G, Ls_H (obr. 17.), v tomto bodě se dotýkající, stejnoměrně probíhá. Rychlosti, kterými se kružnice G a H posouvají, nechť jsou v poměru 1 : 2.

Na základě tohoto výtvarného zákona sestrojíme snadno trajektorii A průsečíku a křivek G, H. Konstrukce tečny a poloměru křivosti provedena v obr. 17. pro průsečík a. Především byly sestrojeny bodu a příslušící a respekt. s křivkami Ks_G. Ls_H shodné dráhy kruhové K, L, pak byla zvolena rychlost $\overline{aa_v^{2.1}}$ v tečně T_K, rychlost $\overline{aa_v^{3.1}}$ v tečně T_L učiněna dle podmínky rovna $\frac{1}{2}\,\overline{aa_v^{2.1}}$.

Abychom tečnu T_A sestrojili, sestrojíme body $a_v^{2.1}$, $a_v^{3.1}$ respekt. ku tečnám T_K, T_L rovnoběžky $\overline{a_v^{2.1}a_v}$, $\overline{a_v^{3.1}a_v}$, které se v bodě a_v protínají. Tento bod a_v určuje s bodem a rychlost $\overline{aa_v}$ bodu a jakož i tečnu T_A křivka A.

Dále sestrojíme body a_v^2, a_v^3 se zřetelem na rychlosti $\overline{a_v^{2.1}a_v}$, $\overline{a_v^{3.1}a_v}$, kterými se bod a pohybuje respekt. v křivkách G, H a na středy křivosti s_G, s_H těchto křivek a odvodíme dále rychlosti $\overline{a_v^{2.1}a_K}$ a $\overline{a_v^{3.1}a_L}$ na základě dříve uvedených konstrukcí. Sestrojíce na základě těchto určených rychlostí body a'_K, a'_L, obdržíme pomocí přímek těmito body respekt. vedených $T'_G \parallel T_G$, $T'_H \parallel T_H$ bod a'_v. Vztýčíme-li dále v bodě a_v kolmici $a_v a''_v$ ku tečně T_A a vedeme bodem a'_v rovnoběžku $a'_v a''_v$ k této tečně, pak obdržíme bod a''_v, a jest-li konečně z bodu a_v spustíme na přímku aa''_v kolmici $a_v s_A$, obdržíme v průsečíku této přímky s normalou N_A žádaný střed křivosti křivky A.

(Dokončení).

O soustavách orthogonálných ploch.

Napsal

Eduard Weyr.

(Dokončení.)

3. Krásný theorem *Dupinův*, že se plochy tří orthogonalných soustav protínají ve svých křivoznačných čarách, lze utvořením differencialné rovnice těchto čar a přímou její integrací následujícím způsobem dokázati.

Buďte soustavy orthogonalné dány rovnicemi (1); označme literou G matici $\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}$ a připomeňme, že applikací této matice na soustavu dx, dy, dz patrně obdržíme soustavu $d\varrho$, $d\mu$, $d\nu$, t. j. že

$$G(dx, dy, dz) = (d\varrho, d\mu, d\nu),$$

a že tedy

$$(6) \qquad (dx, dy, dz) = G^{-1}(d\varrho, d\mu, d\nu).$$

Avšak z rovnosti

$$\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\left[\frac{\partial(\varrho, \nu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\right] = \left\{\begin{matrix} P^2, & 0, & 0 \\ 0, & M^2, & 0 \\ 0, & 0, & N^2 \end{matrix}\right\}$$

přímo vychází rovnost

$$\left\{\begin{matrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \varrho_1 P^{-2}, & \mu_1 M^{-2}, & \nu_1 N^{-2} \\ \varrho_2 P^{-2}, & \mu_2 M^{-2}, & \nu_2 N^{-2} \\ \varrho_3 P^{-2}, & \mu_3 N^{-2}, & \nu_3 N^{-2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\},$$