Václav A. Hruška

Lineární interpolace v logaritmických tabulkách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 1, R1--R6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123310

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ROZHLEDY

Lineární interpolace v logaritmických tabulkách.

Václav Hruška.

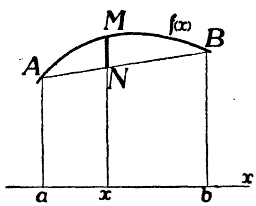
Při lineární interpolaci nahrazujeme funkci $f(x)$ mezi a a $a + h$ lineární funkcí

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x - a}{h}\,[f(a + h) - f(a)], \tag{1}$$

která pro argumenty a a $a + h$ nabývá stejných hodnot jako interpolovaná funkce $f(x)$. Geometricky značí lineární interpolace nahrazení křivky $y = f(x)$ mezi body $A\,[a, f(a)]$, $B\,[a + h, f(a + h)]$ přímkou

$$y = f(a) + \frac{x - a}{h}\,[f(a + h) - f(a)], \tag{2}$$

která prochází body A a B (obr. 1). Výsledek docílený lineární interpolací



Obr. 1.

(v obr. 1 $\overline{xN}$) liší se od přesné hodnoty funkce $f(x)$ $(= \overline{xM})$ o délku $\overline{NM} = z(x)$, kterou nazýváme zbytkem interpolace, takže přesně jest

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{h}\,[f(a + h) - f(a)] + z(x). \tag{3}$$

Zbytek $z(x)$ jest funkcí x, která se rovná nule pro $x = a$ a pro $x = a + h$, pročež ji položme

$$z(x) = (x - a)\,(x - a - h)\,.\,\mu(x). \tag{4}$$

Abychom určili neznámou funkci $\mu(x)$, předpokládejme, že interpolovaná funkce je spojitá a má prvou a druhou derivaci v oboru

$$a \leqq x \leqq a + h. \tag{5}$$

Uvažujme funkci argumentu t

$$f(t) - f(a) - \frac{t - a}{h}[f(a + h) - f(a)] - (t - a)(t - a - h)\,\mu(x), \tag{6}$$

která se rovná nule pro $t = a$, $t = a + h$ a vzhledem k (3) a (4) také ještě pro $t = x$. Podle věty ROLLEOVY[1]) má tedy její prvá derivace uvnitř oboru (5) dva kořeny a její druhá derivace jeden kořen

$$t = \xi, \qquad a < \xi < a + h.$$

Dosadíme-li jej do druhé derivace funkce (6), obdržíme

$$0 = f''(\xi) - 2!\,\mu(x), \text{ čili } \mu(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi),\ a < \xi < a + h,$$

takže konečně jest

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{h}[f(a + h) - f(a)] + \frac{(x - a)(x - a - h)}{2!} f''(\xi), \tag{7}$$

$$a < \xi < a + h.$$

Při skutečném lineárním interpolování obyčejně dáváme vzorcům (1) a (7) jiný tvar. Označme poměrnou část $\overline{ax}$ kroku h písmenou

$$n = \frac{x - a}{h}, \text{ takže } x = a + nh,\ 0 < n < 1. \tag{8}$$

Dále rozdíl dvou v tabulce po sobě jdoucích hodnot funkce nazveme tabulkovou diferencí

$$f(a + h) - f(a) = \Delta. \tag{9}$$

Užitím tohoto označení přejde (1) v obvyklý tvar

$$f(x) = f(a + nh) \approx f(a) + n\,.\,\Delta. \tag{10}$$

Pro zjednodušení výpočtu bývá po straně tabulky uvedena pomocná tabulka hodnot $n\,.\,\Delta$, obyčejně od $n = 0{,}0$ do $n = 1{,}0$, která se nazývá partes proportionales (= poměrné části — rozuměj diference Δ) a pro niž se běžně užívá označení P. P. Zbytek pak nabude tvaru

$$z(x) = \frac{n(n - 1)}{2} h^2 f''(a + \Theta h),\ \ 0 < \Theta < 1, \tag{11}$$

takže přesně jest

$$f(x) = f(a + nh) = f(a) + n\Delta + \frac{n(n - 1)}{2} h^2 f''(a + \Theta h),\ 0 < \Theta < 1. \tag{12}$$

---

[1]) M. Kössler: Úvod do počtu diferenciálního, str. 82. (1926. 8° 147 str. 16 obr. brož. Kč 18,70 v knihkupectví JČMF.)

Z formule (11) pro zbytek můžeme určiti největší dovolený krok h tabulky, aby v ní bylo možno ještě lineárně interpolovati. Abychom se nedopouštěli přílišné nepřesnosti při interpolaci, žádáme obyčejně, aby

$$|z(x)| < 0{,}1 \times 10^{-k}, \tag{13}$$

tabelujeme-li hodnoty funkce na k míst desetinných. Avšak

$$\text{Max}\,|n\,(n-1)| = \tfrac{1}{4} \quad (\text{pro } n = \tfrac{1}{2}),$$

takže jest stále

$$|z(x)| \leqq \tfrac{1}{8}h^2 \,.\, \text{Max}\,|f''(a + \Theta h)|\,, \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1. \tag{14}$$

Abychom vyhověli nerovnici (13), stačí voliti

$$h < \sqrt{\frac{8 \times 10^{-k-1}}{\text{Max}\,|f''(a+\Theta h)|}}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1. \tag{15}$$

Tak na příklad při lineární interpolaci v logaritmických tabulkách jest

$$f(x) = \text{Log}\,x, \qquad f'(x) = \frac{0{,}434\ldots}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{0{,}434\ldots}{x^2},$$

$$\text{Max}\,|f''(a+\Theta h)| = \text{Max}\,\frac{0{,}434\ldots}{(a+\Theta h)^2} = \frac{0{,}434\ldots}{a^2}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1.$$

Plyne tudíž z (15)

$$h < 1{,}36 \,.\, a \,.\, 10^{-\frac{1}{2}k}. \tag{16}$$

V logaritmických tabulkách užíváme zásadně kroku $h = 1$, z (16) tudíž plyne naopak rozsah tabulek o k deset. místech

$$0{,}74 \times 10^{\frac{1}{2}k} < a. \tag{17}$$

Chceme-li užíti lineární interpolace o zbytku $|z(x)| < 0{,}1$ jednotky posledního místa v tabulce dekadických logaritmů, musíme podle (17) tabelovati v tabulkách:

3místných ($k = 3$) čísla $a > 24$ 4místných ($k = 4$) čísla $a > 74$	vyhovíme tomu tabelováním logaritmů čísel 100 až 1000
5místných ($k = 5$) čísla $a > 234$ 6místných ($k = 6$) čísla $a > 740$	t. j. 1000 až 10 000 [2])
7místných ($k = 7$) čísla $a > 2331$ 8místných ($k = 8$) čísla $a > 7400$	10 000 až 100 000 [3])

[2]) Výjimkou šestimístné tabulky bývají v rozsahu 10 000 až 100 000. Důvody toho však jsou spíše typografické. Při rozsahu 1 000 až 10 000 by se diference měnily tak rychle, že by nebylo po straně místa pro veškeré P. P., které by bylo nutno uvésti v tabulce zvláštní.

[3]) Rozsah tabulek 7-mi místných bývá 10 000 až 108 000 a nikoliv pouze až do 100 000 (na př. SCHRÖNOVY,), aby bylo možno z nich bez interpolace počítati Log sin x a Log tg x malých úhlů, daných až na 0″1 přesně do $3^0 = 3 \times 3600''0 = 10\,800''0$, užitím pomocných funkcí $S(x)$ a $T(x)$

10místných ($k = 10$) čísla $a > 74\,000$

13místných ($k = 13$) čísla $a > 2\,331\,000$ atd.

V 10 místných tabulkách by při užití lineární interpolace bylo nutno tabelovati logaritmy 900 000 čísel šestimístných od 10^5 do 10^6, čímž by se tabulky staly příliš drahé a těžkopádné.[4]) Naproti tomu, uvedeme-li v nich mantisy logaritmů čísel pouze pětimístných ($a \geqq 10^4$), může zbytek podle (11) dosáhnouti až

$$| z(x) | = \frac{0{,}434\ldots}{8 \times 10^8} = 5{,}4\ldots \times 10^{-10},$$

t. j. více než 5 jednotek posledního místa. V takových tabulkách by ovšem byla nepřípustná lineární interpolace a bylo by nutno užíti interpolace kvadratické.

Nesnáz lze však někdy obejíti t. zv. lineární interpolací s opravou (korekcí). Zbytek lineární interpolace v 10-ti místné tabulce mantis logaritmů čísel od 10^4 do 10^5 jest

$$z(x) = -\frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{0{,}434\ldots}{(a+\Theta)^2}, \qquad 0 < \Theta < 1, \quad a \geqq 10^4$$

a pro totéž n se nemění v 10. ani 11. místě desetinném v značně dlouhých úsecích tabulky. Tak na příklad obnáší

$$\begin{aligned} \text{Max}\, | z(x) | &= 5{,}426\ldots \times 10^{-10} \text{ pro } a = 10\,000 \\ \text{Max}\, | z(x) | &= 5{,}35\ \ldots \times 10^{-10} \text{ pro } a \geqq 10\,071 \\ \text{Max}\, | z(x) | &= 5{,}25\ \ldots \times 10^{-10} \text{ pro } a \geqq 10\,166 \text{ atd.} \end{aligned}$$

Jelikož Max $| n\,(n-1) | = \frac{1}{4}$, můžeme tedy pro $10\,071 \leqq a \leqq 10\,166$ klásti na 11 míst desetinných zaokrouhleně s opravou

$$z(x) = -n\,(n-1) \times 4 \times 5{,}3 \times 10^{-10} = -n\,(n-1) \times 21{,}2 \times 10^{-10}, \quad (18)$$

a o tuto hodnotu opraviti výsledek obyčejné lineární interpolace v tabulce. Proto si sestavme opravy (korekce) (18) pro různé hodnoty fáze n v pomocnou tabulku, kterou umístíme nejlépe na okraji tabulky logaritmů a z níž béřeme opravy přímo, bez výpočtu (tab.).[5]) Krok této pomocné

---

podle odst. 21, příklad 2. Ze stejného důvodu jest v tabulkách M. Valouch M. A. Valouchových rozšířen jejich rozsah až do 120 000. Jelikož pak část tabulky od 10 000 do 12 000 jest zbytečná (mantisy logaritmů těchto čísel jsou obsaženy v části od 100 000 do 120 000!!), byla vynechána a místo ní dány právě mantisy logaritmů čísel 100 000 až 120 000. Můžeme se proto také na ni dívati jako na tabulku mantis logaritmů čísel od 10 000 do 100 000 o kroku $h = 0{,}1$ od 10 000 do 12 000 a o kroku $h = 1$ od 12 000 do 100 000. Docílíme tím podstatného zmenšení diferencí v části o kroku $h = 0{,}1$ a tedy větší přesnosti a pohodlnosti výpočtů.

[4]) Bylo by k tomu potřebí asi 6 000 stran kvartového formátu! Na stránku se totiž vejdou asi 3 sloupce po 50 mantisách.

[5]) Jelikož se diference Δ mění pak příliš rychle, vynecháváme zpravidla tabulku P. P., užíváme-li pomocné tabulky oprav C.

tabulky bude v našem případě patrně stačiti 0,05, aby zbytek při lineární interpolaci v ní nepřesáhl $0{,}053 \times 10^{-10}$. Tabulka ostatně vypadne velmi malá, jelikož hodnota funkce (18) pro n a $(1 - n)$ jest stejná, takže ji stačí tabelovati pouze od $n = 0{,}00$ do $n = 0{,}50$.

Tabulka.

N	Log N	Δ
10 100	004 3213 738	
		429 973
101	3643 711	
		429 931
102	4073 642	
		429 888
103	4503 530	
		429 845
104	4933 375	
		....
10 105	004 5363 179	

n	C	n
	+	
0,00	0,0	1,00
0,05	1,0	0,95
.....	.....	.....
0,35	4,8	0,65
0,40	5,2	0,60
.....	.....	.....
0,50	5,4	0,50

Tak na příklad, abychom vypočetli Log 10,102 3728, vezměme z takto zařízených tabulek (tab.):

Log 10,102	=	1, 004 4073 642	
P. P.	+	160 262 2	$(= 429\,888 \times 0{,}3728)$
C.	+	5 0	(= korekce pro $n = 0{,}37$)
Log 10,102 3728	=	1, 004 4233 909	

Stejným způsobem jsou zařízeny KŘOVÁKOVY Číselné sedmimístné tabulky trigonometrických funkcí,[6]) čímž bylo možno krok tabulky zvýšiti dokonce na $3'$ a celé tabulky sin x, cos x a tg x od 0^0 do 45^0 dostati na pouhých 19 stran!

Tabulková nepřesnost lineární interpolace vzniká tím, že hodnoty funkce uvedené v tabulce jsou dekadické aproximace zkrácené s opravou, tedy o nepřesnosti až $\frac{1}{2}$ jednotky posledního místa. Jsou-li f_0 a f_1 v tabulce uvedené aproximace, $f_0 + \varepsilon_0$ a $f_1 + \varepsilon_1$ hodnoty přesné, rovná se tato tabulková nepřesnost lineární interpolace

$$\varepsilon_0 + n\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) = (1 - n)\,\varepsilon_0 + n\varepsilon_1.$$

Dosahuje maxima 0,5 jednotky posledního místa pro $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Je-li krok tabulky tak malý, že zbytek jest $\leqq 0{,}1$ jednotky posledního místa, obdržíme lineární interpolací výsledky přesně na 0,6 jednotky posled-

[6]) 1925. 4^0 19 str. brož. Kč 12,— v knihkupectví ČJMF.

ního místa. K tomu však ještě přistupuje nepřesnost až 0,5 jednotky ze zkrácení výsledku lineární interpolace s opravou, celkem tudíž nepřesnost až 1,1 jednotky posledního místa.

Tabulky logaritmů více než 10místných by vypadly příliš rozsáhlé i při užívání lineární interpolace s opravou. Jest je proto zaříditi na interpolaci řádu vyššího, na př. v THOMPSONOVÝCH 20místných logaritmech se užívá interpolace t. zv. formulí EVERETTOVOU až s diferencemi 4. řádu. Vyžaduje to však opět značně větší práce, zvláště při výpočtu argumentu. Řád této interpolace a práci s výpočtem spojenou možno ostatně značně zredukovati rozkladem logaritmovaného čísla na součin.

Podrobný výklad toho a další interpolace najde čtenář v knize LÁSKA-HRUŠKA: Počet numerický, vydala JČMF 1934. 8^0 IV, 496 stran, 42 obr., 7 tab., váz. Kč 112,—.

O jistém vytvoření elipsy.

Dr. *Karel Hruša.*

P. řed. Kaufmann odvodil ve svém článku „Konstrukce elipsy ze sdružených průměrů“ v 2. čísle „Rozhledů“ roč. 10., zajímavou mechanickou konstrukci elipsy, jež je dána dvěma sdruženými průměry. Chci v dalším upozorniti na jiné již známé, mechanické vytvoření poněkud obecnější, z něhož vyplyne tato konstrukce jako speciální případ.

Je dána kružnice k o poloměru $OA = 2r$, jíž se uvnitř dotýká kružnice l o poloměru polovičním $SA = r$ (obr. 1); prochází tedy kružnice l středem O kružnice k. Valí-li se kružnice l po kružnici k, opisuje její střed S kružnici m soustřednou s kružnicí k o poloměru $OS = r$. Libovolný bod B na obvodě kružnice l se pohybuje po průměru CD kružnice k.

Důkaz: Označíme-li $\sphericalangle AOB = \varphi$, pak je $\sphericalangle ASB = 2\varphi$ a $\widehat{AC} = 2r \operatorname{arc} \varphi$, $\widehat{AB} = r \operatorname{arc} 2\varphi = 2r \operatorname{arc} \varphi = \widehat{AC}$. Oba oblouky se sobě rovnají. Dostane-li se kružnice l do takové polohy, že se dotýká kružnice k v bodě C, padne bod B právě do C. To platí pro každé φ. Při jiné poloze kružnice l padne bod B do jiného bodu průměru CD, ale vždy $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, takže je vždy možno převést valením kružnice l po kružnici k bod B do C. Dráha bodu B je tedy skutečně průměr CD. Také kterýkoli jiný bod na obvodu kružnice l opíše při uvažovaném pohybu průměr kružnice k.

Jakou dráhu opíše libovolně zvolený bod P pevně spojený s kružnicí l? Spojíme-li bod P s bodem S, protne jejich spojnice kružnici l v bodech E, F. Tyto dva body jsou na obvodu kružnice l a podle dříve dokázaného se pohybují po průměrech $OE \equiv u$,