Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 1, R24--R28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123305

v atomu však nejsou deterministické a kausální, do jisté míry jsou vůbec nepřístupné našemu názoru a vymykají se pozorovatelnosti. Reakce *v živé hmotě* mají patrně ještě vyšší stupeň »nepozorovatelnosti«, než jak jej známe z fysiky atomů.*) Sestrojiti umělého člověka je proto nemožné. Ve světě atomů se děje, které prožívají jednotlivé atomy, aspoň na venek skládají a překrývají tak, že ve světě viditelném, v makrokosmu, jeví se příčinnost. *Ve hmotě živé* i na venek není příčinnosti, zde není ani zdánlivého determinismu.

Fysik se musí především omluviti, že dotýká se *otázek filosofie, psychologie a fysiologie* — revoluční ráz moderních fysikálních názorů vskutku však může míti velký vliv i za hranicemi samotné fysiky. Na druhé straně, i když fysika rozřeší otázku podstaty »mrtvé« hmoty a jednou bude možno libovolně měniti jeden prvek v druhý, není tím ještě řečeno: také otázku »*živé hmoty*« rozluští jednou fysika atomů. Zde jsme omezeni, jak svrchu uvedeno, hranicemi příčinnosti ve světě atomů a hranicemi pozorovatelnosti, které jsou nepřekročitelné. Nelze také vyvrátiti mínění, že hranice mezi hmotou mrtvou a živou je v běžném slova smyslu prostě nepochopitelná, protože »člověk je nejen divák, ale také účastník koloběhu života« — jak nás poučuje stará a jednoduchá pravda. Dr. *Vilém Santholzer.*

ÚLOHY.

Z matematiky.

1. Odvěsnami a a b pravoúhlého trojúhelníka vyjádřete vzdálenost paty výšky v_c od těžnice t_c! Prof. *V. Charfreitag.*

2. Sestrojte pouhým kružítkem průsečík dvou přímek, z nichž každá je dána dvěma body! Dr. *V. Knichal.*

3. V obdélníku jsou dány poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům, které jsou vymezeny stranou a úhlopříčkami; určete strany a úhel úhlopříček! (Na př. $r_1 = 25$, $r_2 = 18{,}75$.) Dr. *Č. Kohlmann.*

4. Dokažte pro malé b přibližný vzorec:

$$\sqrt[5]{a^5 + b} \doteq \frac{1}{2}\, a + \sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a}} - \frac{a^2}{4}}.$$

Prof. *K. Lerl.*

5. Sestrojte kružnici, je-li dán pól P, polára p a kružnice k', kterou ortogonálně protíná. Prof. *St. Liška.*

---

*) Viz Jordan, Naturwissenschaften 1932, str. 815.

6. Sečtěte řadu:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots \text{ in inf.}$$

Z. Pírko.

7. Kolik tělesných úhlopříček má pravidelný mnohostěn, pro nějž platí $\operatorname{tg} \omega = -2$? ($\omega$ je úhel sousedních stěn.) Prof. *St. Plicka.*

8. Dokažte, že úhel tětiv dvou kružnic, které se promítají ze společného bodu obou kružnic týmiž dvěma paprsky, je roven úhlu daných kružnic! *a*) Jakou větu obdržíme, když obě sečny splynou? *b*) Jedna sečna budiž pevná a druhá ať se mění. Co je geometrickým místem průsečíků prodloužených tětiv? *Pospíšil.*

9. Jest řešiti rovnici:

$$x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45 = 0,$$

je-li známo, že její kořeny tvoří aritmetickou řadu! Prof. *St. Teplý.*

10. Ukažte, že úloha: sestrojiti trojúhelník, určený vzdálenostmi středu opsané kružnice od stran, vede na rovnici 3. stupně! Kdy má úloha jen dvě řešení? *V.*

Poznámka. Při řešení úloh 1—10 musí býti použito pouze látky probírané v V. a VI. tř. středních škol v matematice resp. deskriptivní geometrii.

11. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x(y+z) &= a^2 \\ z^2 + x^2 - y(z+x) &= b^2 \\ x^2 + y^2 - z(x+y) &= c^2. \end{aligned}$$

Řed. *Al. Bezloja.*

12. Jest řešiti ostroúhlý trojúhelník, dáno-li a, α a má-li býti maximální rozdíl obsahů pravoúhlých trojúhelníků vzniklých výškou v_a. (Na př. $a = 8$, $\alpha = 71^0\,33'\,54''$.) Dr. *Jar. Bílek.*

13. Kružnice opsaná z pevného bodu $P(m, n)$ proměnlivým poloměrem r protíná hyperbolu $xy = \frac{1}{2}a^2$ v bodech A, B, C, D. Co je geometrickým místem průsečíků sečen AB, CD? Prof. *J. Dvořák* (Písek).

14. Dokažte, že součet dvou fokálních tětiv elipsy, rovnoběžných s dvěma sdruženými průměry, je konstantní. *Týž.*

15. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4\,.\,(x^3 + y^3) &= 9\,.\,\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \\ 4\,.\,(x^3 + z^3) &= 65\,.\,\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \\ 4\,.\,(y^3 + z^3) &= 72\ \sqrt[3]{x^2y^2z^2}. \end{aligned}$$

Dr. *Č. Kohlmann.*

16. Pro obsah O a úhel ω úhlopříček dvojstředového čtyřúhelníka platí vzorce:

$$a)\ O = 2\varrho^2 \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta},$$

$$b)\ \sin\omega = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{1 + \sin\alpha\sin\beta}.$$

(α, β dva sousední úhly, ϱ poloměr kružnice opsané.) Dokažte!

Dr. *K. Koutský.*

17. Bodem J, ležícím uvnitř daného trojúhelníka, jsou vedeny tři příčky rovnoběžně se stranami. Jsou-li O_1, O_2, O_3 obsahy trojúhelníků, z nichž každý je uvnitř daného trojúhelníka omezen dvěma příčkami a stranou, a O obsah daného trojúhelníka, jest dokázati, že

$$\sqrt{O} = \sqrt{O_1} + \sqrt{O_2} + \sqrt{O_3}.$$

Ing. *J. Langr.*

18. Kolik je pravých ireduktibilních zlomků o jmenovateli N, jehož prvočíselný rozklad je $N = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_n^{\alpha_n}$?

Prof. *K. Lerl.*

19. Sečtěte prvních n členů řady

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \ldots$$

Týž.

20. Rozhodněte, zdali existuje $\lim\limits_{n=\infty}$ posloupnosti dané rekurentním vzorcem $x_{n+1} = k + \dfrac{(2k+1)\,x_n}{4kx_n + 2k + 1}$, $x_0 = k > 0$, a určete její hodnotu!

Dr. *Ant. Pleskot.*

21. Vedeme-li vrcholy trojúhelníka ABC jakékoliv rovnoběžky, protínají opsanou kružnici v bodech A_k, B_k, C_k; jest dokázati, že Paskalovy přímky všech takto získaných šestiúhelníků $AA_kBB_kCC_k$ procházejí pevným bodem! Dr. *Roháček.*

22. Válec, jehož plášť se dotýká koule, protíná tuto ve dvou kruhových řezech. Kdy bude jádro proniku maximální? Prof. *Boh. Starosta.*

23. Ustanovte všechna dvojciferná a trojciferná čísla v soustavě desítkové, dělitelná součtem svých cifer a taková, že jejich cifry jsou čísla přirozené řady čísel bezprostředně po sobě jdoucí! Dr. *Václav Veselý.*

24. Sestrojte kružnici, která

a) dotýká se dvou daných přímek a je viditelna z daného bodu v úhlu α;

b) dotýká se přímky a je viditelna ze dvou daných bodů v úhlech α, resp. β! *V.*

25. Který rovnoramenný lichoběžník má při daném obvodu $2s$ a daném úhlu α při základně největší obsah? Z. š. i. *A. Ždímal.*

Z fysiky.

1. Granát vystřelený z děla pod jistým úhlem dopadne za t_1 sekund. Při dvojnásobné elevaci byl z téhož děla a s touž počáteční rychlostí vystřelen granát, který za t_2 sekund prolétl nad místem dopadu prvního granátu. Stanovte počáteční rychlost granátu, dálku dostřelu, elevační úhel v obou případech a dobu potřebnou k dopadu druhého granátu!

Dr. *Čeněk Kohlmann.*

2. Po poledníkové kružnici koule, která se rovnoměrně otáčí kolem svislé osy, pohybuje se bod stálou rychlostí. Jest stanoviti křivku, kterou opíše průmět tohoto bodu na vodorovnou středem koule jdoucí rovinu, jestliže bod oběhne hlavní kružnici právě za dobu dvou otoček koule! Kdy je rychlost bodu maximální a kdy minimální? *Týž.*

3. Do válcové nádoby naplněné rtutí je ponořena trubice, která je nahoře zatavena; oč se zmenší vzdušný sloupec původně 114 cm dlouhý, jestliže původní tlak jedné atmosféry stoupne na dvojnásobnou hodnotu a je-li poloměr nádoby se rtutí nepoměrně větší než poloměr trubice?

Týž.

4. Struna a krytá píšťala dávají stejný tón. Prodloužíme-li strunu o $^1/_4$ její délky, sníží se její absolutní výška o 34. Stanovte délku píšťaly! (Rychlost zvuku 340 m/sek.) *Týž.*

5. Poloměry ploch omezujících čočku o indexu lomu n jsou r_1 a r_2, vzdálenost svítícího bodu na ose čočky od jeho obrazu je d; jaké jsou vzdálenosti svítícího bodu a jeho obrazu od čočky? *Karel Lerl.*

6. Nakloněná rovina přechází nahoře v rovinu vodorovnou. Určiti práci potřebnou k vytažení řetězu, který leží na nakloněné rovině, na rovinu vodorovnou. (Jednotka délky váží q, sklon nakloněné roviny je α, koeficient tření je f.) *Miroslav Šejvl.*

7. Stanovte proměnlivost průřezu všude stejně namáhaného svislého prutu, na němž visí břemeno Q! (Uvažujte i vlastní váhu!) *Týž.*

8. Ladička a pozorovatel jsou v témže bodě. V okamžiku $t = 0$ začne ladička zníti a současně se vzdalovati od pozorovatele přímočaře se stálým zrychlením a. Jest probrati tento případ obecně a odvoditi důsledky pro $a = g = 10$ m/sec^2 při rychlosti zvuku $c = 340$ m/sec se zřením k tónům jedné oktávy! Dr. *Mik. Šmok.*

9. Na optické ose dané čočky (spojné nebo rozptylné) ohniskové dálky f je bodový zdroj světelný S ve vzdálenosti a před čočkou. Ve vzdálenosti d od zdroje je postaveno za čočkou kolmo k optické ose stinítko. Jest vyšetřiti, jak se mění intensita osvětlení v blízkosti optické osy, mění-li čočka svou polohu mezi zdrojem a stinítkem! *Týž.*

10. Proud článku elektromotorické síly E_1 je veden přes proměnlivý odpor R_1 a pak rozdělen na dvě větve. Do první větve je zapiat proměnlivý odpor R_2. Do druhé galvanometr a za ním článek elektromotorické síly E_2, jehož proud v této větvi je namířen proti proudu článku prvního. Odpory R_1 a R_2 se upraví tak, aby galvanometrem neprocházel proud; pak se zvětší odpor R_1 o ϱ_1 a R_2 o ϱ_2, takže galvanometrem opět proud neprochází. Jest vyjádřiti poměr elektromotorických sil obou článků hodnotami ϱ_1 a ϱ_2.

Týž.

Z deskriptivní geometrie.

1. Sestrojte kulovou plochu, která prochází body A, B, dotýká se dané roviny a dané koule! Prof. *Ad. Babuška.*

2. Sestrojte rotační kuželovou plochu, která se dotýká roviny ϱ a rovinu σ protne v kuželosečce o daných ohniskách! Prof. *F. Müller.*

3. Jest dána kuželosečka k a body A, B, C ležící v přímce. Bodem C veďme všechny sečny k a jejich tětivy promítejme z A a B! Dokažte, že geometrickým místem průsečíků promítacích paprsků jest kuželosečka! Kdy je toto geom. místo elipsou, parabolou, hyperbolou nebo kuželosečkou homotetickou k dané? *Pospíšil.*

4. Sestrojte ortogonální kuželovou plochu, je-li dána kruhová podstava v rovině a

a) dva body,

b) dvě tečny plochy! Dr. *Roháček* a *V.*

5. Daná rovina protíná rotační válec v elipse, která se dotýká obou podstav. Sestrojte válec, je-li dáno ohnisko řezu a povrchová přímka!

Prof. *Boh. Starosta.*

Poznámka. Redakce odmění zvláštními knižními cenami 2 studující, kteří provedou úlohy z deskriptivní geom. ve vzorných rysech (rozměr 297 . 210 mm) tuší a s normalisovaným popisem, jehož vzor a potřebné nástroje prodává JČMF.

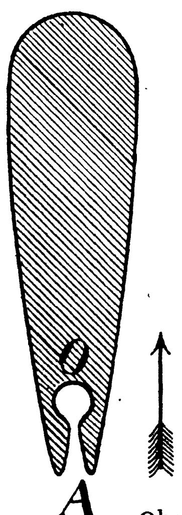
Vypsání cen za řešení úloh.

Studujícím středních škol, kteří jsou odběrateli „Rozhledů", budou uděleny ceny za správné řešení úloh z matematiky, fysiky a deskriptivní geometrie, a to knihy vydané nákladem Jednoty. Kromě toho z fondu Jaromíra Mareše obdrží letos po patnácté studující středních škol ceny za nejlepší řešení úloh; při stejné jakosti řešení náleží přednost řešitelům z české reálky a českého gymnasia v Českých Budějovicích a z české reálky v Praze III. Dále obdrží odměnu nejlepší počtář z české školy obecné v Českých Budějovicích v Dlouhé ulici.

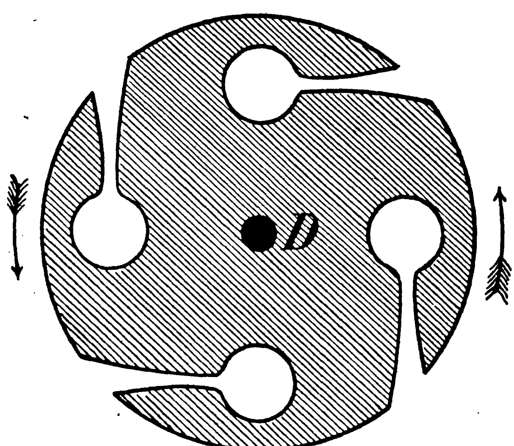
Řešení úloh, psaná na čtvrtkách po jedné straně, každá úloha na zvláštním listě, buďte zaslána redakci do **15. března 1935** neodvolatelně. Úprava buď tato: Číslo úlohy, znění její a autor. Řešil p. (jméno, ústav). Řešení. Úplná adresa bytu. Vzory najde čtenář v posledním čísle minulého ročníku. Buď přiložen pro kontrolu seznam řešených úloh s podpisem a adresou. Zásilky nedostatečně frankované se nepřijímají.

Na řešení pozdě došlá není možno bráti zřetel.

Upozornění. Posledním výnosem ŠMO obsahujícím předpisy pro výroční zprávy středních škol bylo znemožněno, aby ve výročních zprávách byly otištěny maturitní úlohy z deskriptivní geometrie. Redakce Rozhledů chce otisknouti vybrané takové úlohy. Obrací se proto na pány profesory deskriptiváře s prosbou, aby jí zasílali lístkem přesné texty úloh z deskr. geometrie, které byly letošního roku na jejich ústavě dány při zkouškách dospělosti, a vzdává za to předem svůj dík. (Adresa redakce: Praha II, Vodičkova 20.)



Obr. 1.



Obr. 2.

Obrázky k Mosaice prof. Dr. Vladimíra Nováka v posledním čísle minulého ročníku, které omylem nebyly zařazeny do sazby.