Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Poznámka k differenciální rovnici ploch rotačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 2, 140--146

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123300`

přímce. To plyne z 1-ho odstavce článku tohoto (str. 18). Aequivalence tím jest zajištěna, ale nikoliv korrespondence v svrchu vytčených seřazeních prvků obou množin; neboť k tomuto jest zapotřebí, aby obě množství byla perfektní, kdežto geometrie Euklidova nemá tohoto postulátu mezi svými důsledky.

Nechť tedy každému číslu reálnému odpovídá na přímce bod anebo ne, v prostoru geometrie Euklidovy ani lístek se nepohne.

(Pokračování.)

Poznámka k differenciální rovnici ploch rotačních.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

Jest známo, že integrál parciální differenciální rovnice lineární

$$\frac{\partial f}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z} f_3(x,y,z) = 0,$$

aneb rovnice

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial z}{\partial y} f_2(x,y,z) = f_3(x,y,z),$$

stanoví se tak, že určí se integrály soudobých differenciálních rovnic

$$(2) \qquad \frac{dx}{f_1(x,y,z)} = \frac{dy}{f_2(x,y,z)} = \frac{dz}{f_3(x,y,z)},$$

ve tvaru

$$\varphi_1(x,y,z) = \text{Const}_1, \quad \varphi_2(x,y,z) = \text{Const}_2,$$

a že pak jakákoli funkce

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

jest obecným integrálem rovnice předložené.

Rovnice

$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{Const}_1 \quad \text{a} \quad \varphi(x, y, z) = \mathrm{Const}_2$$

značí pro všecky možné hodnoty konstant system čar, které slují charakteristikami ploch differenciální rovnicí (1) definovaných.

Nahradíme-li v rovnici (1) funkce f_1, f_2, f_3 hodnotami dx, dy, dz z rovnice (2), dostaneme rovnici

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy - dz = 0,$$

kteráž patrně neznačí nic jiného, než že elementy charakteristiky zapadají v plochu integrálnou.

Přihlížíme-li tedy k rovnicím charakteristik a rovnici (3), můžeme říci, že differenciální rovnice plochy obdržíme, eliminujeme-li veličiny dx, dy, dz z rovnic charakteristik a z rovnice (3).

Píšeme-li tedy rovnice charakteristik obecně ve tvaru

$$\begin{aligned} \Psi_1 dx + \Psi_2 dx + \Psi_3 dx &= 0, \\ X_1 dx + X_2 dx + X_3 dx &= 0, \end{aligned}$$

pak differenciální rovnice příslušné plochy zní

$$\begin{vmatrix} \Psi_1, & \Psi_2, & \Psi_3 \\ X_1, & X_2, & X_3 \\ \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y}, & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pro některé plochy můžeme však velmi jednoduchým způsobem stanoviti differenciální rovnice charakteristik, na př. pro plochy rotační, kuželové, válcové, konoidy a jiné.

Pojednejme o plochách rotačních.

Stanovme differenciální rovnici ploch rotačních, jestliže známe osu jejich; ta budiž určena bodem x_0, y_0, z_0 a pak veličinami A, B, C, které jsou úměrny cosinusům směrným osy rotační.

Differenciální rovnice charakteristik snadno určíme, neboť tyto jsou kružnice, jichž středy jsou na ose rotační a roviny jejich k ose rotační kolmé.

Patří-li bod a o souřadnicích x, y, z charakteristice a jsou-li cosinusy směrné elementu charakteristiky v bodě tomto úměrny dx, dy, dz, pak směr elementu jest kolmý k ose rotační, t. j. platí rovnice

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz = 0. \tag{4}$$

Označíme-li patu kolmice s bodu a na osu spuštěné m a její souřadnice ξ, η, ζ, pak i element charakteristiky stojí kolmo ku spojnici $\overline{ma}$ a máme tudíž druhou rovnici

$$(x - \xi)\,dx + (y - \eta)\,dy + (z - \zeta)\,dz = 0.$$

Poněvadž bod m leží na ose rotační, možno psáti

$$\xi - x_0 = \lambda\mathrm{A}, \quad \eta - y_0 = \lambda\mathrm{B}, \quad \zeta - z_0 = \lambda\mathrm{C}.$$

Dosadíme-li z těchto rovnic hodnoty za ξ, η, ζ do rovnice předchozí, promění se tato v rovnici

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz - \lambda(\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz) = 0.$$

Ježto výraz

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \mathrm{C}dz = 0,$$

přechází poslední rovnice v jednodušší

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0, \tag{5}$$

kteroužto rovnici můžeme též hned napsati, uvážíme-li, že element charakteristiky jest kolmý k poloměru koule o středu (x_0, y_0, z_0) a že tato koule prochází bodem (x, y, z).

Eliminujeme-li nyní z rovnic (4), (5) a z rovnice (3), hodnoty dx, dy, dz, obdržíme rovnici ploch rotačních ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y}, & -1 \end{vmatrix} = 0.\text{*)} \tag{6}$$

V ročníku IX. tohoto Časopisu str. 216. a násl. vyvinoval p. prof. V. Jung podmínku, kdy lineárná differenciální rovnice

*) Srovnej článek prof. G. Blažka v roč. II. pag. 172.

$$(\alpha) \quad (a_1 x + a_3 y + a_3 z + a_4) \frac{\partial z}{\partial x} + (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4) \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4$$

značí differenciální rovnici ploch rotačních.

Předloženou úlohu možno okamžitě zodpověděti, přihlížíme-li rovnici (6).

Vyčíslením determinantu dostaneme

$$(\beta) \quad \frac{\partial z}{\partial x}(\mathrm{C}y - \mathrm{B}z + \mathrm{B}z_0 - \mathrm{C}y_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(\mathrm{A}z - \mathrm{C}x + \mathrm{C}x_0 - \mathrm{A}z_0)$$
$$= \mathrm{B}x - \mathrm{A}y + \mathrm{A}y_0 - \mathrm{B}x_0.$$

Jestliže rovnice (α) má značiti differenciální rovnici plochy rotační, tu musí až na konstantní faktor býti identickou s rovnicí (β).

Poněvadž veličiny A, B, C jsou úměrny cosinusům směrným, možno místo nich voliti i hodnoty λA, λB, λC, kdež λ libovolný faktor značí a proto možno přímo psáti, že rovnice (α) a (β) musí býti identické.

Toho podmínky jsou

$$a_1 = b_2 = c_3 = 0,$$
$$a_2 = -b_1, \quad a_3 = -c_1, \quad b_3 = -c_2.$$

Ponecháme-li dále označení A, B, C místo b_3, $-a_3$, a_2 musí mimo to býti

$$\mathrm{B}z_0 - \mathrm{C}y_0 = a_4,$$
$$\mathrm{C}x_0 - \mathrm{A}z_0 = b_4,$$
$$\mathrm{A}y_0 - \mathrm{B}x_0 = c_4.$$

Soustava těchto tří rovnic jest na sobě závislá.

Eliminujeme-li na př. z prvé a druhé z_0, dostaneme

$$\mathrm{AB}z_0 - \mathrm{AC}y_0 = \mathrm{A}a_4,$$
$$\mathrm{BC}x_0 - \mathrm{AB}z_0 = \mathrm{B}b_4,$$

· j.

$$\mathrm{BC}x_0 - \mathrm{AC}y_0 = \mathrm{A}a_4 + \mathrm{B}b_4,$$

kterýžto výraz rovná se dle poslední rovnice hořejšího systému $-c_4\mathrm{C}$; musí tedy platiti podmínka

$$Aa_4 + Bb_4 + Cc_4 = 0.$$

K určení x_0, y_0, z_0 máme dvě rovnice, což nepřekvapuje, ježto bod x_0, y_0, z_0 kterýkoli bod na ose rotační může značiti. Rovnici osy rotační proto dostaneme jakožto kombinaci kterýchkoli dvou rovnic soustavy

$$\begin{aligned} Bz_0 - Cy_0 &= a_4, \\ Cx_0 - Az_0 &= b_4, \\ Ay_0 - Bx_0 &= c_4, \end{aligned}$$

značí-li x_0, y_0, z_0 běžné souřadnice osy rotační.

Jest tedy obecný tvar differenciální rovnice ploch rotačních

$$\frac{\partial z}{\partial x}(Cy - Bz + a) + \frac{\partial z}{\partial y}(Az - Cx + b) = Bx - Ay + c, \tag{7}$$

platí-li

$$Aa + Bb + Cc = 0 \tag{8}$$

a rovnice osy rotační jest pak

$$\begin{aligned} Bz - Cy &= a, \\ Cx - Az &= b, \\ Ay - Bx &= c. \end{aligned} \tag{9}$$

Předpokládáme ovšem, že nevymizí současně A, B a C, ježto jsou veličiny tyto úměrny cosinusům směrným určité osy.

Je-li na př. osou rotační osa Z, tu

$$A = 0, \quad B = 0,$$

a ježto osa ta prochází bodem

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

jest i

$$a = b = c = 0.$$

Differenciální rovnice nabývá pak tvaru

$$\frac{\partial z}{\partial x} Cy - Cx \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

t. j.

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Naopak jednoduchou integrací rovnice (7), o níž ovšem platí podmínka (8), můžeme dospěti k tomu, že skutečně značí plochu rotační, jejíž osa má rovnici (9).

Integrováním rovnice (7) nabýváme soustavy rovnic

$$\frac{dx}{Cy - Bz + a} = \frac{dy}{Az - Cx + b} = \frac{dx}{Bx - Ay + c}.$$

Položme společný poměr rovný dt; pak obdržíme

$$\begin{aligned} dx &= (Cy - Bz + a)\,dt, \\ dy &= (Az - Cx + b)\,dt, \\ dz &= (Bx - Ay + c)\,dt; \end{aligned} \tag{10}$$

znásobíme-li tyto rovnice pořadem veličinami A, B, C a pak 'e sečteme, dostaneme

$$A dx + B dy + C dz = (aA + bB + cC)\,dt;$$

ježto

$$aA + bB + cC = 0,$$

přechází rovnice předchozí v rovnici

$$A dx + B dy + C dz = 0,$$

z níž integrací plyne

$$Ax + By + Cz = d,$$

kdež d libovolnou integrační konstantu značí.

Abychom druhý integrál obdrželi, znásobme rovnice (10) pořadem

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0;$$

veličiny x_0, y_0, z_0 jsou neznámé prozatím konstanty. Tu obdržíme

$$\begin{aligned} &(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz \\ &= [x(a + y_0 C - z_0 B) + y(b - x_0 C + z_0 A) \\ &\quad + z(c + x_0 B - y_0 A) - (x_0 a + y_0 b + z_0 c)]\,dt. \end{aligned}$$

Volme konstanty x_0 y_0 z_0 tak, že vyhoví se rovnicím

$$(11)\qquad \begin{aligned} z_0 B - y_0 C &= a, \\ x_0 C - z_0 A &= b, \\ y_0 A - x_0 B &= c. \end{aligned}$$

Poslední soustavě lze vyhověti, ježto nutno jest, jak dříve jsme ukázali, aby

$$Aa + Bb + Cc = 0;$$

pak vyhoví se i rovnici

$$x_0 a + y_0 b + z_0 c = 0,$$

tak snadno se přesvědčíme, sečtouce rovnice soustavy předchozí znásobené pořadem veličinami x_0, y_0, z_0.

Volíme-li tedy x_0, y_0, z_0 tak, aby hověly rovnicím (11), pak platí

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0,$$

j. j.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

kdež r^2 jest libovolnou konstantou.

Jest tedy integrálem rovnice (7) výraz

$$(12)\qquad f[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,\ Ax + By + Cz] = 0,$$

kdež f libovolnou funkci značí.

Rovnice (12) přísluší ploše rotační, jejíž osa má rovnici danou soustavou kterýchkoli dvou rovnic ze soustavy (11), značí-li v nich x_0, y_0, z_0 běžné souřadnice bodů na ose položených; soustava tato ovšem se ztotožňuje se soustavou (9).

Některé nové magneto-optické pokusy.

Referuje **M. Otta,**
professor c. k. reálky v Kladně.

Magnetická rotační disperse par natria objevená Macalusem a Corbinem*) byla vždy pozorována jen v úzkých mezích a to

---

*) Zeitschrift für phys. u. chem. Unt. XII. p. 102.