kde p je číslo *kmenné* a *nesoudělné* s r, odvodíme dle (2')

$$Z\left(\frac{r^{p-1}-1}{p(a_1-p)}\right)=0.$$

Je-li

$$a_1-p=1,$$

bude

$$Z\left(\frac{r^{p-1}-1}{p}\right)=0,$$

což jest vzorec *Fermatův* v úpravě Euler-Gaussově.

β) Volíme-li

$$a_0=r^k,\quad b_0=n!,\quad a_1-n!=1$$

a r číslo *nesoudělné* s $n!$, pak máme

$$Z\left(\frac{r^k-1}{n!}\right)=0$$

a podobně

$$Z\left(\frac{\prod_{k-1}^{n-1}(r^k-1)}{n!}\right)=0.{}^{*})$$

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. Jan Vilém Pexider v Praze.

(Pokračování.)

3. *Každé číslo znázorniti lze určitou délkou.*

3. **Věta.** *Číslo znázorniti lze nejvýše jedinou délkou,* čili *každému číslu odpovídá nejvýše jediný bod na přímce, odpovídá-li mu vůbec.*

---

*) *F. J. Studnička*, O determinantech mocninných a sestavných, p. 57.

Buď předpokladem, že číslu A odpovídá délka OA na přímce a. Existoval-li by nyní kromě bodu A ještě jeden bod A', různící se od A, jenž by utvořil tentýž řez*), jemuž by tedy odpovídalo totéž číslo, tu by na úsečce AA' nesměl vyskytnouti se žádný bod očíslovaný číslem $\frac{\alpha}{2^n}$ — což dle věty 1. jest vyloučeno. Odpovídá-li tedy číslu délka, může mu odpovídati jen jediná. *Číslo schopno jest očíslovati na přímce jediný bod.*

Konečnou a hlavní otázkou jest však, zdali každému číslu reálnému odpovídá určitá délka. Jedná-li se o číslo vyjádřené konečným duálným zlomkem, jest věc evidentní: pomocí konečného počtu dělení a konečného počtu nanášení na přímku obdrží se příslušná úsečka. Jak však věci se mají pro čísla, vyjádřená nekonečnými zlomky duálnými? Dle jakého kriteria lze tu rozpoznati, že i každému nekonečnému procesu odpovídá určitý bod, čili, že pro každé takové číslo skutečně existuje na přímce bod, jejž jím lze očíslovati? Na otázku tuto odpověď klade axiom úplnosti.

Buď předpokládáno, že by jistému irracionálnému číslu A neodpovídal žádný bod na přímce a**). Pak by bylo možno přiřaditi číslu A nový bod, prohlásiti jej za existentní na přímce a a tak rozšířiti prvky geometrie, v níž znázornění čísel délkami má se provésti, a to pouhým připojením prvku sice nového, jenž však jest téhož druhu, jaký se v ní již vyskytuje. Připojení to jest naprosto dovolené; neboť v geometrii takto rozšířené platily by opět všecky axiomy I-IV. a V 1, čili: byli bychom opět v geometrii Euklidově, *nechť již číslu* A *odpovídá nějaký bod anebo ne.* Nebyli bychom však v geometrii, zbudované na axiomech, uvedených na počátku úvahy, v geometrii, jež involvuje v sobě geometrii Euklidovu; neboť připojení to by odporovalo zásadě úplnosti, dle níž ku geometrickým prvkům není možná připojiti

*) Mezi čísly $\frac{\alpha}{2^n}$.

**) Bezpodmínečnou přípustnost předpokladu tohoto ujasní si čtenář dojista snadně sledováním logických konsequencí, plynoucích z předpokladu toho a současně z kterékoliv gruppy uvedených axiomů *geometrie Euklidovy.*

prvky téhož druhu, jež by v ní již obsaženy nebyly. (Systém axiomů I-IV. a V 1 připouští ještě takové připojení, čili geometrie Euklidova nechává otázku, zdali číslu A skutečně odpovídá bod, otevřenou: může odpovídati, ale *nemusí*). Z toho plyne

4. věta: *Každému číslu reálnému odpovídá určitý bod*, čili *každé reálné číslo znázorniti lze určitou délkou.*

Ježto věta V 3 jest *na ostatních zásadách nezávislý axiom*, jest tím poukázáno na neřešitelnost daného problému v geometrii Euklidově, dokazatelnost jeho však v geometrii Hilbert-Euklidově*), jež de facto není ničím jiným, nežli úplné vybudování obecně platné a běžnému názoru odpovídající geometrie na základě úplného systému jednoduchých axiomů.

Obapolně jednoznačná korrespondence mezi čísly a délkami jest nevyhnutelným požadavkem analytické geometrie. Starší analysté považovali ji buď za samozřejmou, nezmiňujíce se blíže o tom, proč každé délce přiřaďovali číslo a každému číslu délku (vedlať je k tomu účelnost), aneb pokoušeli se podepříti ji všelikými „důkazy". Od let sedmdesátých byla pochybenost běžného mínění zjištěna**), a tu pak mathematikové vyslovovali přiřaděnost tu axiomaticky (Weierstrass, Klein, ...) aneb přijali do základů geometrie tak zv. axiom Cantorův, jenž zní: *Nechť existuje skutečně každý bod, jenž konvergujícím nekonečným procesem jest definován****). Prof. Hilbert pak v novějších pracích svých ukázal, že není třeba přiřaděnosti té domáhati se zásadou, jež snad by se mohla zdáti základům geometrie poněkud cizí, nýbrž že lze

---

*) Název ten budiž dovolen. Jest to analysa geometrie Descartovy

**) *Bois-Reymond* r. 1882 [1]: „... ich behaupte, keine Denkarbeit werde einen solchen Beweis für das Dasein des Grenzpunktes je einem Gehirn abfoltern, und vereinigte es Newton's Divinationsgabe, Euler's Klarheit und die zermalmende Gewalt Gaussi'schen Geistes".

Lerch r. 1886 [1] p. 180: „Nedá se však nikterak dokázati, že každé limitě náleží určitý bod (t. j. určitá délka od pevného počátku)" a p. 231: „ale nikomu pod sluncem nepodaří se dokázati, že každému řezu přísluší jediná veličina, která je větší než všecky veličiny P_1 a menší než všecka P_2, t. j., že existuje bod určitý a *jediný*, jenž separuje nekonečné skupiny bodů P_1 a P_2. Nezbývá nic, než přijati tuto větu za správnou, právě tak, jako předpokládáme tíži, ether, fluidum".

***) Viz k tomu poznámku p. Lercha [1] str. 231.

axiomy geometrie a sice právě té, jež jest podkladem geometrie analytické, stanoviti a upraviti tak, že obapolně jednoznačná přiřaděnost mezi čísly a délkami čili *totožnost mohutnosti množství čísel reálných a mohutnosti lineárného kontinua* jest pouhým důsledkem, plynoucím logicky ze soustavy vytčených axiomů geometrických. Jako množství čísel reálných, definované soustavou axiomů arithmetických, jest množstvím perfektním (perfekte Menge), tak množství bodů na úsečce (a tím i na přímce), definované Hilbertovou soustavou axiomů, stává se následkem *zásady úplnosti* (V 3) rovněž perfektním, kdežto v geometrii Euklidově jím ještě nebylo. Proto také důkaz aequivalence mezi oběma druhy prvků podařiti se nemohl, nemůže a, je-li jaký v geometrii Euklidově sdělán, *jest a priori pochybený.*

* * *

Stanovisko Cantorovy theorie množství.

Hlubšího poznání vytčeného problému poskytuje Cantorova theorie množství*), jež ovládá a třídí nekonečná množství prvků v množství různých druhů, určitým způsobem definovaná. Druhů těch čili různých mohutností množství jest libovolně mnoho. Množství prvého druhu či množina spočetně nekonečná jest množství všech celistvých čísel reálných a s tohoto stanoviska i těch, jichž prvky očíslovati lze — s oboustrannou jednoznačností vzhledem k oběma množinám — v jakémkoliv pořádku čísly celistvými. Tak jest i množství všech čísel racionálných**), ano i všech čísel algebraických***) množstvím prvé mohutnosti. Existují však i jiná nežli spočetná množství. Tak na př. není možná každému číslu irracionálnému přiřaditi celistvé číslo, má-li se použíti každé jen konečněkráte. Množství čísel reálných jest dojista jiného druhu, vyšší mohutnosti†). Dále lze ukázati, že každé spojité funkci jedné proměnné přiřaditi lze reálné číslo a naopak, t. j. mohutnost množství všech spojitých funkcí jest totožnou s mo-

*) Cantor, *G.* [2], [3], [4], [5]; neb [6] a novější [9] a [10].
**) Cantor, *G.* [7] p. 258.
***) Cantor, *G.* [8] p. 250.
†) Cantor, *G.* [7] p. 259.

hutností reálných čísel čili — vzhledem k axiomaticky kladené aequivalenci mezi čísly a body úsečky — mohutnost ta jest mohutností lineárného kontinua. Existují však i množství, jichž mohutnost jest vyšší nežli obě právě uvedené. Tak lze ukázati, že ani všecka reálná čísla nestačí, očíslovati *funkce* jedné proměnné *vůbec*, spojité i přetržité. Množství *všech* funkcí *vůbec* má tudíž vyšší mohutnost nežli lineárné kontinuum. Jsou však i ještě vyšší mohutnosti.

Přirozenou otázkou tu jest dojista, zdali po prvé mohutnosti (mohutnosti spočetně nekonečného množství) následuje ihned mohutnost lineárného kontinua jakožto mohutnost nejblíže vyšší resp. která mohutnost vůbec jest mohutností druhou, t. j. jakým způsobem definované nekonečné množství má tu vlastnost, že každá jeho část musí býti co do mohutnosti rovna buď celku anebo množství spočetnému? *Cantorovi* podařilo se stanoviti přesně množství této druhé mohutnosti a sice jakožto *množství všech typů v úplný pořad uvedených množin prvého druhu* [*Menge der Typen der wolgeordneten abzälbaren Mengen* *)]. *Cantor* vyslovil tu domněnku velmi oprávněnou, že mohutnost lineárného kontinua jest bezpochyby touto druhou mohutností — mohutností všech typů čili všech transfinitních čísel **). Otázka tato však dosud řešena nebyla a zůstává jedním z největších současných problémů mathematických ***). Obdobně naznačil Cantor konstrukci třetí a vyšších mohutností.

S tohoto stanoviska problém korrespondence mezi čísly a délkami jest neobyčejně jasný. Aby jich aequivalence byla vůbec možnou, musely by mohutnosti jich býti identické, a tu bychom *předem* míti museli přesně definované množství všech reálných čísel a všech možných bodů na přímce. Všecka čísla reálná definována jsou známou soustavou axiomů arithmetických, avšak všecky body na přímce soustavou axiomů geometrie Euklidovy, jak bylo ukázáno, definovány — *nejsou*. V geometrii Euklidově není tudíž důkaz aequivalence mezi čísly a body přímky

---

*) Cantor [6] p. 39; též [10] p. 226.

**) Cantor [8] p. 258.

***) *Pokus* o důkaz učinil *Tannery* v *Bulletin de la Soc. math. de France*, sv. 12, (1884), p. 90; jest však nezávazný.

čili důkaz totožnosti mohutností obou nekonečných množství vůbec ani možný. Aby množství bodů na přímce hovělo té základní podmínce v theorii množin, připojil Cantor k axiomům geometrie Euklidovy svůj známý a zde shora vytčený axiom geometrický, prof. Hilbert pak svůj *axiom úplnosti*. A teprve pak možné jest mluviti o aequivalenci mezi oběma druhy prvků. Chtějí-li se mathematikové vyhnouti těmto širším úvahám a přece analytickou geometrii v rovině přesně založiti, vyslovují aequivalenci mezi čísly a body *axiomaticky*. A to jest po většině jich stanovisko.

V novější době zabýval se otázkou touto též mathematik *Ascoli**) a ukázal, že jest nutno v základy geometrie zavésti větu, již nelze dokázati, a sice větu: „*Leží-li z nekonečné posloupnosti délek, konvergujících k nule, každá zcela uvnitř předcházející, pak existuje jeden, ale jen jeden bod, jenž leží uvnitř všech těchto délek,*“ jež jest tudíž axiomem, a sice zavésti ji v tom případě, že se požaduje aequivalence mezi reálnými čísly a body přímky v geometrii Euklidově. Buď tedy větu Cantorovu, neb Ascoliovu, nebo Hilbertovu!

Se stanoviska theorie množství byl by problém aequivalence čísel a délek teprve pak úplně řešen, až by mohutnosti obou těchto množství byly stanoveny. Kdyby se na př. podařilo ukázati, že množství všech reálných čísel jest mohutnosti druhé (*alef-jedna*) pak jistě na přímce nemá místa více bodů nežli v množství téže mohutnosti (*alef-jedné*), nemá-li soustava geometrických axiomů I—IV a V 1 pozbýti platnosti, t. j. pak by aequivalence obou množství byla evidentní a bylo by možno každému číslu přiřaditi určitý typ množiny prvé mohutnosti (*alef-nula*) čili číslo druhé třídy číselné, a stejně tak každému bodu přímky — t. j. pak by bylo lze všecka reálná čísla (resp. všecky body přímky) uvésti v takový pořad, že pro každé vytčené číslo (resp. každý bod) by bylo možná udati to číslo (resp. bod), jež jest onomu vytčenému nejblíže příští, *konsekutivní*, tedy spořádati množství čísel (resp. body na přímce) v takovou řadu, že každý její díl by měl prvý, vždy udatelný element. Čísla, spořádána dle své velikosti (neb body na přímce), nejsou v tomto smysle seřazena. Neboť, vytkne-li se na přímce určitý

---

*) Ascoli [1].

bod, tu neznáme prostředků udati bod, jenž jest onomu nejbližším, konsekutivním, takže část přímky, nalézající se *za* oním vytčeným bodem, nemá žádného prvého bodu, či množství oněch bodů žádný prvý element, a vytkneme-li nějaké číslo, nedovedeme udati čísla nejblíže většího, atd.

Dosavadní úvahy provedeny byly v ideálném oboru arithmetiky, jejíž přesnost jest neomezená, a v abstraktní geometrii, jejíž logická správnost jest bezpodmínečná. V praksi však, při skutečném numerickém počítání a při skutečném mechanickém měření jest vše jen přiblížně přesné a přiblížně správné. V praksi bodem jest tečka, a při počítání nepracuje se s čísly abstraktními, nýbrž s konečnými zlomky, jimiž lze čísla irracionálná libovolně approximovati; v empirii spokojujeme se s přesností omezenou a správností přiblížnou. Místo bodu — tečka, místo čísel irracionálných — tak zv. E-funkce, místo přímky — proužek atd. V tom tkví rozdíl mezi mathematikou precísní a approximační. *Approximační mathematika jest však ta část vědy mathematické, jíž se v praksi skutečně používá.* Proto jest záhodno, přihlížeti i s tohoto stanoviska k mathematickým problémům.

Stanovisko approximační mathematiky.

Každé číslo vyjadřujeme konečným neb nekonečným zlomkem. Zlomky duálné jsou sice nejjednodušší, v praksi používá se však zlomků desetinných. Lze tvrditi, že každému číslu přísluší jediný zlomek desetinný. Tu však dlužno míti na paměti, že vyloučena jest perioda $\dot{9}$, neboť jinak by číslu

$$(1) \qquad A \cdot abc \ldots n,$$

kdež A značí celistvé číslo a $a, b, c, \ldots n$ kterákoliv z čísel 0, 1, 2, ... 9, příslušely obecně dva zlomky: právě uvedený a zlomek

$$(2) \qquad A \cdot abc \ldots \widehat{n - 1}\, 999 \ldots .$$

Číslo definované zlomkem (1) a číslo definované zlomkem (2) jest jedno a totéž; neboť rozdíl čísla (1) a čísel posloupnosti

$A \cdot ab \ldots \overline{n-1}\, 9$, $A \cdot ab \ldots \overline{n-1}\, 99$, $A \cdot ab \ldots \overline{n-1}\, 999 \ldots, \ldots$ stává se s rostoucím počtem cifer 9 libovolně malým. Nevyloučí-li se perioda $\dot{9}$, pak každé reálné číslo definováno jest nekonečným zlomkem desetinným; stačíť konečné zlomky přeměniti tak, že se zmenší poslední cifry o jedničku a pak se kladou samé devítky. Vyloučí-li se, pak teprve správné jest tvrzení, že každému reálnímu číslu přísluší jediný zlomek buď konečný nebo nekonečný.

V praksi používá se čísel k numerickému počítání. Tu však není možná obecně stanoviti číslo irracionálné desetinným zlomkem jinak, než-li přibližně, totiž až na n desetinných míst, nechť volí se n jakkoli veliké; do nekonečna počítati nelze. Nahražuje se tedy v praksi číslo irracionálné (nekonečný zlomek) číslem racionálným (konečným zlomkem), jímž lze ono approximovati patrně do libovolné přesnosti. Tak jest na př. počítání s logarithmy sedmimístními numerické počítání s čísly, jichž přesnost sahá pouze *k sedmému* místu. U osmého jest mez jich přesnosti a mezní hodnota (Schwellenwert), do které čísla ta logarithmy skutečně přesně vystihují, jest $\frac{1}{10^7}$.

Obdobně jest tomu v praktické geometrii, při měření, kreslení atd. Precísnost, jíž tu vůbec lze dosíci, končí u určité meze: při měření délek stupňovati lze přesnost až na $\frac{1}{10}\mu$ ($\mu = \frac{1}{1000}$ *mm*). Chtělo-li by se jíti dále, tu ohyb světla v mikroskopech s čočkami ještě silněji zvětšujícími schopen jest oklamati naše oko; jeť vzájemná distance molekul hmotných asi $\frac{1}{50}\mu$. Fysikální zákony, jimž světlo a hmota podléhají, vykazují tudíž mechanickému měření určitou mez, za níž — je-li prostředníkem měření oko a mikroskopy — nelze jíti. Nemůžeme odměřiti s přesností neomezenou délku, nemůžeme nakresliti bod, nýbrž tečku, ani čáru, nýbrž proužek, atd.; v praksi, při měření skutečném, vše jest jen přibližné.

Místo čísel irracionálných operuje se při numerickém počítání výhradně s čísly racionálnými. Má-li přesnost jíti do

n-tého místa desetinného, počítáme s čísly, jež lze následovně vytknouti. Značiž x číslo racionálné neb irracionálné, vyjádřené desetinným zlomkem. Symbolem $E(x)$ značí se obecně *celistvé číslo*, obsažené v čísle x; operuje se tedy v praksi výhradně s čísly

$$\frac{E(10^n \,.\, x)}{10^n},$$

čili s *E-funkcemi.*

A nyní jest již stanovisko approximační mathematiky zřejmé. *Každé E-funkci*, jakožto číslu racionálnému, *odpovídá určitá tečka* — a tedy i délka, již lze s přesností, shora pro měřictví vytčenou, na přímce odměřiti; a naopak. *Každé tečce* — resp. délce, jí končící — *odpovídá určitá E-funkce při určitém přípustném n.* Stačíť měřiti do toho stupně přesnosti, že rozměr oné tečky jest mezní hodnotou onoho měření. Tak tomu jest při zobrazování délek tužkou na papíře, křídou na tabuli. Obdobně tomu jest při měření jinými přístroji a na jiných podkladech.

Co se týče skutečného provedení, začne se zajisté tím, že se na přímé linii založí škála bodů, od sebe stejně vzdálených; na takovémto měřítku může se pak každý dílec děliti a nové dílce opětně děliti, pokud se to prakticky vůbec provésti dá. Pomocí takového měřítka shledáme pak, že skutečně každému bodu přímky určité číslo může býti přiřaděno a naopak každému číslu určitý bod, a že záleží jen na subjektu, odhadnouti na měřítku správně číslo, odpovídající onomu bodu, resp. vyznačiti co nejpřesněji na přímce té bod, odpovídající danému číslu (racionálnému). Je-li však číslo to zlomek, jehož jmenovatel jest příliš veliký, tu *myslíme si*, že bychom snad pomocí jiných nástrojů i tak jemné měřítko mohli provésti, že by odměření onoho čísla bylo možné. Lze si dále i *mysleti*, že by přesnost dělení a měření byla možná do libovolně vysokého stupně; pak ovšem můžeme pronésti větu, že každému číslu vůbec odpovídá určitý bod na přímce a naopak, ale nemohouce ji prakticky dokázati, smíme vysloviti ji jen jako zásadu. Tak děje se nyní v moderních učebnicích, na př. v Serret, *Lehrbuch der Differential und Integralrechnung* (překlad od Harnacka-Bohlmanna, 1897) v II. svazku na str. 4.: Alsdann kann man das folgende

Axiom aussprechen: *Axiom.* „Die Gesammtheit aller reellen Zahlen x und die Gesammtheit aller Punkte P einer Geraden lassen sich *durch unsere Messung* eindeutig aufeinander beziehen; derart, dass jeder reellen Zahl ein und nur ein Punkt der Geraden entspricht und jedem Punkte der Geraden eine und nur eine reelle Zahl."

Korrespondence mezi „čísly" a mezi „body" jest tedy v approximační mathematice a geometrii oboustranně jednoznačná. Jest to zkušenost objektivně nabytá. (*So fängt denn alle menschliche Erkenntniss mit Anschauungen an*).

Opačně, v každém oboru pokročiti lze od přesnosti omezené a správnosti přibližné k přesnosti absolutní a správnosti bezpodmínečné. Děje se to pomocí vhodných axiomů: místo bodů-teček zavede se axiomaticky geometrický prvek „bod", jenž nemá žádných rozměrů; místo E-funkcí zavedou se abstraktní čísla, nekonečné zlomky, jichž přesnost jest neomezená, a tak obdobně dále. (*Geht von da zu Begriffen*).

Na místě praktické vědy máme pak idealisované představy (pojmy) a soustavu logických soudů. Co na př. při kreslení pokaždé přibližně jest správné, vyslovuje abstraktní geometrie s přesností absolutní a, *je-li to nedokazatelné,* jako geometrické axiomy. Není tím však řečeno, že by empirická geometrie neměla zásad a sice jednoduchých.*) Rozdíl však tkví v tom, že v praksi existují vždy mezní hodnoty, kdežto v abstraktní vědě žádných mezí přesnosti není. Ve všech praktických oborech vůbec existují mezní hodnoty pro přesnost [*Schwellenwerte der Genauigkeit* **)]. To platí o všech fysikálních veličinách, ano i o čase.

To, co praksi pokaždé přibližně bylo přesné, že totiž každému „bodu" odpovídalo „číslo" a naopak, to stalo se přirozeně požadavkem i pro analytickou geometrii; neboť dojista jest přirozené přáti si, aby i v theorii platilo, co v praksi jest

---

*) Tak jsou na př. zásadami praktické geometrie: *„Dva body stanoví přímku tím přesněji, čím dále leží od sebe", „Dvě přímky stanoví průsečný bod tím přesněji, čím více se úhel, jimi sevřený, blíží pravému", „Bodem, položeným mimo přímku, vésti lze k téže jen jedinou rovnoběžku".*

**) Klein [9].

běžné. Zde vzala asi původ svůj snaha, zcela přesně dokázati, že každému bodu (ne již v uvozovkách) odpovídá číslo reálné a každému číslu bod na přímce. — Tak vznikly abstrakcí a idealisováním i množina čísel reálných i geometrie Euklidova; *základem není tu již empirie, nýbrž zásady a ideje.* (*Und endigt mit Ideen;* Kant).

Po dlouhou dobu — as dva tisíce let — považovala se geometrie Euklidova za naprosto správnou i objektivně, t. j. že prostor, vybudovaný na základě axiomů Euklidovy soustavy, má tytéž vlastnosti a vyjadřuje tytéž mathematické vztahy, jaké má resp. které existují v prostoru, jejž na tělesech vnímáme svými smysly, že tedy prostor Euklidův a prostor skutečný se kryjí identicky. Byl to teprve Lobačevskij *) a s ním současně Bolyai **), již otřásli vírou v objektivnou platnost obecně uznávané geometrie. Stalo se to podáním důkazu, že i na základě axiomů soustavy Euklidovy s vynecháním axiomu IV 1. vybudovati lze geometrii a sice novou, obecnější, *v níž není logických nesrovnalostí,* a jež má tedy také mathematickou existenci a může zcela dobře právě tak býti objektivně platnou pro prostor světový, jak jí do té doby uznávána byla geometrie Euklidova. Novotina ta zdála se svého času přímo revoluční, anoť to bylo po Kantovi, jenž Euklidův názor o prostoru prohlásil za *apriornou* formu nazírací a tedy *apodikticky platnou.*

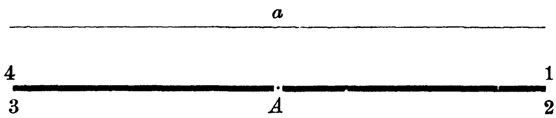
Vliv Kantovy nauky a dávné tradice byl tehdáž příliš mocný, než aby se geometrie Lobačevského nebyla považovala leda za „akademický projev mathematického ducha“, jejž však ostatně k ničemu nelze potřebovati. Ale odpadlictví od nauky Euklidovy jakoby bývalo leželo již ve vzduchu: současně v Uhrách J. Bolyai a před oběma Gauss***) dospěl ve svém, badání o konstituci prostoru — třebas jen v notickách neuveřejněných — k témuž výsledku, že totiž není možná dokázati, že určitým bodem mimo přímku vésti lze pouze jedinou rovno-

---

*) Lobačevskij [1], [2], [3], [4].
**) J. Bolyai [1].
***) Gauss [1].

běžku, a že pomocí opačné zásady „vésti jich lze více“*) konstruovati lze novou geometrii, jež právě tak jako Euklidova

*) Approximační geometrie učí, že bodem (A) mimo přímku (a) položeným k této vésti lze jen jedinou rovnoběžku. Jest to fakt, bezpočtukráte zjištěný. Rovnoběžka ta není však ideálnou přímkou, mající délku bez šířky, nýbrž jest rovným proužkem, jenž má vždy konečnou, byť sebe menší šířku. Jest tedy otázkou, zdali i v precísní geometrii tak tomu jest, aneb je-li přípustnou ještě jiná možnost. V praksi jest délka oné rovnoběžky vždy *konečnou*, proužek ten jest přibližně teninkým obdélníkem (1 2 3 4).



Mysleme si body 1, 2, 3, 4 spojeny s bodem A ideálními přímkami; úhel, sevřený přímkami $A1$ a $A2$ (resp. $A3$ a $A4$) jest v praksi *vždy konečný*, byť sebe menší. Jest tedy otázkou, jakou abstrakci dlužno provésti při přechodu do geometrie precísní? Jednou z možných abstrakcí jest postulát Euklidův. Druhou možnou jest však následující: Rovnoběžka v pravo od bodu A jest ideální přímka $A1$, v levo přímka $A4$, a úhel $1A2$ (resp. $3A4$) *zůstane konečný* (zcela určité velikosti), ale tak malý, *že jej v praksi stěží neb vůbec nelze skonstatovati.* Učiníme-li $A1 = A3$, $A2 = A4$, jsou patrně délky $\overline{13}$ a $\overline{24}$ přímkami, a obě jsou — definitoricky — rovnoběžkami bodem A k dané přímce a. Veškeré přímky vedené v proužku mezi nimi bodem A nejsou rovnoběžkami ani neprotínají přímky a, a zovou se proto *divergentní.* Všecky ostatní protínají danou přímku a slují proto *konvergentní.* Zásada takto vyslovená praksí nikdy nemůže býti vyvrácena, je-li velikost úhlu $1A2$ *pod mezí praktického měření*; mohla by však býti objektivně prokázána, kdyby (na př. při astronomických délkách) bylo lze úhel ten skonstatovati. *Geometrie, zbudovaná na této zásadě, jest geometrií Lobačevského.*

V praksi jest to však kreslícímu dojista lhostejno, má-li si ideální rovnoběžku mysleti uprostřed narýsovaného proužku jedinou aneb dvě, jež zcela zapadnou do plošky onoho proužku. Proto v praksi každý použije jednodušší geometrie Euklidovy a jednoduchých početních vzorců jejích, i kdyby objektivnou platnost měla zásada Lobačevského. Jedině astronomové museli by v tomto případě používati při svých měřeních komplikovaných vzorců Lobačevského.

Případ tento jest vhodnou ukázkou toho, jak vznikají geometrické axiomy. Zásady ty jsou zkušeností vždy jen approximativně potvrzeny; jednáť-li se o velmi malé aneb o velmi velké rozměry, jest naše představování si v prostoru v značné míře nepřesné — běřou se tu patrně střední hodnoty. Proto každý axiom, jenž zkušeností v dostatečné míře přibližně jest doložen, musí se zdáti přípustným; je-li jím či ne, o tom rozhoduje, neodporuje-li aneb odporuje-li *logicky* zásadám ostatním.

nemá v sobě rozporů a jež tedy — jak již podotčeno — stejně jest oprávněna býti objektivně platnou pro prostor světový. Která z obou geometrií má však tu objektivnou platnost?

Tu jsme u otázky, odkud a jaký máme názor o prostoru, u otázky, na jejímž základě vyvinula se a během času od filosofie se oddělila nová věda: *Metageometrie* *).

Stanovisko metageometrie.

Co jest to „prostor“?

Vidíme tělesa a přisuzujeme jim délku, šířku a výšku. Z pohybování víme, že tělesa jedna ustupují a jiná že zabírají jich místa; stále ze zkušenosti, pozorováním, nabýváme představy o něčem, co zůstává při všech těch tělesech, při každém pohybu atd. nezměněno — představy prostoru. *Empiricky* docházíme vědomostí o vlastnostech tohoto prostoru; snažíme se vědomosti ty uspořádati a uvésti je na jednoduché úsudky, jež jsou pokud možno na sobě nezávislé, by žádný z nich nebyl ani celkově, po případě ani z části zbytečný, a aby všem jich logickým důsledkům opět zkušenost dávala za pravdu. Tak budujeme si pomocí zkušenosti zcela rozumově *ideu* prostoru; neboť zásad vytčených docházíme neúplnou indukcí. *Prostor na nich zbudovaný jest idealisovaný* a nemusí míti objektivnou platnost.

Tak vznikl z prvu Euklidův názor o prostoru. Jeho axiomy geometrické čili na sobě nezávislé hypothésy o konstituci prostoru nebyly však vytčeny libovolně, nýbrž jsou to zkušenosti, o jichž správnosti se v praksi stále a stále přesvědčujeme, takže *se nám zdá, že jsou apodikticky zajištěny, absolutně správny.* Tohoto mínění — o apodiktické jistotě — byl Kant. **)

Kant považuje geometrii za vědu apriornou, tvrdě kategoricky: Pojem prostoru musí býti a priori a subjektivný, poněvadž geometrie jest apodiktickou, a geometrie musí býti apodiktickou, poněvadž prostor jest pojem a priori a subjektivný. Proto Kantovi byla geometrie Euklidova *geometrií jedině možnou.*

---

*) Russel [3].

**) Kant [1].

Není pochybnosti, že takovým kategorickým imperativem záhada ta by byla velmi jednoduše rozřešena. Jest však otázkou, je-li to skutečně pravda. Metageometrie ukázala nesprávnost prvé z Kantových thesí, druhá these zůstala kontroversní. Tím však základ myšlénky Kantovy — apriornost pojmu prostoru — není ovšem podvrácen.

Empiristům jsou axiomy geometrické hypothésami, jež lze přijati nebo nepřijati, ale jež jsou naprosto nutné, má-li geometrie jako abstraktní věda přesně, vědecky býti vybudována. Geometrie taková (Euklidova i neeuklidovské) jest pak vědou formálnou, a není to úkolem mathematika, rozhodovati, zdali prostor, jak jej nazíráme smysly svými, hoví Euklidově neb některé z neeuklidovských geometrií. To jest úkolem metageometra; prostor, které geometrie de facto přiléhá na prostor světový, tu otázku — jak Lobačevskij doufal — mohl by empiricky řešiti *astronom*.

Objektivná platnost axiomu rovnoběžek není prokázána. Euklidova čili parabolická geometrie neobsahuje však v sobě žádných logických rozporů; proto skutečně uvádí v evidenci mathematické vztahy, a jest tedy vědou formálnou. *Avšak tak tomu jest i při ostatních geometriích.*

Jako lze dáti padnouti axiomu Euklidovu pro prostor světový — poučujeť nás zkušenost o vlastnostech jen nepatrné části jeho — tak jest volno učiniti totéž s jinými i ze zásad I-V i z definic prvků geometrických. Geometrie Lobačevského *) čili hyperbolická byla jen prvým krokem na této dráze; po ní následovaly: geometrie eliptická**), v níž definice přímky neobsahuje v sobě podmínku nekonečné délky a v níž se tedy všecky přímky skutečně protínají, geometrie semieuklidovská***), v níž neplatí axiomy spojitosti, geometrie nepythagorejská †), v níž neplatí axiom Archimedův, platí však axiom sousednosti, atd.

Která z geometrií těch má objektivnou platnost, není otázkou mathematickou. V tom ohledu speciálně budiž pouká-

*) Lobačevskij [2], [3].
**) Riemann [1], Klein [1], [2] a [3].
***) Dehn [1].
†) Hilbert [4].

záno na Milhaudovu práci „*La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance*“ v Revue philosophique (1888)*).

Cantor vyslovil (dle sdělení prof. Hilberta) domněnku, že z množin jím konstruovaných reálnou, *objektivnou* existenci (v přírodě) může míti jedině množina prvé a druhé mohutnosti. V tomto případě existovaly by tedy v prostoru, pokud se týče množin bodů, jen body diskrétní po př. s body „mezními“ nebo pantachie (prvá mohutnost) a pak ihned kontinuum (druhá mohutnost). Jeť jednou z obecně známých vět Cantorových, že n-dimesionálné kontinuum má tutéž mohutnost jako kontinuum lineárné. Kdyby skutečně podařilo se, třebas noetice, domněnku tu dokázati, nemohla by míti jiná geometrie objektivnou platnost vyjma té resp. těch, do nichž prvky geometrické jsou uvedeny tak, že se vyskytují pouze v množinách mohutnosti prvé a druhé.

Dejme tomu, že by se dále podařilo dokázati *objektivnou* platnost rovnoběžkového axiomu Euklidova a že množina reálných čísel jest mohutnosti druhé. Pak by bylo evidentní, že tím *aequivalence* mezi body skutečné přímky a čísly reálnými jest zajištěna. Avšak skutečně platná geometrie byla by pak Euklidova; tož: „Hle, zde jest důkaz aequivalence oné pro geometrii Euklidovu!“

Mohl bych nechati čtenáře samotného domysliti se slabin tohoto výroku. Avšak snad by mohl býti „hic Rhodus“. Ano, bylo by jisto, že *prostor skutečný* jest *Euklidův* **), a krom toho, že každému číslu reálnému přiřaditi lze na přímce bod. Byl by to však důkaz *v geometrii Euklidově?* — Ne! — *Nedokazatelnost nějakého výroku v určité geometrii značí, že výrok ten není logickým důsledkem axiomů geometrie té*, že tedy jej nelze dokázati nebo dedukovati *bez přispění nových zásad*, cizorodých vět, na nichž geometrie ta *nebyla* založena. Vymezení mohutnosti prvků geometrických, jak by je v tom předpokládaném případě podávala geometrii theorie poznání, *není* však *logickým důsledkem*

---

*) Další odborné práce: Andrade [1], Ball [1], Bonnel [1], Calinon [1], Hölder [1], Lechalas [1] a [2], Mansion [1], Poincaré [1], Russel [1], [2] a [3], Sorel [1], Tannery [1].

**) t. j. prostor, v němž splněn axiom IV.

zásad soustavy Euklidovy, nýbrž věta na nich zcela nezávislá, *nová zásada*, jež připojena k soustavě Euklidově, nechala by sice *prostor* Euklidův prostorem, v němž platí axiom IV., ale soustavu axiomů by doplnila tak, že by takto rozšířený systém podstatu skutečného prostoru vystihoval přesněji nežli soustava Euklidova. *Nebyl by* to tedy důkaz dožadované aequivalence *v geometrii* Euklidově; neboť v té o vymezení mohutností prvků není vůbec řeči.

Vadnost výroku onoho ještě silněji dokumentovala by Cantorova theorie množin. Aequivalence dvou množin neznamená nic více, než-li že každému prvku jednoho množství přiřaditi lze jeden prvek druhého množství a naopak; *ale bez ohledu na seřazení prvků obou množin.* Aequivalence, jak ji požaduje analytická geometrie, jest pojem mnohem užší. Žádá totiž, aby číslům seřazeným *dle své velikosti* odpovídaly body přímky seřazené *dle své konsekutivnosti.* A to jest opět známá věta z theorie množin, že při určitých, předem vytčených seřazeních prvků dvou množin *každému* prvku jedné množiny nemusí odpovídati prvek druhé množiny, *a přece jich mohutnosti mohou býti identické.* Jest tedy přípustno, aby ve vytčeném zde seřazení pro iracionálná čísla $i_1, i_2, i_3, \ldots$ neexistovaly na přímce v prostoru Euklidově žádné body, jež by bylo lze jimi očíslovati, a by přece mohutnosti obou množin byly identické. Ba, Cantorova theorie učí dále, že ona iracionálná čísla $i_1, i_2, i_3, \ldots$ mohla by se vyskytnouti nejen v konečném, nýbrž i v nekonečném počtu a sice opět nejen v mohutnosti prvé, *nýbrž i v množině o mohutnosti lineárného kontinua* — aniž by aequivalence obou transfinitních množin vzala vůbec za své. Nebyla by to ovšem oboustranně jednoznačná korrespondence množin s dodatkem: v seřazení prvků jedněch dle velikosti a druhých dle konsekutivnosti — nýbrž v *jiných*, a tato *jiná* seřazení podávala by průkaz o identitě mohutnosti čísel reálných a mohutnosti lineárného kontinua. Mohutnosti byly by identické a přece by nebylo lze znázorniti každé reálné číslo délkou dle postulátu analytické geometrie.

Avšak, i upustí-li se od objektivné platnosti geometrie Euklidovy, na věci nic se nezmění. Je-li množina reálných čísel skutečně druhé mohutnosti, pak jest jí rovněž množina bodů na přímce. To plyne z 1-ho odstavce článku tohoto (str. 18). Aequivalence tím jest zajištěna, ale nikoliv korrespondence v svrchu vytčených seřazeních prvků obou množin; neboť k tomuto jest zapotřebí, aby obě množství byla perfektní, kdežto geometrie Euklidova nemá tohoto postulátu mezi svými důsledky.

Nechť tedy každému číslu reálnému odpovídá na přímce bod anebo ne, v prostoru geometrie Euklidovy ani lístek se nepohne.

(Pokračování.)

Poznámka k differenciální rovnici ploch rotačních.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

Jest známo, že integrál parciální differenciální rovnice lineární

$$\frac{\partial f}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z} f_3(x,y,z) = 0,$$

aneb rovnice

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial z}{\partial y} f_2(x,y,z) = f_3(x,y,z),$$

stanoví se tak, že určí se integrály soudobých differenciálních rovnic

$$(2) \qquad \frac{dx}{f_1(x,y,z)} = \frac{dy}{f_2(x,y,z)} = \frac{dz}{f_3(x,y,z)},$$

ve tvaru

$$\varphi_1(x,y,z) = \text{Const}_1, \quad \varphi_2(x,y,z) = \text{Const}_2,$$

a že pak jakákoli funkce

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

jest obecným integrálem rovnice předložené.