Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 81--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123278`

jež se jeví při reliefech *Thorwaldsenových*, jenž, jak obecně známo, si při svých výtvarech počínal zcela jinak než předchůdci výše vytknutí a jehož umělecká díla se honosí velikou přirozeností.

My máme za to, že odchylky tyto dají se rovněž tak vysvětliti neshodou úkonu zrakového a centrálního promítání, jako při perspektivě rovinné, jak jsme pro poslední případ učinili ve svých pojednáních v Královské české společnosti náuk*) a že tedy *nynější theorie perspektivy prostorové jest právě tak správné přiblížení se skutečnosti jako perspektiva rovinná* a že bychom buďto museli nechat padnout obé, aneb že musíme uznati obé za stejně správné. Chováme tudíž oproti onomu tvrzení velikou reservu a musíme dotud trvati na pravosti theorie nynější, pokud usvědčeni nebudeme theorií lepší, jež pádně vytkne chyby, kterých by se nynější dopouštěla.

Zdál se nám tedy pokus zbudovati přesně a krátce principy perspektivy reliefní, jež v nejnovějším čase zase se těší vždy více rostoucí oblibě umělců výtvarných, zajímavým a vděčným.

(Dokončení.)

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Dokonalá čísla, o kterých jsme již v XVI. ročníku tohoto časopisu (str. 167) referovali, nepřestávají dosud býti předmětem studia arithmetických theoretiků. Jsou to, jak známo, čísla, která se rovnají součtu veškerých svých dělitelů; ku příkladu $6 = 1 + 2 + 3$. Takových čísel nalezeno devět, vesměs sudých, a nepodařilo se dosud rozhodnouti, může-li existovati dokonalé

*) Viz následující pojednání:

Über perspektivische Restitution, Bewegung und Verzerrung. (Zprávy o zasedání král. české společnosti náuk 6. května 1886.)

Über eine specielle durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation. (Tamtéž 21. května 1886.)

Untersuchung der Wirkungen perspectivischer Darstellungen. (Tamtéž 4. června 1886.)

číslo liché. Na místě řešení této obecné otázky objeveny některé zvláštní vlastnosti, které, jak se zdá, žádané řešení připravují.

Tak dokázal *Servais* (Mathesis, tome VII. 1887, p. 228, VIII. 1888, p. 92, 135): Každé dokonalé sudé číslo větší než 6 jest tvaru $9n+1$ a ukončeno číslicí 6 neb 28. Není lichého čísla dokonalého, které by obsahovalo jen jednoho neb jen dva neb tři prvočinitele. Je-li nějaké dokonalé liché číslo obsahující n různých prvočinitelů, nejmenší z nich nepřevyšuje n.

Obtížemi úlohy lákán, sám proslulý *Sylvester* věnoval jí svou pozornosť (Comptes Rendus, 1888, février). Podal důkaz, že není lichého čísla dokonalého, které by obsahovalo méně než 6 různých prvočinitelů. Dokonalé číslo liché nesoudělné s číslem 3, musí obsahovati více než 8 různých prvočinitelů.

Catalan (Mathesis, tome VII. p. 230, tome VIII. p. 112) vyslovil věty: Součet převratných hodnot všech dělitelů dokonalého čísla, číslo samo v to čítaje, rovná se 2. Je-li liché číslo, nesoudělné s číslem 105, číslem dokonalým, má nejméně 26 různých prvočinitelů a nejméně 45 číslic.

Rovnice Eulerova $\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = 0$, ve které X jest bikvadratická funkce proměnné x a X_1 táž funkce proměnné x_1, může býti dle *Halphena* integrována elegantním spůsobem následujícím. Zvolme tři kvadratické funkce a, b, c proměnné x tak, aby vyhověly podmínce

$$ac - b^2 = X;$$

a_1, b_1, c_1, nechť jsou tytéž funkce x_1
a tedy $$a_1 c_1 - b_1{}^2 = X_1.$$

Potom jest žádaný integrál

$$(ac_1 - 2bb_1 + a_1 c)^2 = 4(b^2 - ac)(b_1{}^2 - a_1 c_1),$$

který i jinak ještě upraviti lze. Uzávorkovaný mnohočlen na levé straně jest totiž dvojnásob kvadratická a souměrná funkce veličin x, x_1, která při $x = x_1$ stává se rovnou $2X$; značí-li P jakýkoli jiný mnohočlen těchže vlastností, t. j. dvojnásob kvadratický, souměrný ku x a x_1 a stávající se rovný $2X$ při $x = x_1$, nemohou se oba mnohočleny lišiti ničím než členem $\lambda (x - x_1)^2$, kdež λ jest libovolná konstanta. Hledaný integrál můžeme tedy psáti též takto

$$[P + \lambda (x - x_1)^2]^2 = 4XX_1.$$

Dle toho, jaký tvar výrazu P udělíme, nabývá též integrál různé podoby a obsahuje vždy jedinou integrační stálou λ. Předpokládáme-li na př. X rozloženo ve dva kvadratické činitele, tedy

$$X = AC, X_1 = A_1 C_1,$$

můžeme položiti

$$P = AC_1 + A_1 C,$$

načež po krátká úpravě objeví se integrál ve formě

$$\frac{\sqrt{AC_1} - \sqrt{A_1 C}}{x - x_1} = \text{const.},$$

kterou podal *Laguerre*.

(Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tome II. 1888. p. 40.)

Geometrie útvarů pomyslných. Pojem dvojpoměru čtyr bodů přímé řady lze jak před několika lety *Lucas* (Comptes Rendus, tome LXXVII. r. 463) ukázal, rozšířiti na libovolné čtyry realné body v rovině. Jsou-li totiž x_k, y_k pravoúhlé souřadnice bodu a_k, a klademe-li

$$z_k = x_k + iy_k, \quad i = \sqrt{-1},$$

můžeme dvojpoměř čtyř realných bodů v rovině definovati takto:

$$K_\lambda = (a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Dvojpoměr tento jest hodnota soujemná, jejíž modul

$$K = \frac{a_1 a_3}{a_2 a_3} : \frac{a_1 a_4}{a_2 a_4},$$

amplituda pak

$$\lambda = \measuredangle a_1 a_3 a_2 - \measuredangle a_1 a_4 a_2.$$

Na pojmu tomto a za pomocí zvláštního zastoupení bodů pomyslných body realnými založil *Tarry* geometrickou theorii útvarů pomyslných.

Bodu pomyslnému přisuzuje autor původ algebraický a stanoví, že jest určen dvěma realnými body; nepodává sice bližší výklad tohoto určení, myslíme však, že je lze spůsobem analytickým vysvětliti takto: Má-li pomyslný bod souřadnice $m + in$, $p + iq$, jest souřadnicemi m, p určen realný bod A, souřadnicemi n, q realný bod A'; těmito dvěma realnými body určen jest patrně daný bod pomyslný. Tarry udává ještě jiný spůsob, kterak může býti pomyslný bod zastoupen útvary realnými. Myslíme-li si totiž úsečku AA' otočenou kolem A v kladném smyslu o úhel pravý do polohy $A\alpha$, jest pomyslný bod určen realnou přímkou zastupující AA' (droite support) a realným zastupujícím vnějším bodem α (position extérieure du point imaginaire).

Tím poskytnuta možnosť definovati dvojpoměr čtyr pomyslných bodů na realné přímce: jest to dvojpoměr bodů vnějších je zastupujících. Třemi body danými a hodnotou dvojpoměru jest čtvrtý bod jednoznačně určen.

Dány-li tři realné paprsky svazku, a protneme-li je libovolnou příčkou, můžeme v této stanoviti jediný bod dle daného komplexního dvojpoměru. Geometrické místo bodů určených takto na všech možných příčkách při stálé hodnotě dvojpoměru slove pomyslnou přímkou; tato obsahuje jediný bod realný, totiž střed svazku. Přímka pomyslná jest určena bodem realným a bodem pomyslným aneb dvěma body pomyslnými. Dány-li čtyry přímky realné neb pomyslné, jdoucí jedním realným bodem, protínají je všechny možné příčky ve čtveřině bodové stálého dvojpoměru. Totéž platí o paprscích svazku se středem pomyslným, a tak podán obecný výměr dvojpoměru čtveřiny paprskové. Jsou-li dány čtyry body na pomyslné přímce, a promítáme-li je z bodu mimo přímku daného, obdržíme čtveřinu paprskovou stálého dvojpoměru; tím definován dvojpoměr čtyř bodů přímky pomyslné.

V tomto smyslu pokračuje pojednání Tarryovo dále až ku pomyslným kuželosečkám; ukazuje se v něm — a to jest konečný jeho účel — že zákony projektivnosti a reciprocity jsou platnými též pro imaginárné útvary v realné rovině.

(Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Toulouse, 1887.)

Rektifikace oblouků kuželosečkových. Jsou-li na elliptickém kvadrantu omezeném vrcholy a, b dány dva body m, n tak, že normály v těchto bodech sestrojené jsou stejně vzdáleny od středu ellipsy, lze rozdíl elliptických oblouků $am - bn$ geometricky sestrojiti. K známé této větě, kterou v předešlém století objevil *Fagnano*, připojili kolem r. 1840 *Graves* a *MacCullagh* věty následující: Dány-li dvě konfokálné kuželosečky, které se neprotínají, a vedeme-li bodem vnější z nich tečny ku vnitřní, jest součet obou tečen zmenšen o oblouk obsažený mezi body dotyčnými veličina stálá. Protínají-li se dvě konfokálné kuželosečky v bodě m a vedeme-li bodem n jedné z nich tečny an, bn ke druhé, jest rozdíl oblouků $am - bm$ roven rozdílu tečen $an - bn$.

Chasles pak dokázal r. 1843: Tečny v krajních bodech dvou oblouků téže kuželosečky, jichž rozdíl lze rektifikovati, omezují čtyrúhelník o kružnici opsaný. Vedeme-li bodem n ke kuželosečce tečny na, nb, a sestrojíme-li kružnici, která se dotýká obou těchto tečen i kuželosečny, této v bodě m, jest rozdíl oblouků $am - bm$ roven rozdílu tečen $an - bn$.

Nejnověji ukázal *Humbert* (Nouvelles Annales, 1888, p. 5), jak lze tyto věty rozšířiti pro křivky libovolného stupně. Dána-li křivka $n$té třídy a kružnice, určují společné jich tečny na křivce n oblouků, jichž algebraický součet rovná se algebraickému součtu společných tečen. Budiž na př. dána ellipsa a kružnice, jichž vnější společné tečny dotýkají se ellipsy v bodech a_1, a_2, kružnice v bodech b_1, b_2; vnitřní společné tečny buďtež a_3b_3, a_4b_4. Potom jest

$$arc\ a_1a_3 - arc\ a_2a_4 = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + a_4b_4.$$

Protínají-li se tečny a_1b_1, a_4b_4 v bodě m, druhé dvě pak a_2b_2, a_3b_3 v bodě n, jest

$$a_1m + a_4m - arc\ a_1a_4 = a_2n + a_3n - arc\ a_2a_3,$$

což souhlasí s větami svrchu uvedenými, jelikož body m, n leží na ellipse konfokálné s danou.

Specielně oblouky elliptickými zabýval se v poslední době *Guimarães* (Teixeira, Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas; 1886, 1887, vol. VII., VIII.). Týž dokázal, že lze jednoduchým spůsobem vytknouti na elliptickém kvadrantu nekonečně mnoho oblouků, které lze rektifikovati. Jsou-li totiž a, b poloosy ellipsy, e její výstřednost, (x,y), (x',y') souřadnice bodů oblouk elliptický omezujících, lze délku oblouku toho vyjádřiti algebraicky, platí-li o souřadnicích podmínka

$$\frac{y'}{x'} = \mp \sqrt{2m-1} \cdot \frac{y}{x},$$

kdež značí

$$m = \frac{e^2}{b^2} \cdot \frac{a \pm x}{a \mp x}.$$

Římská plocha Steinerova. Tak slove zvláštní plocha 4. stupně a 3. třídy, jejíž vytvoření vymyslil *Steiner* r. 1844 za svého pobytu v Římě. Karakteristickou její vlastností jest, že každá rovina tečná protíná ji ve dvou kuželosečkách; tyto dvě křivky mají společné čtyry body, z nichž jeden jest bod, ve kterém rovina plochy se dotýká, ostatní tři pak obsaženy jsou ve třech určitých přímkách, které jsou dvojnásobnými přímkami plochy a protínají se v bodě jediném, trojnásobném bodě plochy. (Steiner, Gesammelte Werke, II. Bd. p. 723). Velice pozoruhodnou tuto plochu podrobně studovali *Kummer*, *Schröter*, *Cremona*, *Clebsch* a j. Analyticky jest vyjádřena souřadnicemi homogenními x, y, z, u vyhovujícími rovnicím

$$\varrho x = \varphi_1 \, (\xi, \eta, \zeta), \quad \varrho y = \varphi_2 \, (\xi, \eta, \zeta)$$
$$\varrho z = \varphi_3 \, (\xi, \eta, \zeta), \quad \varrho u = \varphi_4 \, (\xi, \eta, \zeta),$$

kdež φ jsou kvadratické funkce tří neodvisle proměnných ξ, η, ζ.

Tohoto vyjádření plochy užívaje, nalezl *Koenigs* následující zajímavou její vlastnosť. Dána buď rovina plochu Steinerovu protínající; rovina libovolné kuželosečky na této ploše protíná rovinu danou v určité přímce a tato má vzhledem ku zvolené kuželosečce určitý pol. Geometrické místo těchto polů vzhledem ku všem kuželosečkám plochy Steinerovy jest plocha téhož druhu, kteráž přejde v plochu druhého stupně, je-li rovina daná tečnou rovinou plochy Steinerovy. Geometrické místo středů všech kuželoseček ploše Steinerově náležejících jest opět plocha Steinerova.

(Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XVI, 1886, p. 15.)