Josef Novotný

Sestrojení polár kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 71--76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123276

Sestrojení polár kuželoseček.

Žákům středních škol podává

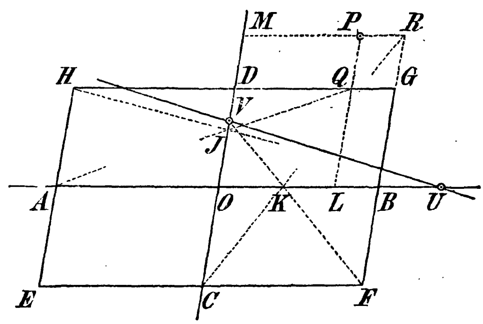
Josef Novotný,

professor v Přerově.

1. Polára jest tětiva tečných buď realných neb idealných sestrojených daným bodem (polem) ke kuželosečce. Sečné sestrojené polem ke kuželosečce protínají poláru v bodech harmonicky sdružených k polu vzhledem k průsečíkům s kuželosečkou a proto jest polára vždy realná. Když jest ellipsa neb hyperbola určena dvojinou sdružených průměrů a parabola tětivou a sdruženým průměrem, lze snadno vyšetřiti průsečíky poláry s těmi průměry, potažmo s tětivou a průměrem; též lze stanoviti směr poláry, tak že pak postačí vyšetřiti průsečík s jediným průměrem.

2. *Jest sestrojiti poláru bodu* P *k ellipse, objeví-li se průsečíky s dvojinou sdružených průměrů na nákresně.*

Sestrojení. Bodem P (obr. 1.) sestrojme rovnoběžky se sdruženými průměry, ty protnou bližší strany opsaného rovnoběžníka v bodech Q, R. Sestrojme dále spojnice AQ, CR, obdržíme na průměrech body J, K a tyto spojeny s H, F určí body U, V, jimiž polára prochází.



Obr. 1.

Důkaz. Buďtež AB $= 2a$, CD $= 2b$ osami soustavy souřadnic rovnoběžných, bod P budiž určen souřadnicemi $x = m$, $y = n$.

I zní rovnice poláry:

$$b^2mx + a^2ny = a^2b^2.^{*)} \tag{1}$$

Z podobných trojúhelníků AUJ, HQJ plyne:

$$OU : AO = HD : DQ,$$

z čehož
$$OU = \frac{a^2}{m}. \tag{2}$$

Z podobných trojúhelníků CVK, FRK plyne:

$$OV : CO = FB : BR,$$

z čehož
$$OV = \frac{b^2}{n}. \tag{3}$$

Pro průsečík poláry s průměrem AB položme v rovnici (1) $y = 0$, i vyjde:

$$x = \frac{a^2}{m}. \tag{4}$$

Pro průsečík poláry s průměrem CD položme v rovnici (1) $x = 0$, i jest:

$$y = \frac{b^2}{n}. \tag{5}$$

Srovnáním hodnot (2) a (4), (3) a (5) jest patrno, že polára prochází body U, V.

Z hodnot $OL = m$, $OM = n$ se zřetelem k rovn. (2), (3) jest:

$$OU . OL = \overline{OB}^2 \quad \text{a} \quad OV . OM = \overline{OD}^2,$$

t. j. body U, L; V, M jsou harmonické dvojiny vzhledem k A, B; C, D.

Poznamenání. Sestrojíme-li spojnice BQ, DR, obdržíme na průměrech body J′, K′. Paprsky GJ′, GK′ procházejí též body U, V.

Jak lze stanoviti body U, V z průsečíků Q_*, R_* na vzdálenějších rovnoběžkách ležících?

3. Jest sestrojiti poláru bodu P *k ellipse, objeví-li se jeden z průsečíků s dvojinou sdružených průměrů mimo nákresnu.*

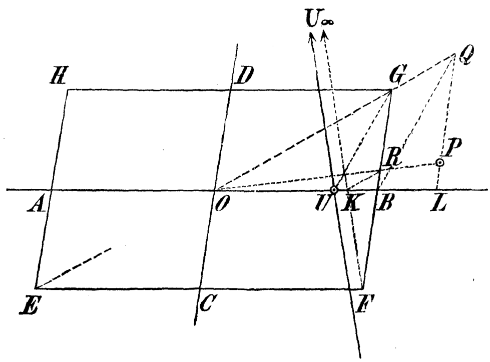
Sestrojení. Bodem P (obr. 2.), jehož polára seče v bodě U bližší průměr AB, sestrojme rovnoběžku se sdruženým průměrem CD, ta protne bližší úhlopříčnu EG v bodě Q. Paprsek bodem G rovnoběžně se spojnicí QB sestrojený určí na průměru AB bod U poláry.

Spojme dále bod P se středem ellipsy, průsečíkem R na bližší straně rovnoběžníka sestrojme rovnoběžku s bližší úhlo-

---

*) Viz Jandečka, Analyt. geom., 2. vyd., pag. 86.

příčnou EG, i vznikne na průměru AB bod K. Paprsek FK určuje úběžný bod U_∞ poláry.



Obr. 2.

Důkaz. Bod P budiž opět určen souřadnicemi $x = m$, $y = n$. I zní rovnice poláry:

$$b^2mx + a^2ny = a^2b^2. \qquad (1)$$

Z podobných trojúhelníků OBG, OLQ plyne se zřetelem k příčkám UG || BQ:

$$LQ = \frac{bm}{a}; \quad OU : a = b : LQ,$$

z čehož

$$OU = \frac{a^2}{m}. \qquad (2)$$

Z rovnice (1) pro $y = 0$ vyjde:

$$x = \frac{a^2}{m}. \qquad (3)$$

Hodnoty (2), (3) značí, že polára prochází bodem U.

Z podobných trojúhelníků OBR, OLP plyne:

$$BR = \frac{an}{m}.$$

Z podobných trojúhelníků KBR, OBG jest:

$$OK = \frac{a(bm - an)}{bm},$$

jakožto úsečka bodu K, jehož pořadnice se rovná nulle.

Směrnice A přímky FK určí se ze souřadnic bodů F, K:

$$A = -\frac{b^2m}{a^2n}. \qquad (4)$$

Z rovnice (1) vyjde směrnice A poláry:

$$A' = -\frac{b^2m}{a^2n}. \qquad (5)$$

Z rovnic (4), (5) plyne rovnoběžnosť přímek FK, UU_∞.

Poznamenání 1. Jsou-li $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ souřadnice průsečíků T, T_* poláry s ellipsou, platí pro PT, PT_*:

$$b^2\xi_1x + a^2\eta_1y = a^2b^2, \qquad (\alpha)$$
$$b^2\xi_2x + a^2\eta_2y = a^2b^2. \qquad (\beta)$$

Utvoříme-li rozdíl a součet rovnic (α), (β), obdržíme se zřetelem k hodnotám pro $\xi_1 \mp \xi_2$, $\eta_1 \mp \eta_2$:

$$my = nx, \qquad (\gamma)$$
$$a^2ny + b^2mx = a^2n^2 + b^2m^2, \qquad (\delta)$$

jakožto rovnice harmonické dvojiny paprsků PO, PU_∞, vzhledem k dvojině PT, PT_*.

Ze směrnice vyvozené z rovnice (δ) jest patrno, že paprsek PU_∞ jest rovnoběžný s polárou UU_∞ a proto paprsek PO že půlí tětivu TT_*.

Poznamenání 2. Sestrojíme-li bodem E rovnoběžku se spojnicí AQ, přijdeme též k bodu U.

Sestrojíme-li bodem R rovnoběžku s úhlopříčnou HF, vznikne na průměru bod K'. Paprsek GK' stanoví též směr poláry.

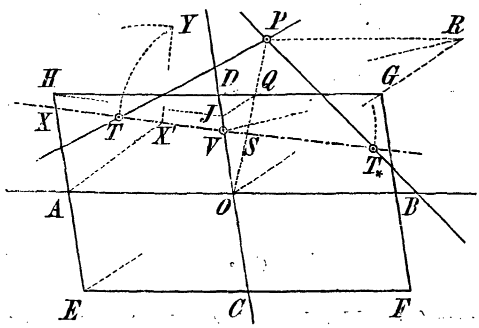
Jak lze stanoviti body U, U_∞ z průsečíků Q_*, R_* na vzdálenější úhlopříčné a straně?

Poznamenání 3. Když jest sestrojiti poláru v tom případě, že leží pouze průsečík V s průměrem CD v mezích nákresny (obr. 3.), užije se k stanovení úběžného bodu V_∞ a průsečíku V bodů Q, R, v nichž seče spojnice bodu P se středem bližší stranu rovnoběžníka a rovnoběžka bodem P s průměrem AB bližší úhlopříčnu.

Zároveň jest obsažen v odstavci 3. způsob sestrojení průsečíků U, V poláry s dvojinou sdružených průměrů lišící se od způsobu uvedeného v odstavci 2.

4. Polára bodu P může sloužiti *k sestrojení tečných z bodu* P *k ellipse.* Jest totiž zapotřebí sestrojiti průsečíky T, T_* poláry s ellipsou a tyto spojiti s bodem P.

Spojíme-li bod P (obr. 3.) se středem O, vznikne na poláře bod S tětivu TT_* půlící.



Obr. 3.

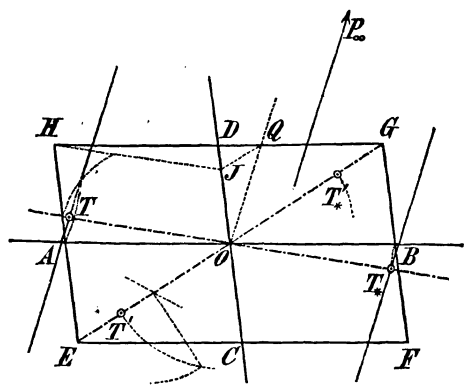
Polára protne stranu EH v bodě X, polára toho bodu prochází bodem A a polem P a určí na poláře TT_* bod X'. Body X, X' jsou harmonicky sdružené vzhledem k průsečíkům T, T_*. Známe-li střed S tětivy TT_*, najdeme body T, T_* na základě relace

$$\overline{ST}^2 = \overline{ST}_*^2 = SX \,.\, SX'.$$

Chceme-li tudíž najíti průsečíky poláry s ellipsou, spojme střed O s polem P, i vznikne bod S; nad délkou XS jako průměrem sestrojme polokružnici a protněme ji kolmicí k poláře v bodě X'. Ze středu S poloměrem SY protněme poláru v bodech T, T_*; i jsou PT, PT_* žádané tečné.

5. Když jest *sestrojiti tečné bodem úběžným* P_∞, *t. j. rovnoběžně s přímkou k ellipse,* přechází polára bodu P_∞ v průměr, jest tudíž zapotřebí stanoviti pouze směr.

Za tím účelem se sestrojí středem ellipsy (obr. 4.) rovnoběžka s danou přímkou, tím se zjedná na straně rovnoběžníka bod Q. Rovnoběžka s úhlopříčnou EG určí na průměru CD bod J a spojnice HJ udává směr průměru sdruženého. Průsečíky T, T_* průměru s ellipsou procházejí žádané tečné rovnoběžně s přímkou.



Obr. 4.

Poznamenání. V odstavci 4. obsažen jest zároveň spůsob, jímž lze najíti průsečíky T, T_* jisté přímky s ellipsou, považujíce přímku za poláru a najdouce k ní pol P.

V odstavci 5. obsažen jest spůsob, jímž lze najíti průsečíky T, T_* průměru s ellipsou, najdouce k němu pol P_∞.

Jak se sestrojí průsečíky T', T_*' úhlopříčné rovnoběžníka s ellipsou? (Dokončení.)

Drobnosti ze stereometrie.

Sděluje

T. V. Havlíček, s. professor ve Valašském Meziříčí.

I. Kubatura jehlance.

Rozdělíme-li výšku v libovolného jehlance J na n stejných dílků a vedeme-li dělícími body řezy b_1, b_2 . . ., b_{n-1} rovnoběžně s podstavou $b_n = b$, rozpadne se jehlanec pro $\lim n = \infty$ na n hranolů o výšce $\frac{v}{n}$.

Bude tedy

$$J = \frac{v}{n}(b_1 + b_2 + \ldots + b). \tag{1}$$

Zmíněné řezy mají se k sobě, jak známo, jako čtverce vzdáleností jejich od vrcholu jehlance

$$b_1 : b_2 : \ldots : b = 1^2\left(\frac{v}{n}\right)^2 : 2^2\left(\frac{v}{n}\right)^2 : \ldots : n^2\left(\frac{v}{n}\right)^2 = 1^2 : 2^2 : \ldots : n^2.$$