Vladimír Mašek

O ploše naplněné osami křivosti odpovídajícími společnému bodu šroubovic stejného spádu na svazku rotačních válců

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 101--107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123273

Par suite, ces points sont les points n-uples d'une involution du degré n et de l'ordre $(n-1)$ I^n_{n-1}, déterminée d'une manière univoque par un quelconque point d'inflexion pris pour point n-uple. On a, de plus, $n = 2^k - (-1)^k$. Tous ces points sont „remarquables" et ils sont au nombre de $n^2 = 2^{2k} + 1 + (-2)^{k+1}$.

O ploše naplněné osami křivosti odpovídajícími společnému bodu šroubovic stejného spádu na svazku rotačních válců.

Napsal Dr. *Vlad. Mašek.*

V rovině půdorysné π dán jest svazek kružnic o základních bodech A a B. Jednotlivými kružnicemi tohoto svazku prodložme rotační válce a uvažujme na nich šroubovice (levé i pravé) vycházející z bodu A a mající daný spád $tg\alpha$. Budiž bod M středem libovolné kružnice k svazku. Je-li R jejím poloměrem, leží střed křivosti S bodu A obou šroubovic na válci kružnicí k jdoucím na paprsku $\overline{AM}$ ve vzdálenosti $\overline{MS} = R \, . \, tg^2\alpha$ od středu M.

Poněvadž tento vztah zůstává v platnosti pro středy křivosti příslušné společnému bodu A všech uvažovaných šroubovic, platí: *Středy křivosti bodu A všech šroubovic naplňují v průmětně π přímku d* kolmou ku $\overline{AB}$ a mající od boku A vzdálenost $r.\,(tg^2\alpha + 1)$, je-li r poloměrem nejmenší kružnice daného svazku kružnic.

Poněvadž dále v každém bodu přímky d protínají se vždy dvě osy křivosti, *jest přímka d dvojnou přímkou sborcené plochy,* kterou všechny uvažované osy křivosti naplňují. Všechny tyto osy křivosti svírají s průmětnou π úhel $\beta = 90^0 - \alpha$. *Jest tudíž řídícím kuželem hledané plochy sborcené kužel rotační.*

Osy křivosti odpovídající bodu A obou šroubovic na libovolném z uvažovaných válců, procházejí středem křivosti na přímce d a leží v rovině půdorysně promítající. Platí tudíž: *Půdorysné průměty povrchových přímek uvažované sborcené plochy obalují parabolu p o ohnisku A a vrcholové tečně d.*

Z dosud uvedených vlastností hledané plochy plyne následující jednoduché její projektivní vytvoření: Protneme-li tečné roviny parabolického válce jdoucího parabolou p kolmo k π kolmými k nim tečnými rovinami řídícího kužele o vrcholu v ohnisku A této paraboly, obdržíme povrchové přímky plochy. Vytknuté tečné roviny kužele tvoří involuci, s kterou jest svazek tečných rovin parabolického válce projektivní.

Zvolíme-li průsečík přímky d se spojnicí $\overline{AB}$ za počátek O pravoúhlých os souřadných x, y, z, z nichž osa y se ztotožňuje se spolnicí $\overline{AB}$ a označíme-li a vzdálenost bodu A od osy $x \equiv d$, obdržíme, pokračujíce dle uvedeného vytvoření plochy, rovnici její ve tvaru

$$(1) \qquad x^2 (z^2 tg^2\alpha - y^2) = (z^2 tg^2\alpha - y^2 - ay.)^2$$

Z rov. (1) vidíme, že hledaná plocha jest sborcenou plochou 4. *řádu*, jak též plyne z výše uvedeného jejího projektivního vytvoření. Označme ji P^4.

Pro $z = 0$ plyne z rov. (1):

$$y^2 [(y - a^2) + x^2] = 0.$$

Průmětna (xy) protíná plochu P^4 v ose x co přímce dvojné a v nulové kružnici A.

Pro $y = 0$ plyne z rov. (1):

$$z^2 (z^2 tg^2\alpha - x^2) = 0.$$

Rovina (zx) protíná plochu P^4 v ose x co přímce dvojné a v přímkách a a b daných rovnicí $z = \pm\, x \cot g\, \alpha$.

Pro $x = 0$ plyne z rov. (1):

$$(2) \qquad (z^2 tg^2\alpha - y^2 + a y)^2 = 0.$$

Pošineme-li počátek směrem osy y do bodu $Q\left(y = \frac{a}{2}\right)$, přejde rovnice kuželosečky dané rov. (2) do tvaru

$$(3) \qquad \left(\frac{2y}{a}\right)^2 - \left(\frac{2z}{a \cot g\, \alpha}\right)^2 = 1.$$

Z rov. (3) plyne, že rovina (yz) protíná plochu P^4 v dvojnásobné hyperbole h, jejíž jeden vrchol jest totožný s ohniskem A paraboly obrysové p a druhý leží v počátku O os souřadných.

Dvojná křivka plochy P^4 sestává tudíž z dvojnásobné přímky $d \equiv x$ a z dvojnásobné hyperboly h.

Roviny asymptotické, dotýkající se plochy v nekonečně vzdálených bodech jednotlivých povrchových přímek jsou, jak patrno, totožné s tečnými rovinami řídicího kužele plochy o vrcholu A. Platí tudíž:

Asymptotické roviny všech povrchových přímek plochy P^4 obalují rotační kužel, mající vrchol v ohnisku A obrysové paraboly p.

Poněvadž stopy rovin asymptotických v průmětně π tvoří svazek paprskový o vrcholu A a průměty půdorysné jednotlivých povrchových přímek plochy P^4 stojí ku odpovídajícím paprskům tohoto svazku kolmo, platí: *Centrálné roviny jednotlivých povrchových přímek plochy P^4 jsou roviny půdorysně promítající. Strikční křivka plochy P^4 jest tedy totožná se skutečným obrysem plochy P^4 při promítání do průmětny (xy).*

Eliminací x z rovnice obrysové paraboly p a z rovnice plochy P^4, obdržíme po vhodné úpravě co stranorys strikční křivky rovnic

$$(4) \qquad \left(\frac{2y}{a}\right)^2 - \left(\frac{2z}{a \cot g\,\alpha}\right)^2 = 1.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (3) dvojné hyperboly h seznáváme, že *strikční křivka plochy p^4 promítá se do roviny (yz) co hyperbola totožná s dvojnou hyperbolou h.*

Strikční křivka sama jest prostorovou křivkou 4. *řádu*, neboť jest pronikem válce parabolického kolmého k π s válcem hyperbolickým jdoucím hyperbolou h kolmo k (yz).

Libovolná rovina ϱ rovnoběžná s průmětnou (xy) ve výši $z = b$ protne plochu P^4 v křivce, jejíž půdorysný průmět obdržíme, nanášíme-li, jak patrno, na tečny paraboly p od průsečíku jejich s tečnou vrcholovou na obě strany délku $d = b \,.\, tg\, \alpha$, t. j. délku poloměru kružnice, v níž protíná rovina ϱ řídicí kužel plochy mající vrchol v ohnisku A paraboly p. *Protíná tudíž rovina ϱ plochu P^4 v křivce 4. řádu známé pod jménem orthokonchoida přímky* *)

Určujeme-li známým způsobem půdorys skutečného obrysu plochy při promítání do roviny nárysné, obdržíme jeho rovnici, po pošinutí počátku os souřadných směrem záporné osy y do bodu O' vzdáleného od O o $\frac{a}{2}$, ve tvaru

$$(5) \qquad x^2 \left(y - \frac{a}{2}\right) = 4 a y^2.$$

Rov. (5) jest rovnicí *tangentové křivky paraboly.***) Platí tudíž: *Půdorysem skutečného obrysu plochy P^4 při promítání do roviny nárysné jest tangentová křivka paraboly.* Poloparametr základní paraboly této tangentové křivky jest $4a$ a pól jest totožný s bodem O.

Zdánlivým obrysem plochy P^4 v náryse jest křivka 6. řádu,***) jejíž rovnici lze snadno určiti.

Z dalších vlastností plochy P^4 uvedeme pouze konstrukci vrženého stínu plochy na rovinu (xy) v případě, že světelné paprsky jsou rovnoběžné s libovolnou povrchovou přímkou plochy a zmíníme se o dvou význačných případech tohoto osvětlení.

Proložme rotační řídicí kužel plochy kružnicí k opsanou libovolným poloměrem kol počátku O (obr. 1.). Přímka povrchová, s kterou jest směr paprsků rovnoběžný, nechť promítá se směrem tohoto paprsku do bodu V' na kružnici k. Buďtež $p_1 \equiv q_1$ půdorysné průměty přímek p a q plochy, jež se protínají v bodu D dvojné

---

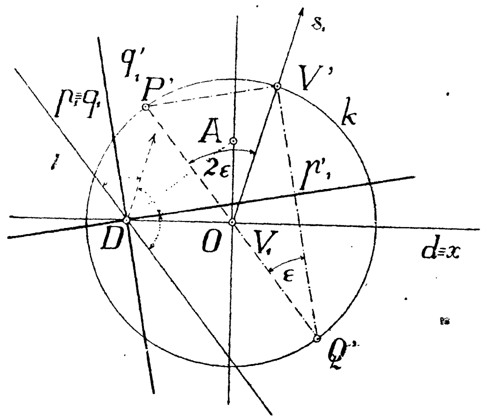
*) *Dr. H. Wieleitner:* Spezielle Ebene Kurven. 1908, p. 69.

**) *Dr. H. Wieleitner:* Spezielle Ebene Kurven 1908, p. 48.

***) $(x^2 + a^2)^3 + (16\, z^2 a^2 tg^2 \alpha + 8\, a^4 - 20\, a^2 x^2 - x^4)\, z^2 tg^2\, \alpha = O.$

přímky $d \equiv x$. Veďme vrcholem V přímky p' a q' rovnoběžné s p a q a vyznačme jejich průsečíky P' a Q' s kružnicí k. Pak rovnoběžky vedené s přímkami $\overline{P'V'}$ a $\overline{Q'V'}$ bodem D jsou vrženými stíny přímek p a q na rovinu (xy).

Přímo plyne, že $\sphericalangle\ V'Q'O = \frac{1}{2} \sphericalangle\ V'OP'$, neboť prvý jest úhlem obvodovým a druhý středovým nad tětivou $P'V'$. Poněvadž jest dále vržený stín $p'_1 \perp q'_1$, platí: Vržené stíny plochy P^4 v případě,



Obr. 1.

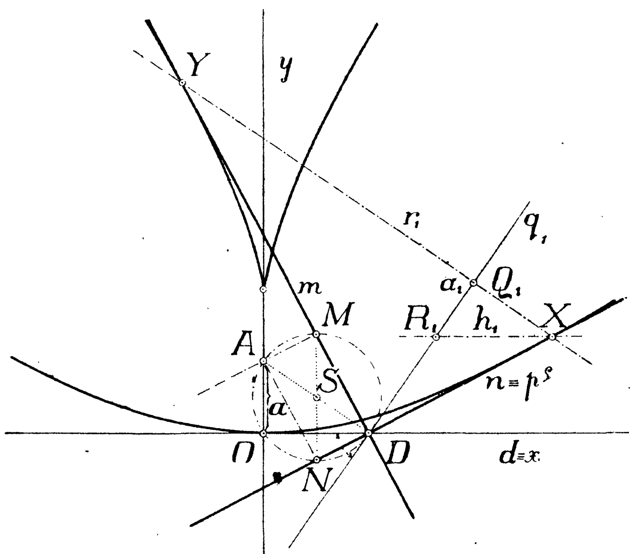
že světelné paprsky jsou rovnoběžné s libovolnou přímkou plochy, jest křivka, kterou obdržíme, protneme-li tečny obrysové paraboly p plochy P^4 tečnou vrcholovou a vedeme-li v těchto průsečících symetrály úhlů, jež svírají tečny paraboly se směrem s_1 půdorysu světelného paprsku. Křivka obalová těchto symetrál jest vrženým stínem plochy na rovinu (xy).

Zajímavé případy tohoto osvětlení obdržíme, je-li světelný paprsek rovnoběžný s přímkami řídicího kužele ležícími v rovinách (xz) a (yz).

V prvém případě jest mez *vrženého stínu křivkou obalenou symetrálami úhlů, jež svírají tečny obrysové paraboly p s tečnou vrcholovou.* Je-li A ohniskem obrysové paraboly p o vrcholové tečně $d \equiv x$ (obr. 2), a je-li bod D průsečíkem libovolné její tečny q_1 s tečnou vrcholovou, jsou symetrály m a n úhlu, jejž svírá tečna q_1 s tečnou vrcholovou, tečnami vrženého stínu. Opišme pravoúhlému trojúhelníku AOD kružnici o středu S. Pak tětivě $\overline{OD}$ odpovídá obvodový úhel $\widehat{Odq_1}$ a tedy polovičnímu úhlu $\widehat{nDq_1}$ odpovídá poloviční oblouk $\overset{\frown}{ND} = \frac{1}{2}\, \overset{\frown}{OD}$. Prochází tudíž přímka n koncovým bodem N svislého průměru kružnice. Podobně přímka m prochází druhým jeho koncovým bodem M. Při měnící se tečně q_1 paraboly p naplní body M a N *rovnoramennou hyperbolu* o vrcholech A a O. Poněvadž spojnice AM a AN jsou stále kolmé ku příslušným polohám přímek m a n, jest *hledaná křivka obalovou ramena pravého úhlu, jehož jedno rameno jde vrcholem rovnoramenné hyperboly a jehož vrchol probíhá tuto hyperbolu.* Platí tudíž: *Jsou-li světelné paprsky rovnoběžné s přímkami plochy ležícími v rovině* (xz) *jest vrženým stínem plochy na rovinu* (xy) *negativní úpatnice rovnoramenné hyperboly pro její vrchol co pól.*

Dotyčné body na jednotlivých polohách ramen pohybujícího se pravého úhlu plynou buď přímo pomocí geometrie kinematické neb možno je použitím plochy P^4 sestrojiti jednoduše následovně:

Uvažujme dotyčný hyperbolický paraboloid plochy P^4 podél přímky q. (Obr. 2.). Asymptotická rovina přímky q jest jeho jednou rovinou řídící. Za přímky druhé soustavy tohoto paraboloidu volme dvojnou přímku $d \equiv x$ a přímku a kolmou k π jdoucí dotyčným



Obr. 2.

bodem Q_1 průmětu q_1 přímky q s obrysovou parabolou p. Je-li $p^s \equiv n$ stopou světelné roviny jdoucí přímkou q, musíme vyhledati v této rovině ležící přímku druhé soustavy rovnoběžnou s rovinou řídicí určenou přímkami a a x, t. j. s rovinou nárysnou. Průmětna π protíná uvažovaný hyp. paraboloid v přímce x a v přímce r_1, jež prochází bodem Q_1 rovnoběžně se stopou asymptotické roviny přímky q, tedy jest $r_1 \perp q_1$. Vedeme-li průsečíkem X stopy $p^\varrho \equiv n$ s přímkou r_1 přímku h_1 rovnoběžnou s x, jest tato půdorysným průmětem hledané přímky h hyp. paraboloidu ležící v rovině ϱ. Bod R, v němž přímka h protíná přímku q, jest dotyčným bodem roviny ϱ s plochou P^4. Průmět bodu R směrem uvažovaných paprsků světelných ztotožní se však s bodem X, jenž jest již hledaným dotyčným bodem tečny $n \equiv p^\varrho$ s uvažovanou negativní úpatnicí hyperboly. Podobně v průsečíku přímky r_1 s přímkou m leží dotyčný bod Y.

Dospěli jsme k následujícímu zajímavému a jednoduchému stanovení bodů dotyku negativní úpatnice hyperboly pro její vrchol co pól, uvažujeme-li tuto co obalovou křivku přímek půlících odchylku tečen dané paraboly p s tečnou vrcholovou: *Vedeme-li normálu v dotyčném bodu Q_1 libovolné tečny q_1 paraboly p, protíná tato symetrály m a n úhlů přímky q_1 a tečny vrcholové v bodech X a Y, jež jsou dotyčnými body negativní úpatnice rovnoramenné hyperboly obalené přímkami m a n.*

Z rovnice křivky*) plyne ihned, že bod ležící na ose y ve vzdálenosti $y = 2a$ jest jejím bodem vratu.

Je-li směr světla rovnoběžný s přímkami řídicího kužele plochy ležícími v rovině (yz), t. j. s asymptotami dvojné hyperboly h, jest dříve uvedená konstrukce vrženého stínu plochy na rovinu (xy) následující: Otáčí-li se paprsek kol ohniska A obrysové paraboly p, obalují vržený stín symetrály úhlů, který svírá tento otáčející se paprsek s osou x.

Jest zřejmé, že paty kolmic spuštěných z ohniska A ku těmto symetrálám leží na přímce. Označme ji v. Vrženým stínem jest tudíž křivka obalená ramenem pravého úhlu, jehož vrchol probíhá přímku v a jehož jedno rameno prochází stále bodem A. *Tudíž v tomto případě vrženým stínem plochy P^4 na rovinu (xy) jest parabola y konfokální s obrysovou parabolou p.* Parametr její jest poloviční parametru paraboly obrysové p.

*

Sur la surface, lieu des axes de courbure qui correspondent au point commun des hélices de pente égale sur un faisceau de cylindres.

(Extrait de l'article précédent.)

Choisissons, dans le plan de projection π, un faisceau de cercles passant par les points A et B, et menons par ces cercles des cylindres de révolution; considérons les hélices (dextrorsum et sinistrorsum) qui passent par le point A et qui ont la pente

*) $[x^2 - 8y(2a - y)]\,[3x^2 + (2a - y)^2] - x^2(a + 4y)^2 = 0.$

$tg\alpha$. La surface en question est remplie par les axes de courbure qui correspondent au point A de ces hélices. Soient r le rayon du cercle décrit sur $\overline{AB}$ comme diamètre et d la droite perpendiculaire à $\overline{AB}$, ayant la distance $\delta = r . tg^2\alpha$ du point A. Posons $x \equiv d$, $y \equiv AB$, et soit $z \perp \pi$; l'équation de la surface cherchée est — en coordonnées rectangulaires — de la forme

$$x^2 (z^2 tg^2\alpha - y^2) = (z^2 tg^2\alpha - y^2 - ay)^2 \qquad (1)$$

Donc, la surface considérée est une surface gauche du 4^e^ ordre, dont la courbe double se compose d'une droite double $d \equiv x$ et d'une hyperbole double h située dans le plan (yz). Le contour apparent de la surface P^4 sur le plan horizontal est une parabole p dont A est le foyer. La tangente au sommet de cette parabole coïncide avec l'axe $x \equiv d$. Le cône directeur de la surface P^4 est un cône de révolution. Les plans asymptotiques enveloppent un cône de révolution dont le sommet coïncide avec le foyer A de la parabole p et dont l'axe est perpendiculaire à (xy). La ligne de striction de la surface P^4 est une courbe gauche du 4^e^ ordre, qui coïncide avec le contour apparent horizontal de la surface P^4. La projection de la ligne de striction sur le plan (yz) coïncide avec l'hyperbole double h. La section de la surface par un plan horizontal ϱ est une conchoïde de la droite. La projection horizontale du contour apparent sur le plan vertical de projection est une cubique mixte. Le contour apparent de la surface sur le plan vertical est une sextique.

Mentionnons encore la ligne d'ombre portée sur le plan (xy), quand les rayons lumineux sont parallèes aux génératrices du cône directeur, situées dans les plans (xz) et (yz), le foyer A étant le sommet du cône directeur. Dans le premier cas l'ombre portée sur le plan (xy) est une courbe enveloppée par les symétrales des angles que font les tangentes de la parabole p avec la tangente au sommet. Cette courbe est la podaire négative d'une hyperbole equilatère, son sommet étant le pôle. Dans le 2^e^ cas l'ombre portée sur le plan (xy) est une parabole confocale à la parabole p.

O složeném helikoidu vytvořeném hypocykloidálním (elliptickým) pohybem.

Napsal *Miloslav Pelíšek*, Brno.

Budiž (obr. 1) K kružnice o středu S a poloměru $R = 2r$, po jejímž vnitřním obvodu nechť se kotálí kružnice k o středu s a poloměru r, jejíž počáteční poloha má okamžitý pól otáčení a; tímto bodem a nechť prochází přímka P, jež je s kružnicí k pevně spojená