Miloš Kössler

O úhlech nesouměřitelných

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 73–78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123259

O úhlech nesouměřitelných.

Napsal *M. Kössler.*

Úvahy o souměřitelnosti úseček, ploch a objemů byly běžné už u mathematiků starořeckých. Avšak nesouměřitelnost úhlů, pokud jest mi známo, nebyla dosud studována. Příčinou jest asi ta okolnost, že důkaz nesouměřitelnosti úseček lze často opříti o jedinou rovnici kvadratickou (na př. $u^2 = 2a^2$ pro úhlop čtverce), kdežto při důkazu souměřitelnosti úhlů jest vždy třeba vyšetřovati celou skupinu rovnic algebraických, obsahující rovnice všech stupňů.

Podávám v tomto článku nutné a postačující podmínky pro souměřitelnost úhlů definovaných některou funkcí goniometrickou s úhlem π a nutnou podmínku pro souměřitelnost libovolných dvou úhlů.

Odvození těchto podmínek jest zcela elementární. Přes to však některé důsledky nejsou tak samozřejmé. Upozorňuji zejména na věty *B*, *C* a *D*.

Ku konci ukazuji, jak lze užíti výsledků zde odvozených k sestrojení jistých potenčních řad s přirozenou hranicí.

*

1. Úhel α měřený v míře obloukové jest souměřitelný s úhlem π, jestliže platí rovnice

$$\alpha = \frac{n\pi}{m},$$

kdež m a n jsou celistvá čísla nesoudělná. Jinak jest α nesouměřitelný s π.

Pro takový úhel jest tedy poměr $\alpha:\pi$ dán číslem irracionálným. Je-li při tom číslo α přímo dáno, jest otázka souměřitelnosti ryze arithmetickou a jest řešitelna pokud dovedeme o čísle $\alpha:\pi$ rozhodnouti zda jest racionálné či nikoliv.

Jinak jest tomu, jestliže α jest určeno některou funkcí gomiometrickou na př.

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Pak poslouží nám k rozhodnutí otázky souměřitelnosti s úhlem π následující základní věta:

Jestliže úhel α jest definován relací

$$\cos\alpha = \varrho,$$

jest nutnou a postačující podmínkou pro souměřitelnost jeho s π vztah ...(*A*)

$$(\varrho + i\sqrt{1-\varrho^2})^{2m} = 1,$$

kdež m značí jisté celistvé číslo.

Důkaz jest téměř samozřejmý, neboť z relace $2m\alpha = 2n\pi$, která vyjadřuje souměřitelnost obou úhlů uvažovaných, plyne ihned

$$\cos 2m\alpha + i \sin 2m\alpha = e^{2\pi i n}$$

a to jest právě rovnice (A).

Algebraický vztah pro číslo ϱ, obsažený ve větě A není výhodný pro numerický počet. K tomu lépe se hodí relace ekvivalentní, která vyplyne ze vzorce *Eulerova* platného pro každý úhel α

$$\sin 2m\alpha = \sin\alpha \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \binom{2m-r-1}{r} (2\cos\alpha)^{2m-r-1},$$

uvážíme-li, že pro α souměřitelné s π a pro vhodně volené m musí býti

$$\sin 2m\alpha = \sin 2n\pi = O.$$

Klademe-li tedy

$$(2\cos\alpha)^2 = 4\varrho^2 = \eta,$$

obdržíme rovnici

$$\eta^{m-1} - \binom{2m-2}{1}\eta^{m-2} + \binom{2m-3}{2}\eta^{m-3} - \ldots + (-1)^{m-1}\cdot m = O \ldots (1)$$

Jen tehdy splňuje-li číslo η právě definované tuto rovnici, jest α souměřitelné s π. Při tom jest m předem neurčené číslo celistvé. Upotřebitelnost tohoto kriteria ukážeme na zvláštních případech.

Je-li ϱ číslem transcendentním, jest jím patrně i η a tedy rovnice (1) jest nemožná. Tak na př. úhly určené vztahy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pi},\ \cos\beta = \frac{1}{e}$$

jsou nesouměřitelné s úhlem π.

Méně samozřejmý a dosti obecný příklad vysloven jest větou:

Ze všech úhlů určených vztahem $\cos\alpha = \sqrt{r}$, kdež r jest libovolné číslo racionálné ≤ 1, jsou souměřitelné s úhlem π jen ty, pro něž platí

$$\cos\alpha = O,\ \sqrt{\frac{1}{4}},\ \sqrt{\frac{2}{4}},\ \sqrt{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{4}{4}}. \qquad \ldots(B)$$

Důkaz této věty provedeme tím způsobem, že zjistíme, které racionálné kořeny může míti rovnice (1). Dosadíme-li tam

$$\eta = \frac{p}{q},$$

kdež p a q jsou nesoudělná čísla celistvá, obdržíme po násobení číslem q^{m-2}

$$\frac{p^{m-1}}{q} = \text{číslu celistvému.}$$

To však jest možná jen tenkráte, je-li $q = 1$ a tedy η číslo celistvé. Z toho vyplývá pro $\cos\alpha$ relace

$$4\cos^2\alpha = p,$$

která poskytuje reálná řešení pro α jen v pěti případech

$$p = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Protože pak příslušné úhly jsou vskutku souměřitelné s π a protože číslo r ve větě B jest určeno rovnicí

$$r = \frac{p}{4q},$$

jest tím věta B dokázána.

Z toho plynou ihned tyto dva důsledky pro theorii trojúhelníka:

a) Jestliže dvě strany pravoúhlého trojúhelníka jsou čísla souměřitelná, jsou úhly jeho čísla navzájem nesouměřitelná. Výjimku tvoří trojúhelníky pravoúhlé s úhlem $\frac{\pi}{3}$ nebo $\frac{\pi}{4}$.

b) V kosoúhlém trojúhelníku nemohou býti současně všechny strany souměřitelné a všechny úhly souměřitelné. Jedinou výjimku tvoří trojúhelník rovnostranný.

První z těchto vět jest přímým důsledkem B, kdežto druhá dokáže se snadno pomocí vztahu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

a věty B, což přenechávám čtenáři.

Bylo by snadno tvořiti příklady další. Omezím se však na vytčení následující dosti obecné věty:

Jestliže úhel α při zavedeném označení jest určen rovnicí algebraickou s celistvými koeficienty

$$a_0\eta^n + a_1\eta^{n-1} + \ldots + a_n = O$$

a je-li $a_0 > 1$, $a_n \neq O$,

jest α nesouměřitelno s π. ...(C)

Podle rovnice (1) jest totiž při souměřitelnosti α a π číslo η celistvým číslem algebraickým. S tím jest ve sporu rovnice (C), jestliže ovšem předpokládáme, že nelze ji krátiti číslem a_0.

2. Obraťme se nyní k otázce, kdy dva úhly α, β jsou vzájemně souměřitelné. Okolnost ta vyjádří se rovnicemi

$$2m\alpha = 2n\beta,$$

čili

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2m} = (\cos\beta + i\sin\beta)^{2n},$$

což jest obdoba věty (A).

Užijeme-li citovaného vzorce *Eulerova* na vztah

$$\sin 2m\,\alpha = \sin 2n\,\beta,$$

obdržíme při označení

$$(2\cos\alpha)^2 = \eta, \quad (2\cos\beta)^2 = \vartheta$$

rovnici pro applikace pohodlnější

$$\begin{aligned}\sqrt{\eta(4-\eta)}\sum_{r=o}^{m-1}(-1)^r\,\eta^{m-r-1}\binom{2m-r-1}{r} = \\ = \sqrt{\vartheta(4-\vartheta)}\sum_{r=o}^{n=1}(-1)^r\,\vartheta^{n-r-1}\binom{2n-r-1}{r}\end{aligned} \quad (2)$$

Tato podmínka jest pro souměřitelnost samozřejmě *nutná.* Lze však snadno nahlédnouti, že postačující není, neboť z rovnice (2) vyplývá pouze rovnost sinů

$$\sin 2m\,\alpha = \sin 2n\,\beta,$$

která nikterak nemusí vésti k rovnosti úhlů. Nedostatek tento dal by se odstraniti tím, že k rovnici (2) bychom připojili další vyplývající ze vztahu

$$\sin\frac{2m\,\alpha - 2n\,\beta}{k} = O, \quad (2)$$

platného pro *každé* celistvé k, jestliže α a β jsou souměřitelné. Tím bychom si zjednali podmínky nutné i postačující. Vzorce výsledné jsou však málo přehledné a proto je zde nevypisuji.

Uvedu jediný příklad; různá zobecnění si čtenář snadno sám sestrojí.

Jestliže ve dvou Pythagorejských trojúhelnících, určených celistvými nesoudělnými čísly

$$p_1^2 + q_1^2 = r_1^2, \quad p_2^2 + q_2^2 = r_2^2 \quad \ldots(D)$$

jsou přepony r_1, r_2 čísla nesoudělná, jsou ostré úhly obou trojúhelníků jak mezi sebou, tak s úhlem π nesouměřitelné.

V zavedeném označení jest totiž

$$\eta = \frac{4p_1^2}{r_1^2}, \quad \vartheta = \frac{4p_2^2}{r_2^2},$$

$$\sqrt{\eta(4-\eta)} = \frac{4p_1q_1}{r_1^2}, \quad \sqrt{\vartheta(4-\vartheta)} = \frac{4p_2q_2}{r_2}.$$

Dosadíme-li do rovnice (2) a odstraníme-li zlomky, obdržíme vztah

$$\left(p_1^{2m-1}q_1^{2m-2} \cdot 2 + r_1^2 M\right) r_2^{2n} = \left(p_2^{2n-1}q_2^{2n-2} \cdot 2 + r_2^2 N\right) r_1^{2m},$$

kdež M a N jsou celistvá čísla.

Z toho plyne, že $p_1^{2m-1} q_1^{2m-2} . 2$ jest dělitelno číslem r_1^2. To však jest možné jen tenkráte, je-li r_1 mocninou čísla 2 neboť s p_1 a q_1 jest r_1 nesoudělné. Z toho plyne dále, že p_1 a q_1 jsou lichá čísla. Avšak takový Pythagorejský trojúhelník jest nemožný, neboť mocnina dvojky nemůže býti rovna součtu čtverců dvou lichých čísel.

Přibeřeme-li ještě větu *a*), máme následující výsledek:

V uvažovaných trojúhelnících jest kterákoliv dvojice úhlů nesouměřitelná. Výjimku tvoří dvojice úhlů pravých.

3. V článku „Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově“, který bude otištěn, jak doufám, v Rozpravách Čes. Akad., dokázal jsem větu:

Jestliže potenční řada

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 \dots$$

představuje meromorfní funkci s jednotkovou kružnicí konvergenční a jsou-li čísla ϱ_n definována vztahem

$$\varrho_n = \frac{1}{a - b \cos n\alpha}, \quad a > b$$

kdež α jest úhel nesouměřitelný s π, má potenční řada

$$F(x) = a_0 \varrho_0 + a_1 \varrho_1 x + a_2 \varrho_2 x^2 + \dots$$

jednotkovou kružnici svou přirozenou hranicí.

Na základě úvah v odstavci 1. mohu nyní čísla ϱ_n voliti ve formě zlomků racionálných. Neboť úhel ostrý definovaný vztahy

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

jest podle věty *B* nesouměřitelný s π.

Kosiny jeho násobků dány jsou vzorcem *J. Bernoulli-ho*

$$\cos n\alpha = \sum_{p=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \binom{n}{2p} (\cos \alpha)^{n-2p} (\sin \alpha)^{2p} \text{ čili}$$

$$\cos n\alpha = \sum_{p=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \binom{n}{2p} \frac{3^{n-2p} . 4^{2p}}{5^n}.$$

Čísla ϱ_n jsou tedy racionálná, jestliže volím také *a* a *b* racionálně. Obecněji mohli jsme zvoliti za úhel α ostrý úhel *libovolného* trojúhelníka Pythagorejského.

*

Sur des angles incommensurables.

(Extrait de l'article précédent.)

Considérons un angle α donné par la relation $\eta = 4\cos^2 \alpha$.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle α soit commensurable à π est qu'on puisse trouver un entier m tel que l'équation 2) soit satisfaite.

Voici deux exemples particuliers: *a*) Soit r un nombre rationnel $\leq$ 1. L'angle donné par l'équation $\cos\alpha = \sqrt{r}$ n'est pas commensurable à π. Il y a exception seulement pour les valeurs

$$\cos\alpha = 0, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}.$$

b) Si $a_0 > 1, a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ sont des entiers sans diviseur commun, l'angle défini par le relation

$$a_0\,\eta^n + a_1\,\eta^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

n'est pas commensurable à π.

2. Soit donné un second angle β par la relation $\vartheta = 4\cos^2\beta$. La condition nécessaire pour que les angles α et β soient commensurables est qu'on puisse trouver deux nombres entiers m, n tels que l'équation 2. soit satisfaite.

3. En faisant usage de ces théoremes, on peut construire un nombre quelconque de séries de puissances $f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ aux coefficients rationnels, pour lesquelles le cercle au rayon égal à l'unité est la frontière naturelle.

Osový problém ploch stupně druhého.

Napsal *Jos. Kounovský.*

1. Mám na mysli plochu, při jejímž určení nebyla rýsována žádná kuželosečka, na př. řídící kuželosečka plochy kuželové nebo diametrální či obrysová obecné plochy druhého stupně; v těch případech by se provedla konstrukce os pomocí některé z těchto již narýsovaných kuželoseček, jak ukázal pan profesor J. Sobotka*) ve své obsažné a celý osový problém ploch druhého stupně úplně vyčerpávající studii, které by konstruktér jistě za tím účelem užil.

*) „Beitrag zur Perspective des Kreises und anschliessend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades." Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, sv. 109, odděl. II a, str. 583—614, Vídeň 1900.