Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Machytka

Příspěvek k synthetické theorii skupin bodových na obecné kubické křivce rovinné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 90--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123249

applications en nomographie. Malgré cela, on n'en a pas encore tiré tout le profit possible, quoiqu'elle puisse conduire certainement — comme le fait voir la résolution nomographique d'une équation cubique, exécutée dans ce travail — à des résultats précieux.

Příspěvek k synthetické theorii skupin bodových na obecné kubické křivce rovinné.

Dr. Bohumil Machytka.

Analytické studium skupin bodových na obecné kubické rovinné křivce — a tudíž i na algebraických křivkách rodu 1 — jest usnadněno v podstatě tím, že lze souřadnice bodů této křivky vyjádřiti parametricky užitím elliptických funkcí.

Pracemi Emila Weyra, zavedením obecných involucí n-ho stupně k-ho řádu J_k^n, byl dán v jistém smyslu pro toto studium synthetický equivalent k funkcím elliptickým. Tím dána možnost ryze geometrickou cestou dospěti k vlastnostem objeveným analyticky, při čemž, — ježto stálý bezprostřední styk s útvarem geometrickým nebyl přerušen, — poznatky známé jsou rozšiřovány a věty ryzí mathematiky cestou geometrickou verifikovány. Tak ukázal na př. Emil Weyr[1]) souvislost Steinerova problému uzavřených polygonů vepsaných obecné křivce C^3 pro číslo n (vepsané $2n$ rohy) se skupinou n-násobných bodů involuce J_{n-1}^n a s n-nárně cyklickými jednoznačnými necentrickými korrespondencemi E_n. Chci ukázati synthetický souvislost některých skupin bodových a odvoditi některé vlastnosti charakterisující jisté druhy skupin.

I. Ke skupinám bodovým, které jsou invariantní vzhledem ke gruppě G_{18} kollineací, jež reprodukují danou kubickou křivku rovinnou C^3, — a tudíž i ke všem jejím podgrupám, — náleží jisté skupiny bodové význačné se stanoviska projektivního.

Soustava všech křivek m-ho stupně v rovině obecné křivky C^3 vytíná na této křivce určitou involuci n-ho stupně $(n-1)$ho řádu J_{n-1}^n, kde $n = 3m$. Body n-násobné této involuce, — jest jich n^2, — jsou tím význačny, že v nich lze ke křivce C^3 sestrojiti oskulační křivky m-ho stupně, které s ní mají styk $3m$-bodový. Značme stručně skupinu těchto bodů znakem S_m. Skupina S_m má celkem $n^2 = 9\,m^2$ bodů. Projektivný charakter této skupiny bodové jest evidentní.

---

[1]) *Emil Weyr:* Über eindeutige Beziehungen auf einer Curve dritter Ordnung. Wiener Berichte, Bd. 87, 1883. — Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte 1. Wiener Berichte, Bd. 88, 1883. — Über Vervollständigung von Involutionen auf Trägern vom Geschlechte 1 und über Steiner'sche Polygone I, II. Wiener Berichte, Bd. 101, October 1892, December 1892.

Každá kollineace, která reprodukuje křivku C^3, reprodukuje nutně i tuto skupinu. Skupina S_m jest invariantní vzhledem ke všem kollineacím grupy G_{18}, vzhledem ke všem jejím podgrupám. Obsahuje nutně skupinu 9 inflexních bodů křivky C^3, neboť každou inflexní tečnu, vzatou m-násobně, lze považovati za degenerovanou křivku m-ho stupně, jež podmínce hoví.

Každá skupina S_m obsahuje tudíž skupinu S_1 devíti inflexních bodů.

Skupina S_1 devíti inflexních bodů jest invariantní vzhledem ke grupě G_{18} a zastupuje tudíž jednu skupinu 18-bodovou patřící ke grupě G_{18}; — nutno ji v tom smyslu čítati za dvojnásobnou.

Skupina S_2 obsahuje 36 bodů; skládá se z 9 bodů inflexních a 27 bodů sextaktických, v nichž lze ke křivce C^3 sestrojiti oskulační kuželosečky, mající s C^3 styk 6-bodový. Body sextaktické jsou, jak známo, charakterisovány tím, že tečnové body jejich jsou inflexní body křivky C^3, a lze je rozděliti ve 3 skupiny devítibodové, z nichž každá jest invariantní vzhledem k celé grupě G_{18} a zastupuje tedy, co dvojnásobná, jednu skupinu 18-bodovou grupy G_{18}.[2]) Vezmeme-li zřetel k tomu, že každá z těchto tří 9-bodových skupin zastupuje dvě connexní inflexní skupiny bodové,[3]) takže spojnice libovolných dvou bodů této skupiny vždy prochází jedním inflexním bodem, a přihlédneme-li k tomu, že každé dva sdružené body křivky C^3 promítají se z libovolného bodu křivky opět ve dvojici sdružených bodů, které si odpovídají v témž involutorním necentrickém vztahu E_2, seznáváme přímo tento poznatek:

Devítibodové skupiny, v něž rozpadá se skupina 27 bodů sextaktických, obdržíme, transformujeme-li skupinu inflexních bodů třemi necentrickými involutorními jednoznačnými korrespondencemi E_2, jež na křivce C^3 existují.

Vraťme se k obecné skupině S_m. Je-li v čísle m obsaženo číslo k, takže jest $m = k \, . \, p$, lze každou rovinnou křivku k-ho stupně, vzatou p-násobně, považovati za křivku stupně m-ho. Ve skupině $S_{p \, . \, q}$ nalézá se tudíž celá skupina S_p i S_q.

Ve skupině bodové S_m nalézají se všechny skupiny S_k, patřící všem činitelům k čísla m.

---

[2]) *Boh. Bydžovský:* O jisté grupě rovinných kollineací. Čas. matem., roč. 38., čís. 1, 2 (1908).

[3]) Dvě devítibodové skupiny:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots \quad a_9,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots \quad b_9,$$

jsou inflexní skupiny connexní, jestliže spojnice libovolných dvou bodů $a_k \, b_n$ seče C^3 v bodě inflexním. — *Durège:* Curven dritter Ordnung, str. 295. — *Emil Weyr:* Über eindeutige Beziehungen... Wiener Berichte, Bd. 87, 1883, odstavec 11.

Vyloučíme-li ze skupiny bodové S_m všechny v ní obsažené skupiny S_k, které obsahují ty body, v nichž příslušné oskulační křivky m-ho stupně jsou degenerovány ve vícenásobně vzaté křivky nižšího stupně, zbude ze skupiny S^m skupina R_m, obsahující jen ty body, v nichž příslušné oskulační křivky jsou vskutku m-ho stupně. Body tohoto druhu nazveme stručně *„body projektivně význačné m-ho stupně"*.[4])

Skupina bodová R_m, složená ze všech bodů projektivně význačných m-ho stupně, jest zřejmě, jako původní skupina S_m, invariantní vzhledem ke grupě G_{18} a všem jejím podgrupám. Lze tudíž každou z těchto skupin rozděliti v ternárné bodové cykly téže ternárně cyklické kollineace (téže ternárně cyklické jednoznačné korrespondence E_3), a sice čtverým způsobem, dle volby podgrupy G_3 v grupě G_{18} obsažené (dle volby cyklického vztahu E_3). Invariantní podgrupou G_9 lze každou z těchto skupin rozděliti ve skupiny 9-bodové, které se transformují kteroukoliv involutorní homologií grupy G_{18} ve skupiny 18-bodové, složené ze dvou connexních inflexních skupin bodových.

Z předchozích poznatků můžeme snadno určiti počet bodů skupiny R_m. Označme jej číslem $f(m)$. Počet bodů skupiny S_m značme pro přehlednost vztahů $P(m)$, takže jest: $P(m) = 9m^2$.

Přihlédněme postupně k jednotlivým případům:

1°) Je-li m *prvočíslo*, platí $R_m \equiv S_m - S_1$, a tudíž

$$f(m) = P(m) - P(1) = 9(m^2 - 1).$$

2°) Budiž $m = a^\alpha$, kde a jest prvočíslo $\alpha \geq 1$.

Pak jest:
$$f(a^\alpha) = P(a^\alpha) - P(a^{\alpha-1}) = 9a^{2\alpha} - 9a^{2(\alpha-1)} = 9(a^2-1)\,a^{2(\alpha-1)}.$$

3°) $m = a^\alpha . b^\beta$, kde a, b jsou prvočísla. Pak jest:

$$f(a^\alpha b^\beta) = P(a^\alpha b^\beta) - P(a^\alpha b^{\beta-1}) - P(a^{\alpha-1} b^\beta) + P(a^{\alpha-1} b^{\beta-1}).$$

neboť vyloučíme-li dvě skupiny

$$S_k \text{ a } S_h, \text{ kde } k = a^\alpha b^{\beta-1} \text{ a } h = a^{\alpha-1} b^\beta,$$

vyloučili jsme tím dvakráte touž skupinu S_r, kde $r = a^{\alpha-1} b^{\beta-1}$

Dosadíme-li za P příslušné hodnoty, obdržíme

$$f(a^\alpha b^\beta) = 9(a^2 - 1)(b^2 - 1)\,a^{2(\alpha-1)}\,b^{2(\beta-1)}$$

4°) $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, kde a, b, c jsou prvočísla.

4) *Boh. Bydžovský:* O jisté grupě rovinných kollineací. Čas. matem., roč. 38., čís. 2., str. 161.

Pak obdržíme týmž postupem:

$$f(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = P(a^\alpha b^\beta c^\gamma) - P(a^\alpha b^\beta c^{\gamma-1}) - P(a^\alpha b^{\beta-1} c^\gamma)$$
$$- P(a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma) + P(a^\alpha b^{\beta-1} c^{\gamma-1}) + F(a^{\alpha-1} b^\beta c^{\gamma-1})$$
$$+ P(a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^\gamma) - P(a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1}) =$$
$$= 9(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)\, a^{2(\alpha-1)} b^{2(\beta-1)} c^{2(\gamma-1)}.$$

5°) Tímto postupem dostáváme obecný vzorec:

Je-li $m = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots\ldots a_r^{\alpha_r}$, kde a_i jsou prvočísla,

I.) $$\varphi(a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots\ldots a_r^{\alpha_r}) = 9 \prod_{i=1}^{r} (a_i^2 - 1)\, a^{2(\alpha_i - 1)},$$

čímž určen jest počet všech bodů projektivně význačných m-ho stupně pro každé číslo m.

Skupina R_m bodů projektivně význačných m-ho stupně obsažena jest ve skupině S_m n-násobných bodů určité, svrchu definované involuce J^n_{n-1} ($n = 3m$). Tato involuce určena jest již samotnou křivkou C^3. Tím dána jest souvislost skupiny bodové R_m s problémem Steinerovým.

Uvažujme na křivce C^3 obecnou involuci J^n_{n-1}, kde n jest libovolné číslo. Involuce ta jest určena jednoznačně jednou svou skupinou n-bodovou, nebo jedním svým bodem n-násobným, jichž má celkem n^2. Není-li číslo n prvočíslem, je-li na př. $n = k\,.\,p$, při čemž číslo k a p obecně nejsou prvočísla, pak existuje, jak ukázal Emil Weyr,[5] pro číslo k celkem p^2 od sebe různých involucí J^k_{k-1}, z nichž každá má tu vlastnost, že libovolných p skupin bodových kterékoliv jedné této involuce J^k_{k-1} dává skupinu o $p\,.\,k = n$ bodech, jež patří dané involuci J^n_{n-1}. Každá tato z involuce J^n_{n-1} „odvozená involuce“ J^k_{k-1} (die aus J^n_{n-1} abgeleitete Involution J^k_{k-1}) skládá se z k-bodových skupin p-násobných bodů involuce J^n_{n-1}. Každý k-násobný bod této odvozené involuce jest tudíž též $k\,.\,p = n$-násobným bodem involuce J^n_{n-1}. Lze tedy skupinu n^2 bodů n-násobných involuce J^n_{n-1} rozděliti v p^2 skupin o k^2 bodech, při čemž každá tato skupina jest skupinou k-násobných bodů jedné odvozené involuce J^k_{k-1}. Vezmeme-li zřetel k tomu, že dva body A, B, vzaté za body základní, řeší Steinerův problém uzavřených

---

[5]) *Emil Weyr:* Über Vervollständigung... I., odst. 9. Str. 1468–70. — Über abgeleitete J^n_{n-1} auf Trägern vom Geschlechte 1. Wiener Ber., Bd. 101, November 1892.

polygonů vepsaných křivce C^3 pro číslo n (t. j. vedou k vepsaným uzavřeným $2n$-rohům) jen tehdy, jsou-li oba n-násobnými body téže involuce J^n_{n-1}, můžeme vysloviti tento poznatek plynoucí přímo z prací Weyrových: Je-li A n-násobný bod involuce J^n_{n-1}, pak skupina zbývajících (n^2-1) bodů n-násobných této involuce skládá se z bodů B, které s bodem A co body základní řeší Steinerův problém buď pro číslo n, anebo pro některé číslo k, obsažené v n.[6]) A opáčně: Všechny body B, které s daným bodem A řeší Steinerův problém pro číslo n, nebo pro kteréhokoliv činitele čísla n, jsou obsaženy ve skupině n-násobných bodů involuce J^n_{n-1} jednoznačně určené bodem A co bodem n-násobným. Jsou-li A, B n-násobné body téže involuce J^n_{n-1}, řeší Steinerův problém pro číslo n jen tehdy, jestliže oba tyto body nejsou obsaženy v téže skupině k-násobných bodů některé involuce J^k_{k-1} odvozené z J^n_{n-1}. Abychom tudíž obdrželi jen ty body B, které s daným bodem A řeší Steinerův problém pro číslo n, vyloučíme ze skupiny n-násobných bodů involuce J^n_{n-1}, určené bodem A co n-násobným, všechny body k-násobné všech involucí J^k_{k-1}, jež určeny jsou jednoznačně bodem A co bodem k-násobným, při čemž k probíhá hodnotami všech čísel obsažených v n.

Přihlédněme nyní k postupu, jímž jsme ze skupiny bodové S_m obdrželi skupinu R_m.

Skupina S_m jest skupinou $3m$-násobných bodů involuce J^{3m}_{3m-1} určené kterýmkoliv bodem inflexním — třeba bodem i, — co $3m$-násobným bodem. Vyloučené skupiny S_k jsou skupiny $3k$-násobných bodů involucí J^{3k}_{3k-1}, určených inflexním bodem i co bodem $3k$-násobným.

Bodová skupina S_m skládá se tudíž ze všech bodů B, které s kterýmkoliv bodem inflexním, na př. s bodem i, řeší Steinerův problém pro číslo $3m$ a všechna čísla obsažená v čísle $3m$. Vyloučené skupiny S_k skládají se z bodů B, které s bodem i řeší Steinerův problém pro čísla $3k$ a čísla v nich obsažená. Při tom jest k kterýkoliv činitel čísla m.

Ve skupině R_m zůstaly tudíž obecně jen ty body B, které s bodem i řeší Steinerův problém pro čísla $3m$ a m. Je-li však číslo m dělitelno třemi, takže $m = 3p$, pak vyloučením skupiny S_p vypadly též ty body B, které s bodem i řeší Steinerův problém pro číslo $3p = m$. Ve skupině R_m zůstaly tudíž v tomto případě jen ty body B, které s inflexním bodem i řeší Steinerův problém jen pro číslo $3m$. Máme tedy výsledek:

[6]) *Emil Weyr:* Über Vervollständigung I, odst. 4, str. 1465. — Větu tam uvedenou nutno opraviti, jak svrchu uvedeno. Platí jen tehdy, je-li n prvočíslo.

Každý bod projektivně význačný m-ho stupně řeší s kterýmkoliv bodem inflexním Steinerův problém buď pro číslo $3m$, nebo pro číslo m. Je-li číslo m dělitelno třemi, řeší Steinerův problém vždy jen pro číslo $3m$.

Poněvadž dva body A, B křivky C^3, řešící Steinerův problém pro číslo n, nutně si odpovídají v jednoznačné n-nárně cyklické korrespondenci E_n,[7]) můžeme vysloviti větu:

Každý bod projektivně význačný m-ho stupně určuje s kterýmkoliv bodem inflexním co bodem korrespondenčním jednoznačně n-nárně cyklickou korrespondenci E_n, při čemž jest buď $n = 3m$, nebo $n = m$. V případě, že m je dělitelno třemi, jest vždy $n = 3m$.

Označíme-li číslem $g(n)$ počet všech bodů B, které s daným bodem A řeší Steinerův problém pro číslo n, a tudíž počet všech bodů B, které s bodem A určují n-nárně cyklickou korrespondenci E_n (tedy počet všech na křivce C^3 existujících n-nárně cyklických vztahů E_n), máme mezi čísly $f(n)$ a $g(n)$ tento vztah:

$$\text{II}_1)\qquad f(m) = g(3m) + g(m),$$

v případě obecném, kdy m není dělitelno třemi,

$$\text{II}_2)\qquad f(m) = g(3m),$$

v případě, kdy m jest dělitelno třemi.

Oba tyto vzorce dávají opačně možnost určiti hodnotu $g(m)$ a sice pro každé m.

V případě prvém, kdy m není dělitelno 3, platí totiž relace $g(3m) = 8\,g(m)$. V případě druhém, kdy m jest dělitelno třemi, platí $g(3m) = 9\,g(m)$.

Obě tyto relace lze přímo vyšetřiti syntheticky; souvisí s konstrukcí n-bodových cyklů pro $n = 3^k$.

Dosadíme-li do nalezených vztahů, máme obecně, pro každé m platící vzorec:

$$\text{III.})\qquad g(m) = \frac{1}{9} f(m),$$

který souhlasí s výsledkem Weyrovým.[8])

[7]) *Emil Weyr:* Über eindeutige Beziehungen.... Wiener Ber., Bd. 87, 1883, odstavec 19. — Plyne ostatně direktně z poznatku, že součin dvou centrických involucí J_1^2 o centrech A, B, jest obecná, jednoznačná korrespondence E, v níž si oba středy odpovídají a sice v pořadku:

$$J(A) \,.\, J(B) \equiv E(B\,.\,A).$$

[8]) *Emil Weyr:* Über Vervollständigung von Involutionen . . . II. Wiener Ber., Bd. 101, December 1892.

Shodnost čísla $g(m)$ s číslem, které udává počet číselných dvojic α, β, které s daným číslem m nemají žádného činitele společného, plyne přímo z analytického řešení: číslo $g(m)$ udává počet m-tin obecné periody $w = 2\alpha\,\omega + 2\beta\,\omega'$.[9]) Geometricky jest tím vzorec ten verifikován.

II. Nalezená souvislost bodů projektivně význačných m-ho stupně s n-nárně cyklickými korrespondencemi E_n vede nás přímo k poznatku, že některé analytickou cestou poznané vlastnosti těchto bodů souvisí s vlastnostmi n-bodových cyklů, sestrojených z bodu inflexního co počátečního.

Na křivce C^3 buď n-bodový cyklus

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_n$$

vytvořený n-nárně cyklickou korrespondencí E_n z inflexního bodu $i \equiv x_1$. Značme tečnový bod bodu x_k znakem x'_k. Vezmeme-li zřetel k tomu, že každý n-bodový cyklus, vytvořený cyklickou korrespondencí E_n z libovolného bodu x_1, má tu známou vlastnost,[10]) že spojnice bodů $\overline{x_k\, x_l}$, $\overline{x_{k-1}\, x_{l+1}}$, $\overline{x_{k-2}\, x_{l+2}}, \ldots$ t. j. spojnice bodů, jichž indexy dávají stejný součet (mod n), protínají křivku C^3 v témže bodě,[11]) obdržíme pro vytknutý cyklus vztahy:

Bodové trojice:

$$\begin{array}{lll} x'_k, & x_{k-l}, & x_{k+l}; \\ x'_k, & x_1 & x_{2k-1}; \\ x_1, & x_h, & x_{n-(h-2)}; \\ x_1, & x'_h, & x'_{n-(h-2)}, \end{array}$$

leží vždy v přímce.

Vztah prvý je důsledkem svrchu uvedené vlastnosti, vztah druhý a třetí plynou z prvého, ježto $x'_1 \equiv x_1$.

Vztah čtvrtý plyne z třetího, neboť tečnové body tří bodů ležících v přímce opět leží v přímce. Srovnáme-li vztah druhý a poslední, máme totožnost spojnic trojic bodových:

$$\overline{x_1\ x'_h\ x'_{n-(h-2)}} \equiv \overline{x_1\ x'_h\ x_{2h-1}},$$

odtud plyne totožnost

$$x'_{n-(h-2)} \equiv x_{2h-1}$$ a tudíž v jiné formě

1) $$x'_k \equiv x_{\alpha n-(2k-3)},$$ kde je buď $\alpha = 1$, nebo $\alpha = 2$

---

[9]) *Jordan:* Cours d'Analyse II., str. 561, 564.

[10]) *Emil Weyr:* Über eindeutige Beziehungen ... Wiener Ber., Bd. 87, 1883.

[11]) Vlastnosti cyklů n-bodových vytvořených na křivce C^3 cyklickými korrespondencemi E_n jsou v podstatě tytéž, jako vztahy n-bodových cyklů na kuželosečce vytvořených cyklickými prométnostmi π_n. (Vztahy Lüroth-ovy: Math. Analen, Bd. XI, str. 84). Osa prométnosti jest toliko nahražena křivkou C^3.

Opačně jest tudíž

2) $$x_l \equiv x_{\frac{\alpha n-(l-3)}{2}}, \quad \text{kde } \alpha = 1, 2.$$

Ze vztahů 1), 2) jest zřejmo, že v případě, kdy n je číslo sudé, musí býti vždy l číslo liché. Je-li n číslo liché, může býti l sudé (pak jest $\alpha = 1$), ale též i liché (pak jest $\alpha = 2$).

Máme tedy výsledek:

Sestrojíme-li na křivce C^3 z inflexního bodu n-bodový cyklus cyklické korrespondence E_n, pak leží tečnový bod kteréhokoliv bodu tohoto cyklu opět v cyklu. Je-li n číslo liché, jest každý bod cyklu tečnovým bodem jednoho bodu cyklu. Je-li n sudé, jest každý bod, jehož index jest lichý, tečnovým bodem pro 2 body cyklu x_k a x_r, při čemž jest

$$r = k + \frac{n}{2}.$$

Z relace 1) plyne $x'_n \equiv x_3$.

Bod x_n odpovídá bodu x_1 v korrespondenci

$$E\,(x_1\, x_n) \equiv \overset{-1}{E_n}\,(x_1\, x_2),$$

tedy opět v korrespondenci n-nárně cyklické.

Bod x_3 odpovídá bodu x_1 v korrespondenci $E\,(x_1\, x_3) \equiv \overset{2}{E_n}\,(x_1\, x_2)$. Je-li n liché, jest $\overset{2}{E_n}$ opět cyklickou korrespondencí n-nárnou, $\overset{2}{E_n} \equiv E_n$, je-li n sudé, jest $\overset{2}{E_n}$ cyklickou korrespondencí stupně $\frac{n}{2}$: $\overset{2}{E_n} \equiv E_{\frac{n}{2}}$.

Máme tedy výsledek:

Řeší-li bod B s inflexním bodem i Steinerův problém pro číslo n liché, řeší tečnový bod B' bodu B s tímto inflexním bodem i Steinerův problém pro totéž číslo n. Je-li n sudé, řeší bod B' s bodem inflexním i Steinerův problém pro číslo $\frac{n}{2}$.

Druhá část věty jest známá. Zároveň máme rozšíření známých vět z úvah analytických:[12])

[12]) *Boh. Bydžovský:* O jisté grupě rovinných kollineací. Časopis, roč. 38. čís. 1., 2., str. 161—162.

Tečnový bod B' každého bodu B projektivně význačného m-ho stupně, pro m liché, jest opět bodem projektivně význačným téhož stupně; při tom leží bod B' v bodovém cyklu vytvořeném z inflexního bodu i cyklickou korrespondencí $E(i, B)$. Tečnový bod B' bodu B projektivně význačného stupně m-ho pro m sudé, jest projektivně význačným bodem stupně $\frac{m}{2}$ a leží v bodovém cyklu vytvořeném z inflexního bodu i cyklickou korrespondencí $E(i, B)$.

III. Pro tečnový bod bodu x_h cyklu n-bodového vytvořeného z inflexního bodu $x_1 \equiv i$ nalezli jsme vztah:

$x'_h \equiv x_{\alpha n - (2h-3)}$. Zaveďme označení: $x'_h \equiv x_{h_1}$, $x''_h \equiv x'_{h_1} \equiv x_{h_2}, \ldots$ $x^{[k]}_h \equiv x_{h_k}$. Jest tedy x_{h_k} k-tý tečnový bod bodu x_h. Pak jest

$$x_{h_1} \equiv x_{\alpha n - (2h-3)}, \quad \text{čili} \quad h_1 \equiv -2h + 3, \quad [\text{mod } n]$$

a tudíž: $h_2 \equiv -2h_1 + 3, \ldots\ldots h_k \equiv -2h_{k-1} + 3$. Odtud plyne přímo:

$$h_k \equiv (-2)^k (h-1) + 1 \; . \; [\text{mod } n].$$

Hledejme podmínky, kdy bod x_h jest k-tým svým bodem tečnovým. V tom případě jest tudíž

$$(-2)^k (h-1) + 1 \equiv h \quad [\text{mod } n]$$

Podmínka, aby bod x_h cyklu n-bodového, sestrojeného z inflexního bodu $x_1 \equiv i$, byl sám svým k-tým bodem tečnovým, jest dána kongruencí:

$$(h-1)\,[(-2)^k - 1] \equiv \theta \quad [\text{mod } n].$$

Má-li nastati tento případ pro každý bod cyklu, musí

$$(-2)^k - 1 \equiv \theta, \quad [\text{mod } n].$$

Je-li číslo n, kterýmkoliv činitelem čísla $2^k - (-1)^k$, jest podmínka splněna. Pro naše vyšetřování má ovšem hlavní význam případ, kdy $n = 2^k - (-1)^k$, neboť v případě, kdy $n = p \,.\, r$, jsou všechny cykly r-bodové sestrojené z inflexního bodu i obsaženy v cyklech n-bodových z tohoto bodu sestrojených. Opačně snadno způsobem obdobným nalezneme, že každý bod B, který jest svým k-tým bodem tečnovým, určuje s inflexním bodem i

jednoznačnou korrespondenci E, která je cyklickou, a leží tudíž v našem cyklu n-bodovém.

Všechny body křivky C^3, které jsou svými k-tými body tečnovými, obsaženy jsou v souhrnu všech cyklů n-bodových, sestrojených z kteréhokoliv inflexního bodu křivky C^3. Tvoří tudíž n-násobné body involuce J^n_{n-1} určené kterýmkoliv inflexním bodem co bodem n-násobným. Při tom jest $n = 2^k - 1$, pro k sudé; a $n = 2^k + 1$, pro k liché. Číslo n jest vždy dělitelno třemi. Body ty jsou body projektivně význačné (— ovšem obecně stupňů různých, lichých —) a jest jich úhrnem $n^2 = 2^{2k} + 1 + (-2)^{k+1}$. Jsou to samodružné body korrespondence $[4^k, 1]$, v níž odpovídá každému bodu křivky C^3 jeho k-tý bod tečnový.

Mezi body těmi jsou ovšem zahrnuty i ty body, které jsou svými r-tými body tečnovými, pro každé r v k obsažené.

Tím určen tudíž počet i poloha koincidenčních bodů vytknuté korrespondence $T_k : [4^k, 1]$. Počet těchto koincidencí můžeme určiti též přímo, použijeme-li známých výsledků algebraické geometrie.

Je-li T_1 korrespondencí $[4, 1]$, v níž odpovídá každému bodu křivky C^3 jeho bod tečnový, jest $T_k \equiv T_1^k$. Korrespondence T_1 má 9 koincidencí, — 9 inflexních bodů, — můžeme tudíž z Cayley-Brillovy formule[13]) určiti její hodnotnost γ (Wertigkeit).

Obdržíme: $9 = 4 + 1 + 2\gamma$, čili $\gamma = 2$.

Korrespondence $T_k \equiv T_1^k$ [14]) má tedy hodnotnost $\gamma = (-1)^{k+1} \cdot 2^k$.

Jest tedy pro korrespondenci $T_k : [4^k, 1]$ počet koincidencí

$$\delta = 4^k + 1 + (-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1},$$

což couhlasí s výsledkem nalezeným.

K témuž výsledku dospějeme i užitím funkcí elliptických.

---

[13]) Korrespondence $[\alpha, \beta]$, jejíž hodnotnost jest γ, na křivce rodu p má počet koincidencí dán vzorcem

$$\delta = \alpha + \beta + 2\gamma p.$$

Severi-Löfler, Algebraische Geometrie, str. 176.

[14]) *Severi-Löfler*, Algebraische Geometrie, str. 178.

*

Contribution à la théorie des groupes de points sur la cubique plane générale.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur étudie, par la méthode synthétique, les propriétés de quelques groupes de points „remarquables" (au point de vue projectif) qui se reproduisent par le groupe G_{18} des 18 homographies reproduisant la cubique. Il trouve les résultats principaux suivants:

1. Si $f(m)$ désigne le nombre des points remarquables du degré m (c. à d., des points où la C^3 a un contact de l'ordre $3\,m$-1 avec des courbes de l'ordre m), on a, pour $m = a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{x_n}$, où a_i sont des nombres premiers,

$$f(m) = 9 \prod_{k=1}^{n} (a_k^2 - 1)\, a_k^{2(\alpha_k - 1)}$$

2. Tout point de la courbe C^3 remarquable du degré m est caractérisé par ce qu'il correspond à un quelconque des points d'inflexion dans une correspondance univoque cyclique E_r (à la période r); et qu'il fournit, par suite, avec ce point d'inflexion, une solution du problème de Steiner concernant les polygones fermés inscrits à la cubique, pour le nombre r (c. à d., il conduit à des polygones inscrits ayant $2\,r$ sommets). Si m est divisible par 3, on a toujours $r = 3\,m$; dans le cas contraire, on a : ou $r = 3\,n$, ou bien $r = m$.

3. Si l'on construit, sur C^3, en partant du point d'inflexion, le cycle à n points auquel mène l'application de la correspondance cyclique E_n, on obtient des points qui sont, tous, „remarquables". Le point tangentiel d'un quelconque des points du cycle lui appartient. Si n est impair, tout point du cycle est le point tangentiel d'un point du cycle; si n est pair, tout point à l'indice impair est le point tangentiel de deux points du cycle, dont les indices l et k satisfont à la relation $l = k + \frac{n}{2}$. Le point B' tangentiel d'un point B quelconque remarquable du degré m, est encore un point remarquable du degré r. B' est un point du cycle engendré par l'application de la correspondance univoque cyclique $E\,(A, B)$ au point d'inflexion A. Si m est impair, $r = m$; si m est pair, $r = \frac{m}{2}$.

4. Tous les points de la courbe C^3, qui sont leurs propres k-ièmes points tangentiels — c à d., les points unis de la correspondance $[4^k, 1]$, dans laquelle à tout point de la courbe correspond son k-ième point tangentiel — peuvent être obtenus en construisant, à partir d'un point d'inflexion, les cycles à n points de toutes les correspondances cycliques n-aires E_n qui existent.

Par suite, ces points sont les points n-uples d'une involution du degré n et de l'ordre $(n-1)$ I^n_{n-1}, déterminée d'une manière univoque par un quelconque point d'inflexion pris pour point n-uple. On a, de plus, $n = 2^k - (-1)^k$. Tous ces points sont „remarquables" et ils sont au nombre de $n^2 = 2^{2k} + 1 + (-2)^{k+1}$.

O ploše naplněné osami křivosti odpovídajícími společnému bodu šroubovic stejného spádu na svazku rotačních válců.

Napsal Dr. *Vlad. Mašek.*

V rovině půdorysné π dán jest svazek kružnic o základních bodech A a B. Jednotlivými kružnicemi tohoto svazku proložme rotační válce a uvažujme na nich šroubovice (levé i pravé) vycházející z bodu A a mající daný spád $tg\alpha$. Budiž bod M středem libovolné kružnice k svazku. Je-li R jejím poloměrem, leží střed křivosti S bodu A obou šroubovic na válci kružnicí k jdoucím na paprsku $\overline{AM}$ ve vzdálenosti $\overline{MS} = R \, . \, tg^2\alpha$ od středu M.

Poněvadž tento vztah zůstává v platnosti pro středy křivosti příslušné společnému bodu A všech uvažovaných šroubovic, platí: *Středy křivosti bodu A všech šroubovic naplňují v průmětně π přímku d* kolmou ku $\overline{AB}$ a mající od boku A vzdálenost $r \, . \, (tg^2\alpha + 1)$, je-li r poloměrem nejmenší kružnice daného svazku kružnic.

Poněvadž dále v každém bodu přímky d protínají se vždy dvě osy křivosti, *jest přímka d dvojnou přímkou sborcené plochy*, kterou všechny uvažované osy křivosti naplňují. Všechny tyto osy křivosti svírají s průmětnou π úhel $\beta = 90^0 - \alpha$. *Jest tudíž řídícím kuželem hledané plochy sborcené kužel rotační.*

Osy křivosti odpovídající bodu A obou šroubovic na libovolném z uvažovaných válců, procházejí středem křivosti na přímce d a leží v rovině půdorysně promítající. Platí tudíž: *Půdorysné průměty povrchových přímek uvažované sborcené plochy obalují parabolu p o ohnisku A a vrcholové tečně d.*

Z dosud uvedených vlastností hledané plochy plyne následující jednoduché její projektivní vytvoření: Protneme-li tečné roviny parabolického válce jdoucího parabolou p kolmo k π kolmými k nim tečnými rovinami řídicího kužele o vrcholu v ohnisku A této paraboly, obdržíme povrchové přímky plochy. Vytknuté tečné roviny kužele tvoří involuci, s kterou jest svazek tečných rovin parabolického válce projektivní.

Zvolíme-li průsečík přímky d se spojnicí $\overline{AB}$ za počátek O pravoúhlých os souřadných x, y, z, z nichž osa y se ztotožňuje se