Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hejzlar

Barometrické měření výšky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 220--227

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123242`

2π, tak že přítažnost celé koule na plošku σ podlé toho jest

$$V = 2\pi k \varrho^2 \sigma . \qquad (7)$$

Kdybychom ve vzorci (6) položili $d = a$, obdrželi bychom

$$V_a = 4\pi k \varrho \text{ a tudíž } V = {}^1/_2 V_a \varrho \sigma , \qquad (8)$$

z čehož jde na jevo, že *přítažnost kulové plochy stejnoměrně hmotou pokryté na prvek jejího povrchu jest o polovičku menší nežli přítažnost na bod nekonečně blízko nad povrchem ležící, v němž soustředěna jest hmota prvku jmenovaného.*

Střed hmotné kulové plochy i koule z vrstev stejnoměrných hutností se skládající jest tudíž *středem přítažnosti* a koule tudíž tělesem *centrobarickým.*

O dalších výsledcích z těchto zákonů plynoucích netřeba tuto se zmiňovati.

Barometrické měření výšky.

(Podává dr. *Fr. Hejzlar.*)

Účelem těchto řádků jest vyvinouti jednoduše a zároveň přesně vzorec, jenž k barometrickému měření výšky obyčejně slouží a v knihách školních také s více méně jasným výkladem se uvádí.

Pokládajíce všechny vrstvy vzduchové za stejně oteplené a opírajíce se o zákon, že expanse vzduchu do výše geometricky ubývá, jestliže výše této arithmeticky přibývá, nabudeme známým spůsobem pro *absolutní* [1]) výšku H výrazu

$$H = \frac{h}{\log k} (\log B_r - \log B_u) ,$$

v němž značí h výšku vodorovné vrstvy vzduchové, B_r výšku

---

[1]) Výška nějaké vrstvy vzduchové nad jinou slove *relativní,* nad hladinou mořskou *absolutní.*

sloupce tlakoměrného na dolejším (u hladiny mořské), B_u na hořejším stanovišti (na temeni hory) a

$$k = \frac{B_{m-1}}{B_m} \tag{2}$$

poměr tlaků na povrchu dvou sousedních vrstev vzduchu.[2])

Vystoupíme-li s tlakoměrem nad hladinu mořskou, kde se normální tlak 760^{mm} čili $0·76^{m} = B_{m-1}$ jevil, h metrů vysoko a je-li s měrná váha vzduchu v této vrstvě, bude tlak na jedničku ploskou o váhu hs spodního sloupce vzduchového menší a rtuť, jejíž měrná váha budiž σ, klesne v tlakoměru o ε millimetrů, t. j, o sloupeček, jehož váha

$$\varepsilon \sigma = h s;$$

pročež

$$h = \frac{\varepsilon \sigma}{s}$$

a nebo, shledalo-li se, že $\varepsilon = 0·0001^{m} = 0·1^{mm}$,

$$h = 0·0001^{m} \,.\, \frac{\sigma}{s}\,.$$

Poněvadž jest v tomto případě

$$B_m = 0·76^{m} - 0·0001^{m} = 0·7599^{m},$$

bude se zřetelem ku rovnici (2)

$$log\, k = log\, 0·76 - log\, 0·7599 = 0·00005718.$$

Dosadíce vyhledané hodnoty za h a $log\, k$ do původního vzorce (1) zjednáme si

$$H = \frac{1}{0·5718} \,.\, \frac{\sigma}{s} (log\, B_r - log\, B_u) \tag{3}$$

Abychom poměr $\frac{\sigma}{s}$ co nejpřesněji určili, nesmíme pominouti příčin, kterými se měrné váhy vzduchu i rtuti v naší nejdolejší vrstvě mění. *a)* Především dlužno měrnou váhu s, která rozličným tlakem změnu béře, vyjádřiti měrnou váhou při normálním tlaku 760^{mm}. *b)* Zvýšením teploty zřidne vzduch vzhůru se zdvihaje a z té příčiny zmenší se s; teplota nižší působí opačně. Mimo to jest nám prohlédati *c)* k ubývání

---

[2]) Srovnej: Dr. *Ant. Majer* „Fysika pro vyšší školy“ str. 126.; *K. V. Zenger* „Fysika zkušebná“ díl I. str. 224. obr. 140. neb Dr. *Frt. Jos. Pisko* „Fysika pro gymnasia a realné školy“ vzdělal *Jos. Klika* str. 179. obr. 167. a str. 180.

teploty do výše, *d)* k vlhkosti [vzduchu a *e)* k zeměpisné šířce místa, ježto tíže zemské a proto také měrné váhy vzduchu i rtuti od rovníku k točnám přibývá.

ad *a*) Budiž v dotčené vrstvě

s_1 měrná váha vzduchu při tlaku 760^{mm} a teplotě 0^0,

s_2 „ „ „ „ $759{\cdot}9^{mm}$ „ 0^0;

dle zákona *Mariottova* lze pak psáti

$$s_2 = s_1 \frac{759{\cdot}9}{760} \text{ čili v metrech } s_2 = s_1 \frac{0{\cdot}7599}{0{\cdot}76} \tag{4}$$

ad *b*) *Gay-Lussac* dokázal zkouškami, 1. že se hmoty vzdušné za stejného tlaku poměrně s přibýváním teploty roztahují a 2. že rozprostraňovací koefficient α pro 1^0 u všech vzdušin téměř týž jest a sice

pro 1^0 *C*

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{\cdot}003665 \tag{5}$$

a pro 1^0 *R*

$$\alpha = \frac{1}{218} = 0{\cdot}004583\,. \tag{6}$$

Objem v_2, jejž zaujímal vzduch při teplotě 0^0 a tlaku $759{\cdot}9^{mm}$, zvětší se tudíž, zvýšíme-li teplotu při témž tlaku na t^0, o $v_2 \alpha t$ a nový objem v_3 ustanovíme rovnicí

$$v_3 = v_2\,(1 + \alpha\,t),$$

z níž majíce na paměti, že objemy dvou těl o stejných vahách prostých jsou v převráceném poměru s měrnými vahami, obdržíme

$$s_2 = s_3\,(1 + \alpha\,t).$$

ad *c*) Jakým zákonem teploty do výše ubývá, není posud známo; proto béře se arithmetický průměr teplot t a t' na dolejším a hořejším stanovišti za teplotu vzduchu a

$$s_2 = s_3 \left(1 + \alpha \frac{t + t'}{2}\right).$$

Položíme li tu za s_2 hodnotu (4), určíme

$$s_3 = s_1 \frac{0{\cdot}7599}{0{\cdot}76} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \dfrac{t + t'}{2}}$$

Poněvadž ale mají platnost rovnice (5) i (6), promění se výraz tento buď v

$$s_3 = s_1 \frac{0{\cdot}7599}{0{\cdot}76} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{273} \cdot \frac{t+t'}{2}} \qquad (7)$$

kde t a t' značí teploty dle Celsia,
nebo v

$$s_3 = s_1 \frac{0{\cdot}7599}{0{\cdot}76} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{218} \cdot \frac{t+t'}{2}}, \qquad (8)$$

kde t a t' jsou stupně Réaumurovy.

ad *d)* Kdyby vzduch zcela suchý byl, udával by vzorec (7) nebo (8) měrnou váhu jeho při teplotě $t+t'$ a tlaku $759{\cdot}9^{mm}$ vyjádřenou měrnou váhou při teplotě 0^0 a tlaku 760^{mm}; že však ve vzduchu vždycky vodní páry obsaženy jsou, sluší míti zření také k vlhkosti, kterou se koefficient α trochu zvětší. *Gauss* se totiž přesvědčil, že

$$\text{místo } \frac{1}{273} \text{ jest nám klásti } \frac{1}{249{\cdot}5} = 0{\cdot}004008$$

a

$$\text{místo } \frac{1}{218} \quad " \quad " \quad " \quad \frac{1}{199{\cdot}5} = 0{\cdot}005012,$$

čímž se na př. vzorci (8) dostane tvaru

$$s_3 = s_1 \frac{0{\cdot}7599}{0{\cdot}76} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{399}(t+t')} \qquad (9)$$

ad *e)* Pozorujíce při moři dvě sekundová kyvadla, jedno o délce l_0 na rovníku, kde intensita tíže jest g_0, a druhé l millimetrů dlouhé v zeměpisné šířce φ na místě z, kde těžná síla g působí a náš tlakoměr ve výšce h tlak $759{\cdot}9^{mm}$ na jevo dával, můžeme postaviti srovnalost [3])

$$l_0 : l = g_0 : g \qquad (10)$$

Je-li G prostá intensita tíže a F velikost odstředivosti na rovníku, bude [4])

$$g_0 = G - F$$

---

[3]) Viz: Dr. *Ant. Majer* „Fysika pro vyšší školy" str. 170. 3 a).

[4]) Srovnej: Dr. *Frt. Jos. Pisko* „Fysika pro gymnasia a realné školy" vzd. *Jos. Klika* str. 128. 1 a)

a $$g = G - F\cos^2\varphi = G - F(1 - \sin^2\varphi)$$
$$= G - F + F\sin^2\varphi$$
čili
$$g = g_0 + F\sin^2\varphi,$$
čímž si místo srovnalosti (10) zjednáme
$$l_0 : l = g_0 : g_0 + F\sin^2\varphi,$$
z toho pak délku sekundového kyvadla na místě z
$$l = l_0 + \frac{l_0 F}{g_0}\sin^2\varphi$$
a nebo položíce $\frac{l_0 F}{g_0} = \lambda$
$$l = l_0 + \lambda\sin^2\varphi \qquad (11)$$
Tuto hodnotu [5]) dosaďme za l do známé rovnice [6])
$$g = \pi^2 l \qquad (12)$$
kladouce zároveň
$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$
a obdržíme
$$g = \pi^2\left[l_0 + \frac{\lambda}{2}(1 - \cos 2\varphi)\right] = \pi^2\left(l_0 + \frac{\lambda}{2}\right) - \pi^2\frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi. \qquad (13)$$
Buď ve výrazu (11)
$$\varphi = 45^0,$$
pročež
$$\sin^2\varphi = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
a l promění se v délku l_{45} sekundového kyvadla v zeměpisné šířce 45^0, totiž v
$$l_{45} = l_0 + \frac{\lambda}{2}$$
a tím také rovnice (13) v
$$g = \pi^2 l_{45} - \pi^2\frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi$$
nebo, vyjmeme-li $\pi^2 l_{45}$, v
$$g = \pi^2 l_{45}\left(1 - \frac{\lambda}{2 l_{45}}\cos 2\varphi\right)$$

[5]) Dr. *August Kunzek* vyhledal ji ve svých „Studien aus der höheren Physik" 1856 str. 99.

[6]) Viz: Majerova již jmenovaná fysika str. 170. 4.

Dle rovnice (12) jest ale

$$\pi^2 l_{45} = g_{45} ,$$

proto, zavedeme-li označení

$$\frac{\lambda}{2 l_{45}} = \beta ,$$

bude

$$g = g_{45} (1 - \beta \cos 2 \varphi) , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

kde g_{45} udává těžnou sílu v zeměp. šířce 45° (při moři) a

$$\beta = 0\cdot0025935 \text{ [1]} .$$

Vědouce, že měrné váhy a těžné síly v témž poměru přibývá [2]), nabudeme se zřetelem k normálnímu spůsobu vzduchu

[1]) Poněvadž $\lambda = \frac{l_0 F}{g_0}$ a $l_{45} = l_0 + \frac{\lambda}{2} = l_0 + \frac{l_0 F}{2g_0} = l_0 \left(1 + \frac{F}{2g_0}\right)$,
bude

$$\beta = \frac{\lambda}{2 l_{45}} = \frac{F}{g_0} : \left(2 + \frac{F}{g_0}\right) .$$

Majíce za to, že země jest kulí dokonalou, ustanovíme poměr $\frac{F}{g_0}$ z úměry:

$$F : g_0 = \frac{4\pi^2 r}{\tau^2} : \pi^2 l_0 = 4r : \tau^2 l_0$$

(viz Pisko str. 129), kde

$r = 6366688$ metrův,
$\tau = 86164$ sek. a
$l_0 = 991$ millimetrův,

proto

$$\frac{F}{g_0} = \frac{1}{289} .$$

Sploštění země jest však příčinou, že udavatel tohoto poměru jest větší, totiž

$$\frac{F}{g_0} = \frac{1}{192} ,$$

což dokázáno pokusy kyvadlem provedenými, a že tudíž

$$\beta = \frac{1}{385} = 0\cdot00259.$$

[2]) Je-li P váha a M hmotnosť těla, g pak intensita těžné síly na nějakém místě, jest $P = Mg$ [viz Majer str. 176. (5)] a váha téhož těla na místě o jiné zeměpisné šířce

$$P' = Mg',$$

z čehož jde

$$P : P' = g : g'$$

nebo

$$VS : VS' = g : g' \quad \text{čili} \quad S : S' = g : g'.$$

$$s_1 : s_{45} = g : g_{45} \,,$$

z čehož pomocí stejniny (14) plyne

$$s_1 = \frac{s_{45}\, g}{g_{45}} = s_{45}\,(1 - \beta \cos 2\,\varphi)\,.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do vzorce (9) a uvážíme-li, že místo původního s nutno psáti s_3, obdržíme konečně

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{\sigma}{s_{45}} \cdot \frac{0.76}{0{\cdot}7599}\left(1 + \frac{1}{399}\,[t + t']\right)\left(1 + \beta \cos 2\varphi)\right), \quad (15)$$

kde

$$\frac{1}{1 - \beta \cos 2\varphi} = \frac{1 + \beta \cos 2\varphi}{1 - (\beta \cos 2\varphi)^2} = 1 + \beta \cos 2\varphi \,,$$

ježto $(\beta \cos 2\varphi)^2$ majíc hodnotu velmi malou vynechati se může.

Důkladnými zkouškami našel *Régnault*, že váha s_{45} krychlového decimetru suchého vzduchu u hladiny mořské při tlaku 760^{mm} a teplotě 0^0 jest $=$ 1.29277 gr., váha σ pak krychl. dm. rtuti $=$ 13596·03 gr., pročež

$$\frac{\sigma}{s_{45}} = \frac{13596{\cdot}03}{1{\cdot}29277} \doteq 10517\,.$$

Tuto hodnotu dosaďme do výrazu (15) a tento opět do rovnice (3), která byvši upravena přijme na se tvar žádaného, k barometrickému měření výšky sloužícího vzorce [1])

$$H = 18395^m \left(1 + 0{\cdot}0025935 \cos 2\varphi\right)\left(1 + \frac{1}{399}\,[t + t']\right)$$
$$\left(\log B_r - \log B_u\right) \quad (16)$$

Zbývá ještě podotknouti, že se teplem také rtuť v tlakoměru roztahuje a z té příčiny výše stojí než za pouhého působení vzduchu. Aby se tudíž barometrické výšky srovnávati mohly, musíme je na jistou teplotu rtuti ku př. na 0^0 převáděti a prodloužení zvýšenou teplotou vzniklé odčítati.[2])

---

[1]) Vzorec tento vztahuje se k stupňům Réaumurovým. Pilným pozorováním nabyl *Ramond* přesvědčení, že za číselného součinitele 18395 třeba zavésti 18393.

[2]) Snížena-li teplota pod 0^0, nutno sloupeček, o který se rtuť skrátila, přičísti.

Jsou-li T a T' teploty tlakoměrných sloupců[1]) při moři a na temení hory b_r a b_u výšky těchto sloupců na týchž místech při teplotě 0° a

$$\gamma = 0{\cdot}00023$$

rozprostraňovací koefficient rtuti pro 1° R., bude

$$b_r = B_r - B_r \gamma T = B_r (1 - \gamma T),$$
$$b_u = B_u - B_u \gamma T' = B_u (1 - \gamma T')$$

a

$$log \frac{b_r}{b_u} = log \frac{B_r (1 - \gamma T)}{B_u (1 - \gamma T')},$$

což ve vzorci (16) místo $log \frac{B_r}{B_u}$ postaviti sluší.[2])

Důkaz vzorce pro zrcadla.

(Podává *Augustin Pánek.*)

V učebních, o fysice jednajících knihách, jež vydal *Klika*, *Majer*, *Jamin*, *Ganot*, *Pouillet*, *Wüllner*, *Müller*, *Ettingshausen*, *Eisenlohr*, *Baumgartner*, *Hessler-Pisko* a jiní, vyvozuje se jen sbližný vzorec pro dutá zrcadla a to spůsobem vůbec známým, kterýž se též na základě harmonického dělení odůvodniti dá.[3])

Mousson a *Quintus Icilius* ve svých fysikách vyvinují však vzorec přesný, což uspokojuje mnohem více žáka zvyklého na methodu geometrie.

Tentýž vzorec možná velmi jednoduše vyvoditi takto:

Je-li S bodem svítícím (obr. 29.), bude $\sphericalangle \alpha = \beta$ a $OM = r$ poloměrem křivosti zrcadla dutého MC. Nazveme-li $SO = v$, $FO = u$, $\sphericalangle MOF = \varphi$ a opíšeme-li délkou u z bodu F oblouk, jest $JF = u$ a $\sphericalangle JFM = MSO$; pak plyne z podobnosti trojúhelníku FJM a SOM

$$JF : JM = SO : OM$$

---

[1]) Sloupec tlakoměrný bude míti vůbec jinou teplotu než vzduch, již ukazuje teploměr s každým dokonalejším tlakoměrem spojený.

[2]) Teplem roztahuje se také mosazný stupník, kterým se barometrická výška měří; že však změna tato nepatrná, vynechává se.

[3]) Viz: První zpráva jednoty českých mathematiků.