Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O logarithmické transcendentě

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 207--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123239

O logarithmické transcendentě. *)

(Podává *Augustin Pánek.)*

Položíme-li

$$\psi_n(1 \pm x) = \pm \frac{x}{1^n} - \frac{x^2}{2^n} \pm \frac{x^3}{3^n} - \frac{x^4}{4^n} \pm \ldots, \quad (1)$$

značí-li n číslo celistvé a kladné, jest

$$\psi_1(1 \pm x) = l(1 \pm x) = \pm \int \frac{dx}{1 \pm x},$$

$$\psi_2(1 \pm x) = \pm \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1 \pm x},$$

$$\psi_3(1 \pm x) = \pm \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{1 \pm x},$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(1 \pm x) = \pm \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \cdots \int \frac{dx}{1 \pm x}.$$

Funkci $\psi_2(1 \pm x)$ ustanovíme, integrujeme-li po částech a poněvadž $\psi_2(1 - x)$ dá se uvésti snadno na $\psi_2(1 + x)$, vyvodíme prvou, tak že

$$\psi_2(1 - x) = l\,x \,.\, l(1 - x) + \int \frac{dx}{1 - x} \, l\,x + C,$$

z čehož

$$\psi_2(1 - x) + \psi_2(x) = l\,x \,.\, l(1 - x) + C,$$

při čemž

$$0 \leqq x < 1.$$

Abychom ustanovili stálou C, položme $x = 0$, pak jest hodnota výrazu

$$/^0 \, l\,x \,.\, l(1 - x)$$

tvaru neurčitého $-\infty \,.\, 0$ a jak snadno poznati můžeme, jest nullou, tedy

$$C = \psi_2(1) + \psi_2(0)\,;$$

z řady (1) plyne však

$$\psi_2(1) = 0$$

$$\psi_2(0) = -1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \ldots;$$

*) Název tento zavedl *Spence* ve svém „Essay on Logarithmic transcendents“, jak švédský mathematik *Hill* v „Crelle, 3.“ uvádí.

hodnota ale

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

pročež

$$\psi_2(0) = -\frac{\pi^2}{6} = -1{\cdot}644934066848\ldots, \tag{2}$$

a tedy konečně

$$\psi_2(1-x) + \psi_2(x) = lx \, . \, l(1-x) - \frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Pro $x = \frac{1}{2}$, obdržíme z tohoto vzorce

$$\psi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Rozložíme-li rozsáhlost mezní $0 \ldots x$ integrálu

$$\int \frac{dx}{x} \, l(1-x)$$

na $0 \ldots 1$ a $1 \ldots x$, tu povstane

$$\psi_2(1-x) = \int_0^1 \frac{dx}{x} \, l(1-x) + \int_1^x \frac{dx}{x} \, l(1-x)$$

$$= \psi_2(0) + \int_1^x \frac{dx}{x} \, l(1-x).$$

Jest-li $x > 1$,

$$l(1-x) = i(2k+1)\pi + l(x-1)$$
$$= i(2k+1)\pi + lx + l\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

tedy

$$\psi_2(1-x) = \psi_2(0) + i(2k+1)\pi \, . \, lx + \frac{1}{2}(lx)^2 + \int_1^x \frac{dx}{x} \, l\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

a poněvadž

$$\int_1^x \frac{dx}{x} \, l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{x} \, l(1-x) - \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x} \, l(1-x),$$

obdržíme konečně z poslední rovnice

$$\psi_2(1-x) + \psi_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2\psi_2(0) + i(2k+1)\pi \, lx + \frac{1}{2}(lx)^2. \tag{4}$$

Rovnici (3) můžeme však psáti v tvaru

$$\psi_2(1-x)+\psi_2(x)=i(2k+1)\pi\, l x+l x\,.\,l(x-1)-\frac{\pi^2}{6},$$

načež rozdíl obou posledních je

$$\psi_2(x)-\psi_2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi^2}{6}+l x\, l(x-1)-\frac{1}{2}(l x)^2. \tag{5}$$

Že možno i jiné spojení funkce ψ_2 sestrojiti, vysvítá zřejmě z předcházejícího.

Zavedeme-li dále x^2 místo x do původního vzorce pro ψ_2 bude nutno položiti $2x\,dx$ místo dx, načež povstane

$$\psi_2(1-x^2)=2\int\frac{dx}{x}l(1+x)+2\int\frac{dx}{x}l(1-x)$$

a podle téhož vzorce ψ_2

$$\psi_2(1-x^2)=2\psi_2(1+x)+2\psi_2(1-x). \tag{6}$$

Z této rovnice jde

$$\psi_2(1+x)=\frac{1}{2}\psi_2(1-x^2)-\psi_2(1-x),$$

ze kteréž možno hodnoty číselné pro $\psi_2(1+x)$ sestrojiti. Použijeme-li vzorce (3), obdržíme

$$\psi_2(1+x)=\frac{1}{2}\left[l x^2.\,l(1-x^2)-\frac{\pi^2}{6}-\psi_2(x^2)\right]$$
$$-\left[l x\,.\,l(1-x)-\frac{\pi^2}{6}-\psi_2(x)\right]$$

neb $$\psi_2(1+x)=\frac{\pi^2}{12}+l x\,.\,l(1-x)+\psi_2(x)-\frac{1}{2}\psi_2(x^2);$$

zavedeme-li ale do řady (1) jednou x místo $1-x$, po druhé x^2 místo $1-x^2$, jest

$$\psi_2(x)=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(1-x)^a}{a^2}$$
$$\psi_2(x^2)=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^a}{a^2}$$

a tedy posléze

$$\psi_2(1+x)=\frac{\pi^2}{12}+l x\, l(1-x)+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^a}{a^2}-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(1-x)^a}{a^2}\text{*)}$$

*) Úkon $\psi_2(1+x)$ jeví svou důležitost v ballistice, jak ukázal generalmajor *Rouvroy*.

Položíme-li $\frac{1}{x}$ místo x do funkce $\psi_2\ (1+x)$, obdržíme

$$\psi_2\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int\frac{dx}{x}\,lx\int\frac{dx}{x}\,l(1+x)+C;$$

pro $x=1$ bude pak

$$C=2\,\psi_2\,(2)=\frac{\pi^2}{6}\tag{8}$$

a tudíž konečně

$$\psi_2\,(1+x)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\,lx-\psi_2\left(1+\frac{1}{x}\right),\tag{9}$$

v kteréžto relaci jest $\psi_2\ (1+x)$ vyjádřeno $\psi_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Dle toho vzorce dá se opětně tabulka pro $\psi_2\,(1+x)$ sestaviti.

Analogickým spůsobem lze vyvoditi $\psi_3\ (1+x)$.

$$\psi_3(1+x)=\int\frac{dx}{x}\,\psi_2\,(1+x)-\int\frac{dx}{x}\,\psi_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\psi_3\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

a dle vzorce (9)

$$\psi_3\,(1+x)=\int\frac{dx}{x}\left[2\,\psi_2\,(2)+\frac{1}{2}\,(lx)^2\right]+\psi_3\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

a tudíž konečně

$$\psi_3\,(1+x)=\frac{(lx)^3}{3\,!}+2\,\psi_2\,(2)\,\frac{lx}{1\,!}+\varphi_3\left(1+\frac{1}{x}\right),\tag{10}$$

při čemž stálá pro $x=1$, jest nullou.

Podobně se obdrží především

$$\psi_4\,(1+x)=\int\frac{dx}{x}\,\psi_3\,(1+x)-\int\frac{dx}{x}\,\psi_3\left(1+\frac{1}{x}\right)-\psi_4\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

a dle vzorce (10) pak

$$\psi_4\,(1+x)=\int\frac{dx}{x}\left[\frac{(lx)^3}{3\,!}+2\,\psi_2\,(2)\,lx\right]-\psi_4\left(1+\frac{1}{x}\right)+C$$

aneb

$$\psi_4\,(1+x)=\frac{(lx)^4}{4\,!}+2\,\psi_2\,(2)\,\frac{(lx)^2}{2\,!}+2\,\psi_4\,(2)-\psi_4\left(1+\frac{1}{x}\right)\tag{11}$$

značí-li

$$C=2\,\psi_4\,(2).$$

Všeobecně obdržíme

$$\psi_{2n}(1+x)=\frac{(l\,x)^{2n}}{1^{2n,1}}+2\,\psi_2(2)\,.\,\frac{(l\,x)^{2n-2}}{1^{2n-2,1}}+\,.\,.\,.\,+2\,\psi_{2n}(2)-$$

$$-\psi_{2n}\left(1+\frac{1}{x}\right), \tag{12}$$

$$\psi_{2n+1}(1+x)=\frac{(l\,x)^{2n+1}}{1^{2n+1,1}}+2\,\psi_2(2)\,.\,\frac{(l\,x)^{2n-1}}{1^{2n-1,1}}+\,.\,.\,.\,+$$

$$+2\,\psi_{2n}(2)\,.\,l\,x+\psi_{2n+1}\left(1+\frac{1}{x}\right) \tag{13}$$

Jako vzorec (3) obdržíme i

$$\psi_3\,(1-x^2)=2\int\frac{dx}{x}\,\psi_2\,(1-x^2)$$

$$=2^2\int\frac{dx}{x}\,\psi_2\,(1+x)+2^2\int\frac{dx}{x}\,\psi_2\,(1-x)$$

to jest

$$\psi_3\,(1-x^2)=2^2\,\psi_3\,(1+x)+2^2\,\psi_3\,(1-x) \tag{14}$$

a t. d. vůbec tvar indepedentní

$$\psi_n\,(1-x^2)=2^{2n-1}\,\psi_n\,(1+x)+2^{2n-1}\,\psi_n\,(1-x)\,. \tag{15}$$

Pro $x=1$ jde z posledního vzorce

$$\psi_n\,(0)=2^{n-1}\,\psi_n\,(2)+2^{n-1}\,\psi_n\,(0)$$

a tedy

$$\psi_n\,(2)=\frac{1-2^{n-1}}{2^{n-1}}\,\psi_n\,(0)\;; \tag{16}$$

značí-li dle (1)

$$\psi_n\,(0)=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\,,$$

$$\psi_n\,(2)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(-1)^{a-1}}{a^n}\,. \tag{17}$$

Položíme-li $n=2$, jest dle (16)

$$\psi_2\,(2)=-\frac{1}{2}\,\psi_2\,(0)$$

a dle (2) jest tedy

$$\psi_2\,(2)=\frac{\pi^2}{12}=0{\cdot}822467033424\;,$$

kterážto hodnota však vyplývá bezprostředně ze vzorce (7) aneb (8); $\psi_2\,(2)$ značí řadu, kterou obdržíme ze vzorce (17), zavedeme-li $n=2$,

$$\psi_2(2)=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\ ^{*)}$$

Zavedeme-li x^m místo x do řady $\psi_n(1-x)$, obdržíme

$$\psi_n(1-x^m)=x^m-\frac{x^{2m}}{2^n}+\frac{x^{3m}}{3^n}-\frac{x^{4m}}{4^n}+\ldots$$

a dle významu původního, jaký má ψ_n, povstane pak

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}}{1-x^m}dx=-\frac{1}{m^n}\psi_n(1-x^m),$$

kdež na levé straně máme integrálů v počtu n, načež bude, provedeme-li integraci poslední, též

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}l(1-x^m)=\frac{1}{m^{n-1}}\psi_n(1-x^m)\,.$$

Z těchto dvou vzorců plyne pro $n=2$,

$$\int_0^1\frac{dx}{x}l(1-x^m)=-m\int_0^1\frac{dx}{x}\int\frac{x^{m-1}}{1-x^m}dx=\frac{1}{m}\psi_2(0)$$

$$=-\frac{\pi^2}{6m},\qquad(18)$$

neboť pro horní mez $x=1$ jest $\psi_2(1)=0$.

Podobně obdržíme z řady $\psi_n(1+x)$, zavedeme-li x^m místo x,

$$\psi_n(1+x^m)=-\left(x^m+\frac{x^{2m}}{2^n}+\frac{x^{3m}}{3^n}+\ldots\right)$$

tedy

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{x^{m-1}}{1+x^m}dx=\frac{1}{m^n}\psi_n(1+x^m)$$

a též

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}l(1+x^m)=\frac{1}{m^{n-1}}\psi_n(1+x^m),$$

načež možno celou řadu násobných integrálů vyvoditi pro $m=1$, $n=2, 3, 4, \ldots$; podobně pro $m=2$, a t. d. a podobně jako dříve obdržíme i integrál

$$\int_0^1\frac{dx}{x}l(1+x^m)=\frac{\pi^2}{12m}\,.\qquad(19)$$

---

*) Porovnej hodnotu integrálu (15) pag. 115 v díle „*Studnička*, Základové vyšší math. II., 1871."

Dle toho lze i jiné relace transcendenty ψ ustanoviti a tedy i součet řad a tudíž i tvary integrálů logarithmických.*) *Hill***) pojednává o transcendentě $\lambda(x)$, kterou *Landen* podal a *Legendre*†) dokázal a která souvisí s funkcí ψ_2 rovnicí

$$\lambda(x) = -\psi_2(1-x).$$

Jako pro elliptické integrály a pro funkci gamma sestrojil tabulky *Legendre* ve svém „Traité de fonctions *elliptiques*", *Kramp* ve své „Analyse des réfractions astronomiques" pro transcendentu $\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ a *Soldner* pro svůj integrální logarithmus, podobně sestavil *Hill* pro transcendentu $\lambda(x)$ hodnoty.

O přítažnosti.

(Napsal Dr. *F. J. Studnička.*)

K nejdůležitějším zjevům přírodním patří zajisté úkazy, jichž příčinu představuje síla přítažná, *přítažnost* neb *attrakce;* jestiť síla tato duší všehomíra, řídíc všechny pohyby těles světových tak správně a bezpečně, že na tisíce let nazpět i ku předu můžeme fáse těchto pohybů zcela určitě počítati a udávati. Od té doby, co se poznala příčina těchto zjevů, co byly vyzpytovány zákony, jimiž se tato síla řídí, od té doby počíná se rozvíjeti fysická astronomie, od té doby ujímá a rozšiřuje se fysikální názor světa.

---

*) Integrály funuce $l\,[1 \pm \varphi(x)]$ ve spojení s funkcí algebraickou x v mezích $0 \ldots 1$, nazval *Legendre* ve svém „Traité de fonct. ellipt." *Eulerovými.* — Tvary těchto integrálů měly by se nyní nazývati *transcendenty Eulero-Legendrovými* neboť *Legendrem* obdržely patřičného významu. — Též tak zvané *funkce cylindrické* neměly by se nazývati pouze *Besselovými*, poněvadž *Fourier* je vynalezl a *Bessel* rozšířil a tudíž měly by slouti právem *Fouriero-Besselovými.*

**) Crelle Journal, Bd. 3.

†) Exercices de calc. int.