Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Šolín

Počátkové arithmografie. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 5, 261--271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123232

Počátkové arithmografie.

(Píše prof. *Josef Šolín.*)

(Pokračování.)

VIII. Řešení rovnic stupně třetího.

Přímá řada involuční $\ddot{P}_{1.2}$ a přímá řada jednoduchá $\dot{P}'$ buďtež vespolek projektivné*) a soumístné. Úplná družina $m_1.m_2$, m' složeného tohoto útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$ skládá se z dvojiny $m_1.m_2$ řady involuční $\ddot{P}_{1.2}$ a z příslušného bodu m' jednoduché řady $\dot{P}'$.

Vytknouce na přímce P určitý počátek o, stanovme body m_1, m_2, m' úsečkami $\overline{om_1} = x_1$, $\overline{om_2} = x_2$ (jichž společnou známkou budiž x), $\overline{om'} = x'$. Pak souvisí proměnné x, x' rovnicí, kteráž jest co do x stupně druhého, co do x' pak stupně prvního. Naopak lze každou takovou rovnici bráti za rovnici útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$ složeného z řady involuční a řady jednoduché, jež jsou projektivné a soumístné.

Sjednocuje-li se v určité družině $e_1.e_2, e'$ bod e' s bodem e_1 neb e_2, máme tak zvaný samodružný prvek složeného útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$. Takovým bodům svědčí podmínka $x = x'$, kterouž mění se rovnice svrchu dotčená v rovnici, jež jsouc co do veličiny x stupně třetího určuje tři samodružné body útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$, z nichž jeden vždy jest realný, ostatní dva však mohou býti buď realné neb idealné.

Dána-li naopak rovnice třetího stupně

$$x^3 + ax^2 + bcx + def = 0, \qquad (1)$$

kdež jednotliví součinitelé znamenají úsečky dané, lze ji bráti za rovnici samodružných bodů složeného útvaru bodového $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$, který tím není úplně stanoven, a jehož rovnice tedy do jisté míry *voliti* se může.

Grafické řešení rovnice (1) záleží pak v strojení samodružných bodů útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$.

---

*) Viz theorii involuce v Cremonově „Úvodu do geometrické theorie křivek rovinných" aneb prof. Weyra spis „Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde" aneb také článek jeho „O rovinných racionálních křivkách třetího stupně" v 3. čísle III. ročníku tohoto časopisu.

Majíce na zřeteli tuto úlohu geometrickou, zvolme jakoukoli čáru Γ druhého stupně a promítněme na ni řady $\ddot{P}_{1.2}$, $\dot{P}'$ z libovolného bodu s téže čáry. Tím vznikne na čáře Γ útvar $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\,\dot{\Gamma}')$ skládající se z dvou řad druhého stupně: z řady involuční $\ddot{\Gamma}_{1.2}$ a z řady jednoduché $\dot{\Gamma}'$, kteréž jsou projektivné na vzájem. Každou dvojinou $\mathfrak{m}_1 \,.\, \mathfrak{m}_2$ involuční řady $\ddot{\Gamma}_{1.2}$ stanoven jest paprsek $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ čili M_0, a všeliké tyto paprsky procházejí určitým bodem s_0 (středem involuce) tvoříce tak svazek $\bar{s}_0$ projektivný k řadě involuční $\ddot{\Gamma}_{1.2}$ a proto i k svazku $\bar{s}'$, jímž promítá se řada $\dot{P}'$ z bodu s čáry Γ. Sdružené paprsky M_0, M' svazků $\bar{s}_0$, $\bar{s}'$ sekou se dle známé věty v bodech určité čáry $\varDelta$ druhého stupně, kteráž prochází body s_0, s a t. d. Čáry Γ, $\varDelta$ mají společný bod s a sekou se mimo to ještě ve třech bodech $\mathfrak{e}^+$, $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{g}^+$, kteréž jsouce patrně samodružnými body útvaru $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\,\dot{\Gamma}')$ promítají se z bodu s na přímku P v samodružné body e^+, f^+, g^+ útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$. Nepotřebujeme dokládati, že aspoň jeden z těchto bodů musí býti realný.

Řešení úlohy záleželo by tedy v sestrojení průsečíků dvou čar Γ, $\varDelta$ druhého stupně: jedné stálé, sloužící k řešení všelikých úloh toho rázu, druhé pak proměnné od případu k případu. Čára Γ budiž jednou na vždy sestrojena; *strojení čáry $\varDelta$ hleďme však obejíti a vůbec vystačiti přímkou a kružnicí.*

Namítá se tedy úloha: Čára Γ druhého stupně dána jest úplným obrazem svým, další čára $\varDelta$ druhého stupně však pěti body 1, 2, 3, 4, 5; sestrojiti se mají průsečíky s, $\mathfrak{e}^+$, $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{g}^+$ obou čar.*) Čtyřmi body s, $\mathfrak{e}^+$, $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{g}^+$ lze vésti nesčíslné množství čar druhého stupně; souhrn všech nazývá se *svazkem čar stupně druhého.* Svazek takový $(\Gamma\varDelta\ldots)$ obsahuje buď samé hyperboly aneb všecky tři druhy čar stupně druhého (nesčíslné ellipsy, nesčíslné hyperboly, dvě paraboly), nepočítáme-li zvláště případ přechodný, kde obě paraboly se sjednocují a svazek obsahuje mimo to samé hyperboly. Středy všelikých čar svazku $(\Gamma\varDelta\ldots)$ jsou vždy na určité čáře Σ druhého stupně (čáře středové), kteráž jest v prvním případě ellipsou, v druhém hy-

*) Jeden z nich, bod s, náleží ovšem k bodům *daným,* čímž však úloha podstatně se nemění.

perbolou, v třetím parabolou; úběžné body parabol svazku (středy těchto parabol) jsou úběžnými body čáry středové.

Vyšetřujme podmínky, jimž musí vyhověti se, má-li svazek čar druhého stupně obsahovati *kružnici*; což ovšem možno jen v případě druhém, t. j. obsahuje-li ellipsy vůbec. Jak známo, seče svazek čar druhého stupně každou přímku v řadě involuční; samodružné body této řady jsou pak body dotyčnými obou (realných neb idealných) čar svazku, kteréž té přímky se dotýkají. Svazek $(\Gamma \varDelta \ldots)$ stanoví tudíž také na *úběžné přímce* U_∞ své roviny řadu involuční; samodružné body její ε_∞, φ_∞ jsou pak úběžnými body (středy) obou parabol svazku a tedy, jak výše dotčeno, také úběžnými body křivky středové.

Jak dále známo, stanovena všelikou přímkou a čarou druhého stupně *involuční řada harmonických pólů* (t. j. bodů oné přímky, kteréž na vzájem jsou sdruženy, vztahují-li se k oné čáře stupně druhého); samodružnými body této řady jsou průsečíky přímky s čarou. Tak dána jest i přímkou úběžnou U_∞ a každou čarou svazku $(\Gamma \varDelta \ldots)$ určitá involuční řada harmonických pólů; každá z těchto úběžných řad promítá se pak ze středu příslušné čáry involučním svazkem sdružených průměrů téže čáry. Body ε_∞, φ_∞, rozdělujíce dle předešlého harmonicky oba úběžné body každé čáry svazku $(\Gamma \varDelta \ldots)$, tvoří vespolek družinu ve všech oněch řadách, a promítají se tedy ze středu každé čáry družinou průměrův jejích.

Obsahuje-li svazek $(\Gamma \varDelta \ldots)$ kružnici a je-li r jejím středem, jsou dle toho paprsky $r\varepsilon_\infty$, $r\varphi_\infty$ sdruženými průměry kružnice a protož pravoúhelné na vzájem: hyperbola středová jest v tomto případě pravoúhelná (rovnostranná). *Má-li tedy svazek čar druhého stupně obsahovati kružnici, musí býti středová čára jeho hyperbolou pravoúhelnou.*

Nepotřebujeme dokládati, že podmínce této vůbec nebude vyhověno, jakož pak také body s, $\mathfrak{e}^+$, $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{g}^+$ nebudou vůbec na kružnici. Vždy můžeme však svazek daný $(\Gamma \varDelta \ldots)$ přetvořiti po zákonech kollineace tak, aby vzniklý tím svazek $(\Gamma' \varDelta' \ldots)$ obsahoval kružnici, kteráž pak nejlépe se hodí k sestrojení bodů $\mathfrak{e}^+$, $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{g}^+$.

Abychom přetvoření to již napřed snadnějším učinili, zvolme za pevnou čáru Γ *ellipsu*; pak obsahuje zajisté svazek

($\Gamma\Delta\ldots$) všecky tři druhy čar stupně druhého, a čára středová Σ jest hyperbolou, ovšem vůbec kosoúhelnou.

Přetvoříme-li svazek ($\Gamma\Delta\ldots$) po *obecných zákonech kollineace*, nebude čára Σ', jež vznikne přetvořením středové čáry Σ svazku daného, čarou středovou svazku přetvořeného ($\Gamma'\Delta'\ldots$). Okolnost, že čára Σ jest hyperbolou, dovoluje však založiti přetvoření na zvláštních zákonech *affinity* čili *příbuznosti*. V tom případě bude čára Σ', jež vznikne přetvořením čáry středové Σ svazku ($\Gamma\Delta\ldots$), čarou středovou přetvořeného svazku ($\Gamma'\Delta'\ldots$), a poněvadž v příbuzných útvarech odpovídají si na vzájem čáry druhého stupně téhož rázu, bude čára Σ' také hyperbolou. Jedinou podmínkou přetvoření jest pak pravoúhelnost asymptot této čáry. Vytkněme však ještě další podmínku, t. j. *by ellipsa Γ přetvořila se v sebe samu*; neboť kdybychom čáru Γ' zvlášť teprv strojiti museli, neměla by konstrukce, jíž chceme obejíti rejsování čáry Δ, ceny nižádné. Oběma podmínkám vyhovíme, přisoudíce krajním bodům průměrů E, F, jimiž promítají se body ε_∞, φ_∞ ze středu ellipsy Γ, krajní body os X, Y, což může státi se osmerým spůsobem; čtyři spůsoby vedou pak k affinitě prvoprojektivné (perspektivné) a spolu involuční.*)

Užijeme-li jednoho z těchto čtyř spůsobů a sestrojíme-li osu a úběžný střed příbuznosti, můžeme ihned odvoditi z daných pěti bodů 1, 2, 3, 4, 5 čáry Δ sdružené s nimi body 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ čáry příbuzné Δ' (čára Γ jest zároveň Γ').

Svazek ($\Gamma'\Delta'\ldots$) obsahuje určitou kružnici K'; jde pak o sestrojení této čáry. Veďme přímku 1′2′; na ní stanoví svazek ($\Gamma'\Delta'\ldots$) řadu involuční; body 1′, 2′ jsou jednou družinou; ellipsa Γ' dává další družinu $II.II'$ (realnou neb idealnou); neznámá kružnice K' dala by třetí družinu $k.k'$, a t. d. Involuční tuto řadu lze však též vyvoditi na přímce 1′2′ nesčíslnými *svazky kružnic;* ve všech prochází kružnice nekonečného poloměru (společná sečná) středem λ této řady involuční. Bod λ můžeme sestrojiti znajíce dvě družiny 1′. 2′, $II.II'$ oné řady (nechť jest družina $II.II'$ realná neb idealná). Veďme dále přímku 1′3′; tato seče svazek ($\Gamma'\Delta'\ldots$) v involuční řadě, v níž jest 1′. 3′ jednou družinou; jinou dává ellipsa Γ'; jinou stanoví hledaná kružnice K', a t. d. I tuto řadu lze vyvoditi nesčíslnými

*) Viz „Kortum, Über geometrische Aufgaben 3. und 4. Grades.“

svazky kružnic; společná sečná prochází pak zase středem ν téže řady, kterýž bod můžeme sestrojiti. Obě řady involuční lze však vyvoditi na přímkách $1'2'$, $1'3'$ také *jediným svazkem kružnic;* společnou sečnou musí býti přímka $\lambda\nu$, a jedna kružnice svazku jde body $1'$, $2'$, $3'$. Žádaná kružnice K' stanovíc na jedné i na druhé přímce $1'2'$, $1'3'$ družinu příslušné řady musí náležeti k tomuto svazku. Středovou čarou svazku kružnic jest však přímka kolmá k společné sečné $\lambda\,\nu$, a poněvadž jeden její bod (střed kružnice $1'2'3'$) máme, můžeme ji rejsovati. V této přímce musí pak střed žádané kružnice K' býti obsažen.

Vedeme-li dále přímku $1'\,4'$, seče tato svazek $(\Gamma'\Delta'\ldots)$ v další řadě involuční; užijeme-li spůsobem obdobným této řady ve spojení s jednou a dále s druhou z řad výše dotčených, obdržíme další dvě přímky, na nichž střed žádané kružnice K' obsažen býti musí. Tím stanoven střed hledaný; v tom pak, že všecky tři přímky protínati se musí v bodu jediném, máme spolu kontrolu správnosti rejsování.

Kružnice K', jež nyní rejsovati se může, stanoví na ellipse Γ' mimo bod s' body $\mathfrak{e}'_{+}$, $\mathfrak{f}'_{+}$, $\mathfrak{g}'_{+}$, z nichž pak přetvořením opačným vycházejí žádané průsečíky $\mathfrak{e}^{+}$, $\mathfrak{f}^{+}$, $\mathfrak{g}^{+}$ čar Γ, Δ. —

Přistupme nyní k podrobnějšímu výkladu jednotlivých výkonů, jichž vyžaduje grafické řešení rovnic stupně třetího, majíce v tom na zřeteli co nejvýhodnější zřízení konstrukce.

Za rovnici útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$, z kteréž nechť vyvozena byla rovnice (1), berme

$$(x'+a)\,x^2+bcx'+def=0. \tag{2}$$

Místem útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$ budiž na př. osa X pevné ellipsy Γ (obr. 13.). Abychom z rovnice (2) odvodili co nejvýhodněji *tři úplné družiny* tohoto útvaru, položme za prvé

$$x^2=0,$$

i obdržíme

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x'=-\frac{def}{bc},$$

kterýž poslední výraz vyžaduje násobení dané úsečky dvěma poměry a dle čl. 2. snadně se strojí. Hodnoty právě vytčené dávají jednu úplnou družinu útvaru $(\ddot{P}_{1.2}\,\dot{P}')$ skládající se z počátku o, kterýž tvoří *sjednocenou dvojinu* $o_{1.2}$ (samodružný bod) involuční řady $\ddot{P}_{1\cdot 2}$, pak z příslušného bodu o' řady $\dot{P}'$. Za druhé budiž

$$x^2 = \infty,$$

což vede k hodnotám

$$x_1 = \infty,\quad x_2 = \infty,\quad x' = -a.$$

Hodnoty právě vytčené, nevyžadujíce žádné konstrukce, dávají další úplnou družinu útvaru ($\ddot{P}_{1\cdot 2}$ $\dot{P}'$), obsahující druhou sjednocenou dvojinu $u^{\infty}_{1\cdot 2}$ (úběžnou) involuční řady $\ddot{P}_{1\cdot 2}$ a příslušný bod u' (úběžník) řady $\dot{P}'$. Položíme-li konečně za třetí

$$x' = \infty,$$

obdržíme dále

$$x^2 = -b\,c,$$

kteráž rovnice řešiti se musí. Kdyby $-bc > 0$, sestrojili bychom prostě střední úměrnou úseček $\pm b$, $\mp c$. Majíce však na zřeteli možnost případu opačného, v kterémž hledaná dvojina jest idealná, postupujme obecně takto. Rovnici

$$x^2 + b\,c = 0$$

beřme za rovnici samodružných bodů involuční řady, kteréž náleží rovnice

$$x\,x' + b\,c = 0$$

(viz čl. VII. o řešení rovnic stupně 2.). Poněvadž hodnotě $x' = \infty$ odpovídá hodnota $x = 0$, jest počátek *o středem* oné involuční řady; další družinu stanoví hodnoty $x = \pm b$, $x' = \mp c$; obě tyto družiny jsou pak nejvhodnějšími částkami určovacími dvojiny hledané, nechť jest realná neb idealná. Jak z předešlého známo, žádá další konstrukce, aby hledaná dvojina (znamenejme ji $v_1 . v_2$) promítla se na ellipsu Γ z bodu s této čáry (do $\mathfrak{v}_1 . \mathfrak{v}_2$), i jde pak výhradně o přímku $\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2$ čili V_0 těchto dvou bodů. Abychom přímku V_0 sestrojili, promítejme také involuční řadu pomocnou, jíž stanovíme dvojinu $v_1 . v_2$, z bodu s na ellipsu Γ. (Obrazec 14. naznačuje tuto konstrukci zvláště pro případ, že dvojina $v_1 . v_2$ a tedy i $\mathfrak{v}_1 . \mathfrak{v}_2$ jsou idealné; obě odvozené družiny řady pomocné jsou tu znamenány písmeny $o'' . o'''_{\infty}$, $m'' . m'''$). Tím vznikne na ellipse Γ involuční řada druhého stupně; družina $o'' . o'''_{\infty}$ promítá se v družinu $\mathfrak{o}'' . \mathfrak{o}'''$, družina $m'' . m'''$ v družinu $\mathfrak{m}'' . \mathfrak{m}'''$. Přímky $\mathfrak{o}''\,\mathfrak{o}'''$, $\mathfrak{m}''\,\mathfrak{m}'''$ sekou se v středu v_0 involuce; polára tohoto bodu (osa involuce) protínajíc čáru Γ v bodech $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ (v obr. 14. ovšem idealných) jest žádanou přímkou V_0. —

Třemi úplnými družinami $(o_{1.2}, o')$, $(u^{\infty}_{1.2}, u')$, $(v_1 . v_2, v'_{\infty})$ stanoven jest útvar $(\ddot{P}_{1.2}\ \dot{P}')$ i může promítnouti se na ellipsu Γ z libovolného bodu jejího. V obr. 13. (i 14.) zvolen vrchol s na ose Y za střed promítání, i vyvozeny tři úplné družiny $(\mathfrak{o}_{1.2}, \mathfrak{o}')$, $(\mathfrak{u}_{1.2}, \mathfrak{u}')$, $(\mathfrak{v}_1 . \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}')$ útvaru $(\ddot{\Gamma}_{1.2}\ \dot{\Gamma})$. Dvojiny $\mathfrak{o}_1 . \mathfrak{o}_2$, $\mathfrak{u}_1 . \mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_1 . \mathfrak{v}_2, \ldots$ stanoví paprsky svazku, který jsme v obecném výkladu znamenali písmenem $\bar{s}_0$, jehož středem jest však v obr. 13. úběžný bod u_∞ osy X. (Paprsek $\mathfrak{u}_1\, \mathfrak{u}_2$ jest tečnou v bodu s, paprsek $\mathfrak{o}_1\, \mathfrak{o}_2$ tečnou ve vrcholu protějším.) Svazek $\bar{u}_\infty$ stanoví pak se svazkem $s\ (o'\, u'\, v'_\infty \ldots)$ čáru Δ stupně druhého, jež procházejíc body u_∞, s dotýká se v bodu s paprsku $s u'$ sdruženého s paprskem $u_\infty s$ čili $\mathfrak{u}_1\, \mathfrak{u}_2$, v bodu u_∞ pak paprsku $\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2$ sdruženého s paprskem $s u_\infty$ čili $s v'_\infty$. Paprsek $\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2$ jest dle toho asymptotou čáry Δ a tato hyperbolou. Bodem s a příslušnou tečnou $s u'$ dány jsou dva sjednocené body 1, 1; asymptotou $\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2$ další dva sjednocené body 2_∞, 2_∞; průsečík 3 paprsků so', $\mathfrak{o}_1\, \mathfrak{o}_2$ jest pátým bodem čáry Δ. Čára Δ jest těmito pěti body úplně stanovena; hledíce však k dalším výkonům sestrojme si ještě druhý její bod úběžný.

Úběžná přímka U_∞ roviny nákresné jest paprskem svazku $\bar{u}_\infty$, i patrno, že dává druhý úběžný bod hyperboly Δ. Jde jen o sestrojení paprsku, který odpovídá ve svazku $\bar{s}'$ úběžné přímce U_∞ co paprsku svazku $\bar{u}_\infty$. Úběžná přímka U_∞ co paprsek svazku $\bar{u}_\infty$ stanovena jest vzdáleností $y = \infty$. Přímka, vedená rovnoběžně s osou X ve vzdálenosti η, seče ellipsu Γ, jejíž poloosy znamenejme písmeny α, β, ve dvou bodech, jimž svědčí rovnice

$$\xi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\beta^2 - \eta^2),$$

a promítneme-li je na osu X z bodu s, jsou úsečky průmětův dány rovnicí

$$x^2 = \frac{\beta^2}{(\beta-\eta)^2}\,\xi^2 = \frac{\beta^2 - \eta^2}{(\beta-\eta)^2}\,\alpha^2.$$

Za hodnotu $\eta = \infty$ obdržíme

$$x^2 = -\alpha^2$$

co rovnici idealné dvojiny $i_1 . i_2$ v řadě $\ddot{P}_{1.2}$. Vložíme-li pak tuto hodnotu do rovnice (2), obdržíme co úsečku bodu i' řady $\dot{P}'$

$$x' = \frac{a\alpha^2 - def}{-\alpha^2 + bc},$$

kterýž výraz strojiti lze spůsobem známým.*)

Paprskem $s\,i'$ dán jest druhý úběžný bod 4_∞ hyperboly $\varDelta$; příslušnou asymptotu $4_\infty 4_\infty$ obdržíme pak, přenesouce na př. na paprsku $s\,o'$ úsečku $III\,3$ do $1\,I$ a vedouce bodem I rovnoběžku s paprskem $s\,i'$. Asymptotou právě sestrojenou stanoveny jsou další dva sjednocené body $4_\infty 4_\infty$ čáry $\varDelta$.

Další úlohou jest strojení úběžných bodů ε_∞, φ_∞ *středové hyperboly* Σ svazku $(\Gamma\varDelta\ldots)$. Jsou to samodružné body řady involuční $\ddot{U}_\infty$, v kteréž protíná svazek $(\Gamma\varDelta\ldots)$ přímku úběžnou své roviny.

Čára Γ stanoví idealnou družinu $\mathfrak{i}_1 . \mathfrak{i}_2$, čára $\varDelta$ realnou družinu $2_\infty . 4_\infty$; promítneme-li tuto involuční řadu na čáru Γ z bodu s, bude první družina $\mathfrak{i}_1 . \mathfrak{i}_2$ spolu svým průmětem, druhá pak promítne se do $1 . \mathfrak{i}'$. Přímky $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2$ (t. j. U_∞) a $1\,\mathfrak{i}'$ stanoví střed involuce (kterýž sjednocuje se patrně s bodem 4_∞); vedeme-li z něho tečny k čáře Γ, obdržíme samodružné body h, k řady involuční na této čáře, a paprsky $s\,h$, $s\,k$ stanoví žádané samodružné body ε_∞, φ_∞ řady $\ddot{U}_\infty$.

Tyto úběžné body hyperboly středové promítají se pak, jak svrchu vyloženo, ze středu o ellipsy Γ sdruženými průměry E, F této čáry.

---

*) Nejde-li nám o to, abychom bod 4_∞ *odvodili bezprostředně ze součinitelů rovnice dané,* můžeme jej sestrojiti velmi snadně ze známých již pěti bodů 1, 1, 2_∞, 2_∞, 3 na základě věty Pascalovy. Mějme tu na zřeteli šestiúhelník 1 1 3 2_∞ 2_∞ 4_∞ vepsaný v čáru $\varDelta$, jehož protější strany 1 1 a $2_\infty 2_\infty$, 1 3 a $2_\infty 4_\infty$, 3 2_∞ a $4_\infty 1$ protínati se musí v bodech α, β, γ určité přímky Π. Body α, β můžeme sestrojiti (β sjednocuje se s úběžným bodem paprsku 1 3), i můžeme tedy vésti přímku Π, na níž stanoví paprsek 3 2_∞ třetí bod γ, jímž prochází hledaná strana 1 4_∞ dotčeného šestiúhelníka.

Dle předešlého výkladu jest nám dále přetvořiti svazek $(\Gamma\Delta\ldots)$ po zákonech affinity tak, aby krajním bodům průměrů E, F odpovídaly krajní body os X, Y ellipsy Γ.

Přisoudíme-li bodům a', a'_0 průměru E body a, a_0 osy X, bodu $1'$ průměru F pak bod 1 osy Y, máme affinitu prvoprojektivnou a involuční; středem příbuznosti jest úběžný bod paprsků $a\,a'$, $a_0\,a'_0$, $1\,1'$, ..., osou příbuznosti pak průměr Z, sdružený s osnovou těchto paprsků.

Dle předešlého výkladu jest ellipsa Γ spolu čarou přetvořenou Γ'; po známých zákonech odvoďme pak dále z asymptot $2_\infty 2_\infty$, $4_\infty 4_\infty$ čáry Δ asymptoty $2'_\infty 2'_\infty$, $4'_\infty 4'_\infty$ přetvořené čáry Δ'.

Přetvořený svazek $(\Gamma\Delta'\ldots)$ obsahuje určitou kružnici K'; sestrojení této čáry bylo svrchu vyloženo. Užívajíce případně *asymptot* čáry Δ' můžeme však sestrojiti kružnici K' snadněji. Na asymptotě $2'_\infty 2'_\infty$ stanoví svazek $(\Gamma'\Delta'\ldots)$ involuční řadu, v níž jeden samodružný bod jest úběžný (t. $2'_\infty$); poněvadž oběma samodružnými body rozděleny jsou všeliké družiny harmonicky, musí druhý samodružný bod l *rozpolovati všecky družiny*. Seče-li ellipsa Γ přímku $2'_\infty 2'_\infty$ v bodech II, II', rozpoluje bod l úsečku $II\,II'$ a stanoví se proto (nezávisle na tom, jsou-li průsečíky II, II' realné neb idealné) průměrem ellipsy Γ', sdruženým s přímkou $2'_\infty 2'_\infty$.

Jak z obrazce vysvítá, je F tímto průměrem, poněvadž $2'_\infty 2'_\infty \parallel E$. Jsou-li k, k' průsečíky kružnice K' s přímkou $2'_\infty 2'_\infty$, rozpolují se také bodem l; pročež musí střed kružnice K' býti na kolmici lr vztyčené v bodu l ku přímce $2'_\infty 2'_\infty$. Užijeme-li týmž způsobem druhé asymptoty $4'_\infty 4'_\infty$, obdržíme druhou přímku nr, na níž střed kružnice K' obsažen býti musí, a střed žádaný je stanoven. Kružnice K', jdouc bodem $1'$ (jenž odpovídá bodu s) může se rejsovati i seče čáru Γ' dále v bodech $\mathfrak{e}'_+$, $\mathfrak{f}'_+$, $\mathfrak{g}'_+$. V obr. 13. jest toliko jeden z nich, bod $\mathfrak{e}'_+$, realný; ostatní dva jsou idealné. Z bodu $\mathfrak{e}'_+$ odvodí se bod $\mathfrak{e}^+$ po zákonech affinity; paprsek $s\mathfrak{e}^+$ seče pak přímku X v bodu e^+, a *realný kořen dané rovnice vyjádřen jest úsečkou*

$$x = \overline{oe^+}.$$

Chceme-li také oba idealné kořeny vyjádřiti úsečkami, stanovme druhou společnou sečnu čar Γ, Δ (sečnu o idealných průsečících). K tomu lze užiti známé věty vyslovující, že každá čára $\mathit{\Lambda}$ druhého stupně, jež prochází dvěma základními body (Basispunkte) 1, $\mathfrak{e}^{+}$ svazku ($\Gamma\Delta\ldots$) čar druhého stupně, seče svazek ten v řadě involuční, a že tedy paprsky spojující sdružené body této řady protínají se v bodě jediném (středu involuce), kterýž musí býti na přímce ostatních dvou bodů základních $\mathfrak{f}^{+}$, $\mathfrak{g}^{+}$. Každou pomocnou čarou $\mathit{\Lambda}$ můžeme si tedy zjednati jeden bod přímky $\mathfrak{f}^{+}\,\mathfrak{g}^{+}$, i rozumí se samo sebou, že neužijeme k tomu obecných čar druhého stupně, nýbrž zvláštních odrůd, jež skládají se z dvou přímek.

Zvolme nejprv přímky $\mathfrak{e}^{+}2_{\infty}$, 13 za pomocnou čáru $\mathit{\Lambda}$, jež seče pak ještě ellipsu Γ v bodech m, $\mathfrak{o}'$, čáru Δ pak v bodech 2_{∞}, 3; přímky $m\mathfrak{o}'$, $2_{\infty}3$ stanoví jeden bod p přímky $\mathfrak{f}^{+}\,\mathfrak{g}^{+}$. Na sestrojení dalšího bodu zvolme přímky $\mathfrak{e}^{+}2_{\infty}$, 14_{∞} za pomocnou čáru $\mathit{\Lambda}$, jež seče pak ještě ellipsu Γ v bodech m, $\mathfrak{i}'$ a hyperbolu Δ v bodech 2_{∞}, 4_{∞}; přímky $m\mathfrak{i}'$, $2_{\infty}\,4_{\infty}$ (tato sjednocuje se s úběžnou přímkou U_{∞} roviny) stanoví druhý bod přímky $\mathfrak{f}^{+}\mathfrak{g}^{+}$. Poněvadž tímto druhým bodem jest úběžný bod paprsku $m\mathfrak{i}'$, jde přímka $\mathfrak{f}^{+}\mathfrak{g}^{+}$ (jež v obr. 13. má písmeno Q) bodem p rovnoběžně s přímkou $m\mathfrak{i}'$.

Přímkou Q a ellipsou Γ dána jest určitá involuční řada $\ddot{Q}$ harmonických pólů; idealné průsečíky $\mathfrak{f}^{+}$, $\mathfrak{g}^{+}$ přímky Q s ellipsou Γ jsou samodružnými body této řady. Promítneme-li řadu $\ddot{Q}$ z bodu s na osu X, obdržíme involuční řadu $\ddot{X}$, jejíž samodružné body jsou zbývajícími ještě idealnými body samodružnými f^{+}, g^{+} složeného útvaru ($\ddot{P}_{1\cdot2}$ $\dot{P}'$). Idealná dvojina $\mathfrak{f}^{+}$, $\mathfrak{g}^{+}$ stanoví se nejvýhodněji dvěma družinami řady $\ddot{Q}$; průměty těchto družin z bodu s na přímku X stanoví pak týmž spůsobem žádané idealné body f^{+}, g^{+}. Chceme-li odvoditi jakoukoli družinu řady $\ddot{Q}$, zvolme některý její bod, na př. p, a vztahujíce jej k ellipse Γ sestrojme poláru jeho P. Bod p a průsečík p' poláry P s přímkou Q tvoří družinu v řadě $\ddot{Q}$; promítneme-li pak tyto body ze středu s na osu X, obdržíme družinu $p_0 . p_0'$ řady $\ddot{X}$. Další družinu řady $\ddot{Q}$ stanovme tak, abychom obdrželi střed řady $\ddot{X}$. Vedeme-li bodem s paprsek su_{∞} k úběžnému bodu přímky X, seče tento paprsek přímku Q v bodu, jehož polára prochází pólem q přímky Q a pólem s (bodem dotyčným) onoho paprsku; přímka sq jest proto polárou žádanou i stanoví v řadě $\ddot{Q}$ bod sdružený s průsečíkem přímek Q, su_{∞}; jsouc pak spolu ve svazku $\bar{s}$ promítajícím paprskem tohoto bodu, stanoví na přímce X střed q_0 involuční řady $\ddot{X}$. Dle známých vlastností přímé řady involuční jest pak

$$\overline{q_0 f^{+}}^2 = \overline{q_0 g^{+}}^2 = \overline{q_0 p_0} \cdot \overline{q_0 p_0'}.$$

Kdyby úsečky $q_0 p_0$, $q_0 p_0'$ měly směr souhlasný, byly by body f^{+}, g^{+} realné a odvodily by se konstrukcí střední úměrné oněch úseček. V našem případě jest tomu jinak; obrátíme-li však směr jedné úsečky, berouce na př. místo $q_0 p_0'$ zatím úsečku $p_0' q_0$, můžeme sestrojiti střední úměrnou

$$q_0 q' = \sqrt{\overline{p_0' q_0} \cdot \overline{q_0 p_0}};$$

oba ostatní kořeny dané rovnice (1) jsou pak tyto:

$$x_2 = \overline{o q_0} + \overline{q_0 q'}\sqrt{-1},$$
$$x_3 = \overline{o q_0} - \overline{q_0 q'}\sqrt{-1}.$$

Nejsou-li součinitelé předložené rovnice (1) dány úsečkami, nýbrž čísly, nemění se tím konstrukce nikterak.

Obr. 13. pak ukazuje řešení rovnice

$$x^3 + 3{\cdot}75\, x^2 - 2{\cdot}5\, x + 6{\cdot}25 = 0,$$

kdež tedy

$$a = 3{\cdot}75,\ bc = -2{\cdot}5,\ def = 6{\cdot}25.$$

Připomenutí. Základem grafického řešení rovnic třetího (a jak seznáme i čtvrtého) stupně jest dle předešlého výkladu tabulka, obsahující *ellipsu* Γ a pro případ rovnic číselných i *měřidlo* (nejlépe ovšem transversalné.)

Obé budiž co nejpřesněji sestrojeno a vytaženo tuší; výkony, jichž vyžaduje řešení každé dané rovnice, zobrazují se pouze tužkou, aby po sestrojení kořenů opět vymazati se mohly. Vyloučíme-li vše, co k výkladu sloužilo, podržíce jen výkonů nezbytných, shledáme, že grafické řešení rovnic třetího stupně dobře může konkurovati s řešením počtářským, pokud nežádá se přesnosti věčší než $\frac{1}{1000}$ *).

(Pokračování.)

---

*) V originalu tabulky obr. 13. souhlasily výsledky rejsování a počítání i v *setinách* zvolené jedničky, vůbec tak dalece, pokud na připojeném prostém měřidle vyšetřeny býti mohly.