Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [X.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 178–188

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123213`

kde

$$(61)\quad \begin{cases} \overset{(1)}{K} = K + L\omega + M\omega^2 + \omega^3 \\ \overset{(1)}{L} = L - 2M\omega + 3\omega^2 \\ \overset{(1)}{M} = M + 3\omega \end{cases}$$

jsou invarianty svazku bilineárních forem

$$\overset{(1)}{A} - \lambda E$$

vzhledem k transformacím, jež nemění formy E.

Ze vzorce (57) tedy vypíšeme transormovaný systém singulárních relací

$$(62)\quad \begin{cases} \cdot + \cdot - e_1\,\tau_{33} - e_2\,\tau_{12} - \dfrac{L^{(1)}}{e_1}\tau_{22} + \overset{(1)}{M}\,\tau_{23} = 0 \\ e_2\,\tau_{11} - \overset{(1)}{M}\,\tau_{13} + \cdot + \dfrac{L^{(1)}}{e_1}\tau_{12} + \cdot - \dfrac{K^{(1)}}{e_1 e_2}\tau_{23} = 0 \\ \cdot + e_1\,\tau_{13} + \cdot + \cdot\ \dfrac{K^{(1)}}{e_1 e_2}\tau_{22} + \cdot = 0 \end{cases}$$

kde $\tau_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ značí nové transformované periody.*)

Máme tedy poučku:

Nedegenerují-li všechny Abelovy funkce, jichž periody splňují singulární relace (54), v Abelovy funkce méně než tří proměnných, lze najíti takovou obyčejnou (nesingulární) lineární transformaci period, že transformovaný systém singulárních relací má tvar (59).

Podotýkám zvláště, že v systému (59) schází nejen členy kvadratické, ale též členy bez proměnných.

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Piše *M. Lerch.*

(Dokončení.)

Isolujme v (II) člen $n = o$ a u ostatních užijme rozkladu

$$\varphi(c+n) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \ldots + \frac{1}{c+n-1} + \varphi(c),$$

kde $c = a + b$; vyjde

$$[\varphi(a+x) - \varphi(c)]\ [\varphi(c-a-x) - \varphi(c)]$$
$$- [\varphi(a) - \varphi(c)]\ [\varphi(c-a) - \varphi(c)]$$

*) Srv. O systémech singulárních relací . . ., Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 48., str. 43-56.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \dots + \frac{1}{c+n-1}\right) \times$$

$$\left(\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+c-a} - \frac{1}{n+a-x} - \frac{1}{n+c-a-x}\right),$$

což se poněkud zjednoduší substitucí x za $a + x$:

$$\text{(III)} \begin{cases} [\varphi(x) - \varphi(c)]\,[\varphi(c-x) - \varphi(c)] - [\varphi(a) - \varphi(c)]\,[\varphi(c - a) - \varphi(c)] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \dots + \frac{1}{c+n-1}\right) \times \\ \qquad \left(\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+c-a} - \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+c-x}\right). \end{cases}$$

Pro $a \sim o$ je

$$\varphi(a)\,[\varphi(c) - \varphi(c-a)] \sim -\varphi'(c),$$

tedy vychází

$$[\varphi(x) - \varphi(c)]\,[\varphi(c-x) - \varphi(c)] - \varphi'(c)$$

$$\text{(29)} \qquad = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \dots + \frac{1}{c+n-1}\right) \times$$

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+c} - \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+c-x}\right).$$

Vraťme se k (II), derivujíce obě strany dle a i b:

$$\text{(30)} \begin{cases} \varphi'(a-x)\,\varphi'(b-x) - \varphi'(a)\,\varphi'(b) = \\ = -\sum_{0}^{\infty} \varphi'(a+b+n) \left[\frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(b+n)^2} - \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{(x+a+n)^2} - \frac{1}{(b-x+n)^2}\right] \\ + \sum_{0}^{\infty} \varphi''(a+b+n) \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{b+n} \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{x+a+n} - \frac{1}{b-x+n}\right); \end{cases}$$

znamenáme-li

$$\zeta_n(s) = \frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \frac{1}{(n+3)^s} + \dots,$$

takže $\zeta(s) = \zeta_0(s)$, máme

$$\varphi'(n+1) = \varphi'(1) - \sum_{1}^{n} \frac{1}{\nu^2} = \zeta_n(2),$$

$$\varphi''(n+1)=\varphi''(1)+2\sum_1^n\frac{1}{\nu^3}=-2\zeta_n(3),$$

a tak nám volba $a=b=1$ v poslední rovnici podá

$$\varphi'(1+x)\,\varphi'(1-x)=\frac{\pi^4}{36}+\sum_1^\infty\zeta_n(2)\left[\frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}-\frac{2}{n^2}\right].$$

(31)
$$+2\sum_1^\infty\zeta_n(3)\left(\frac{1}{n-x}+\frac{1}{n+x}-\frac{2}{n}\right);$$

volba $a=b=1$ v (II) dává podobně

(32)
$$\varphi(1+x)\,\varphi(1-x)=\sum_1^\infty\varphi(n+1)\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-x}\right);$$

poněvadž

$$\frac{1}{n-x}+\frac{1}{n+x}-\frac{2}{n}=\sum_{\nu=1}^\infty\frac{2x^{2\nu}}{n^{2\nu+1}},$$

vychází tak

(33) $$\varphi(1+x)\,\varphi(1-x)=-2\sum_1^\infty A_{2\nu}\,x^{2\nu},\ A_{2\nu}=\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi(n+1)}{n^{2\nu+1}}.$$

To uveďme v souvislost s identitou

$$\varphi(1+x)=\sum_{\nu=1}^\infty(-1)^{\nu+1}\,\zeta(\nu+1)\,x^\nu,$$

jež dává

$$-\varphi(1+x)\,\varphi(1-x)=\sum(-1)^{\nu+1}\zeta(\nu+1)\,\zeta(\mu+1)\,x^{\mu+\nu}.$$

a odtud u srovnání s (33) plyne

(34)
$$2A_{2k}=\sum_{\nu=1}^{2k-1}(-1)^{\nu+1}\,\zeta(\nu+1)\,\zeta(2k-\nu+1);$$

$$2A_2=\zeta(2)^2,\quad 2A_4=2\zeta(2)\,\zeta(4)-\zeta(3)^2,$$

$$2A_6=\zeta(2)\,\zeta(6)-2\zeta(3)\,\zeta(5)+\zeta(4)^2,\ldots$$

Pravou stranu (31) lze psáti

(35) $$2\sum_1^\infty\mathfrak{A}_{2\nu}\,x^{2\nu}+\frac{\pi^4}{36},\ \mathfrak{A}_{2\nu}=(2\nu+1)\sum_1^\infty\frac{\zeta_n(2)}{n^{2\nu+2}}+2\sum_1^\infty\frac{\zeta_n(3)}{n^{2\nu+1}}$$

a obdržíme po násobení řad $\varphi'(1+x)$ a $\varphi'(1-x)$:

(36)
$$2\mathfrak{A}_{2k}=\sum_{\nu=0}^k(-1)^\nu(\nu+1)\,(2k-\nu+1)\,\zeta(\nu+2)\,\zeta(2k-\nu+2)$$

$$2\mathfrak{A}_2=2.3\,\zeta(2)\,\zeta(4)-4\,\zeta(3)^2;$$

číslo $$\frac{4A_4-\mathfrak{A}_2}{\pi^6}=\frac{\zeta(2)\,\zeta(4)}{\pi^6}$$ je tedy racionálné.

Rovnici (14) pišme pro $a = 1$, kladouce $x + 1$ za x:

(14^a) $\varphi(1+x)^2 = \varphi'(1+x) - \varphi'(1) + 2 \sum\limits_1^\infty \varphi(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$;

pravá strana má rozvoj

$$\sum_1^\infty (-1)^k (k+1)\, \zeta(k+2)\, x^k - 2 \sum_1^\infty (-1)^k x^k \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^{k+1}},$$

a tak vychází po přímém vyjádření levé strany a stanovení součinitele při x^k:

(37)
$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \zeta(\nu+1)\, \zeta(k-\nu+1) = (k+1)\, \zeta(k+2) - 2 \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^{k+1}},$$

kdežto srovnání součinitelů při x dává

(37^0)
$$\zeta(3) = \sum_1^\infty \frac{\varphi(n)}{n^2} \quad \text{čili} \quad \sum_1^\infty \frac{\varphi(n+1)}{n^2} = 2\,\zeta(3),$$

čímž ukázána platnost (37) i pro $k = 1$.

Rovnice (37) pro $2k$:

$$\sum_{\nu=1}^{2k-2} \zeta(\nu+1)\, \zeta(2k-\nu+1) = (2k+3)\, \zeta(2k+2) - 2 A_{2k}$$

dává ve spojení s (34):

$$\sum_{\mu=1}^{k} \zeta(2\mu)\, \zeta(2k+2-2\mu) = \frac{1}{2}(2k+3)\, \zeta(2k+2),$$

tedy bilineární vztah mezi čísly Bernoulliovými

(38)
$$\sum_1^{n-1} \binom{2n}{2\mu} B_\mu B_{n-\mu} = (2n+1)\, B_n,$$

kde jsme psali $k + 1 = n$.

Dále poskytnou tytéž rovnice

(34*)
$$\sum_1^{k-1} \zeta(2\nu+1)\, \zeta(2k-2\nu+1) = -2 A_{2k} + \frac{1}{2}(2k+3)\, \zeta(2k+2).$$

Jinak určuje (37) čísla

$$A_k = \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi(n+1)}{n^{k+1}} = \frac{1}{2}(k+3)\, \zeta(k+2) - $$
$$- \frac{1}{2} \sum_1^{k-1} \zeta(\nu+1)\, \zeta(k-\nu+1)$$

též pro lichá k, a sice jeví se v tom případě

$\frac{A_k}{\pi^{k+2}}$ jako lineární výraz prvků $\frac{\zeta(3)}{\pi^3}, \frac{\zeta(5)}{\pi^5}, \ldots \frac{\zeta(k+2)}{\pi^{k+2}}$, s racionálními součiniteli.

Dle toho obdržíme též

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^3}, \frac{\zeta(5)}{\pi^5}, \frac{\zeta(7)}{\pi^7}, \ldots$$

jako racionálně lineární výrazy veličin $\frac{A_1}{\pi^3}, \frac{A_3}{\pi^5}, \frac{A_5}{\pi^7}, \ldots$

15.

Nekonečná řada

(39) $$S^*_k(x) = -k! \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2m x \pi i}}{(2m\pi i)^{k+1}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

kryje se v intervallu $(0 \ldots 1)$ s hodnotou upraveného Bernoulliova polynomu, t. j. celistvé rac. funkce, která hoví podmínkám

$$S^*_k(x+1) = S^*_k(x) + x^k, \int_0^1 S^*_k(x)\, dx = 0,$$

jejíž přímé vyjádření zní

$$S^*_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^k}{2} + \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^{\nu-1} \binom{k}{2\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} x^{k+1-2\nu}.$$

Okolnosti tyto jsou bez významu pro úvahy, jež následují, důležito jest ještě rozlišení hodnot k lichých a sudých, jež spočívá ve vzorcích $(0 \leq x \leq 1)$

(39*) $$\begin{cases} S^*_{2\mu}(x) = (-1)^{\mu-1} (2\mu)!\, 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2m x\pi}{(2m\pi)^{2\mu+1}}, \\ S^*_{2\mu-1}(x) = (-1)^{\mu-1} (2\mu-1)!\, 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m x\pi}{(2m\pi)^{2\mu}}. \end{cases}$$

To předeslavše obraťme se k řadě Fourierově, kterou pišme ve tvaru pomyslném

(40) $$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2m x\pi i}, \quad 0 < x < 1,$$

při čemž

$$A_m = \int_0^1 f(z)\, e^{-2m z\pi i}\, dz.$$

Tento integrál A_m (pro $m \gtrless 0$) přetvořme dle vzorce pro částečnou integraci

$$\int u\, v^{(n)}\, dz = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu u^{(\nu)} v^{(n-\nu-1)} + (-1)^n \int u^{(n)} v\, dz,$$

v němž klaďme $v = f(z)$, $u^{(n)} = e^{2mz\pi i}$, tedy

$$u = \frac{e^{2mz\pi i}}{(-2m\pi i)^n}, \quad (-1)^\nu u^{(n-\nu-1)} = -\frac{e^{2mz\pi i}}{(2m\pi i)^{\nu+1}}.$$

Tak obdržíme

$$A_m = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0) - f^{(\nu)}(1)}{(2m\pi i)^{\nu+1}} + \frac{1}{(2mi\pi)^n} \int_0^1 e^{2mz\pi i} f^{(n)}(z)\, dz.$$

Tím způsobem se řada Fourierova převede na tvar

$$(40^1) \qquad f(x) = \int_0^1 f(z)\, dz + \sum_{\nu=0}^{n-1} [f^{(\nu)}(0) - f^{(\nu)}(1)] \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2mx\pi i}}{(2m\pi i)^{\nu+1}} + R_n(x),$$

kde $R_n(x)$ je nová řada Fourierova

$$(40^2) \qquad R_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2mx\pi i}}{(2m\pi i)^n} \int_0^1 e^{-2mz\pi i} f^{(n)}(z)\, dz$$

aneb

$$(40^3) \qquad R_n(x) = \int_0^1 f^{(n)}(z)\, dz \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2m\pi i(x-z)}}{(2m\pi i)^n};$$

podmínky jsou pouze existence a spojitost všech vyskytších se derivací v mezeře $(0 \ldots 1)$, a transformací se převedla řada Fourierova v novou, která obecně rychleji konverguje, totiž $R_n(x)$, a v konečný agregát polynomů typu $S_k^*(x)$. Přípona (0) u znamení součtu $\Sigma^{(0)}$ značí vynechání rušivého členu $m = 0$.

Tento výsledek má svou zajímavost se stanoviska theorie funkcí. Předně ukazuje, že hoví-li funkce $f(x)$ (vedle spojitosti n-te derivace) ještě podmínkám $f^{(\nu)}(1) = f^{(\nu)}(0)$, t. j. má-li ona a její derivace až po $(n$-$1)^{\text{tou}}$ na začátku a konci intervalu $(0 \ldots 1)$ hodnoty stejné, vypadne zakončená čásť a řada přejde na

$$f(x) = A_0 + R_n(x),$$

t. j. $R_n(x)$ jest až na stálý člen identické s řadou Fourierovou; pro takové funkce řada Fourierova konverguje tedy stejně rychle jako harmonická řada $\zeta(n)$.

Uvedené podmínky jsou splněny u funkce periodické

$$f(x+1) = f(x),$$

která je se všemi derivacemi na oboru $(0 \ldots 1)$ konečná. Tu ukazuje naše úvaha, že řada Fourierova pro takou funkci konverguje rychleji, než každá řada harmonická. Nás zde zajímá právě případ opačný, kdy zakončená část z rovnice nevypadne; tu především máme pro člen $\nu = 0$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2mx\pi i}}{2m\pi i} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2mx\pi}{m\pi} = \frac{1}{2} - x, \ (0 < x < 1),$$

a tak vychází rovnice — užije-li se rovnice (39) —

$$(40^*) \qquad f(x) = \int_0^1 f(z)\, dz + [f(1) - f(0)] \left(x - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(1) - f^{(\nu)}(0)}{\nu!} S^*_\nu(x) + R_n(x)$$

a ta vzhledem ke spojitosti pravé strany platí v celém intervallu $(0 \dots 1)$.

Pravá strana (40^3) se vyjádří pomocí polynomů Bernoulliových, štěpíme-li interval na $(0 \dots x)$ a $(x \dots 1)$; v prvním je $x - z \geqq 0$ a řada má hodnotu

$$-\frac{1}{(n-1)!} S^*_{n-1}(x-z),$$

v druhém dlužno v exponentu psáti $1 + x - z$, poněvadž tato veličina je mezi 0 a 1, a řada má hodnotu

$$-\frac{1}{(n-1)!} S^*_{n-1}(1 + x - z),$$

t. j. máme

$$-(n-1)!\, R_n(x) = \int_0^x f^{(n)}(z)\, S^*_{n-1}(x - z)\, dz +$$

$$+ \int_x^1 f^{(n)}(z)\, S^*_{n-1}(1 + x - z)\, dz.$$

Výsledek ten pro nás však nemá té důležitosti jako bezprostřední vyjádření (40^2). V malých obměnách uvažovali řadu (40*) Ernst Schröder,[1]) N. Sonin a C. Hermite.[2])

[1]) Eine Verallgem. der Maclaurinschen Summenformul nebst Beiträgen zur Kenntniss der Bernoullischen Function. Progr. d. Kantonsschule Zürich, 1867.

[2]) Journal f. d. reine u. angew. Math. 116 (1895): Sur les polynomes de Bernoulli. (Dopisy N. Sonina a C. Hermitea.)

Zde hodláme jej uvažovati pro případ

$$f(x) = \varphi'(u + x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(u + x + \mu)^2};$$

patrně $f(x+1) - f(x) = -\dfrac{1}{(u+x)^2}$, tedy

dále $$\frac{f^{(\nu)}(1) - f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = (-1)^{\nu+1} \frac{\nu+1}{u^{\nu+2}},$$

$$\int_0^1 f(z)\, dz = \frac{1}{u},$$

a tak vychází

(41)
$$\varphi'(u+x) = \frac{1}{u} + \frac{\frac{1}{2} - x}{u^2} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \frac{\nu+1}{u^{\nu+2}} S^*_\nu(x) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}^{(0)} \frac{e^{2mx\pi i}}{(2m\pi i)^n} \int_0^1 e^{-2mz\pi i} \varphi^{(n+1)}(u+z)\, dz.$$

Identity (41) užijeme k stanovení číselné hodnoty naší transcendenty

(42) $$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{\log|\sin x\pi|\, dx}{(u+x)^2} = \int_0^1 \varphi'(u+x) \log \sin x\pi\, dx;$$

násobíme totiž v (41) obě strany $\log \sin x\pi\, dx$ a integrujeme od 0 do 1. Vzhledem k okolnosti, že

$$\log \sin x\pi = -\log 2 - \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2m\, x\pi}{m},$$

je jasno, že

$$\int_0^1 S^*_{2\mu} \log \sin x\pi\, dx = 0, \quad \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - x) \log \sin x\pi\, dx = 0,$$

mimo to

$$\int_0^1 \log \sin x\pi\, dx = -\log 2,$$

a dále

$$\int_0^1 S^*_{2\mu+1}(x) \log \sin x\pi\, dx = (-1)^\mu \frac{(2\mu-1)!}{(2\pi)^{2\mu}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\mu+1}},$$

t. j.

$$\int_0^1 S^*_{2\mu+1}(x) \log \sin x\pi\, dx = (-1)^\mu \frac{(2\mu-1)!}{(2\pi)^{2\mu}} \zeta(2\mu+1),$$

Použitím těchto podrobností docílime z (41) uvedeným způsobem

(43) $$\Phi(u) = -\frac{\log 2}{u} + \sum_{\mu=1}^{p} (-1)^{\mu} \frac{(2\mu)!}{(2\pi)^{2\mu}} \frac{\zeta(2\mu+1)}{u^{2\mu+1}} + R_p,$$

při čemž $R = \int R_{2p} \log \sin x\pi \, dx$ aneb $= \int R_{2p+1}(x) \log \sin x\pi \, dx$,

neboť jsme mohli klásti buď $n = 2p$ aneb $n = 2p + 1$, aniž se změní zakončená část pravé strany. Poněvadž

$$\int_0^1 e^{2mx\pi i} \log \sin x\pi \, dx = -\frac{1}{2|m|},$$

tedy máme pro zbytek

$$R'_n = \int_0^1 R_n(x) \log \sin x\pi \, dx$$

$$= -\sum_{m=-\infty}^{\infty\,(0)} \frac{1}{2|m|\,(2m\pi i)^n} \int_0^1 e^{2mz\pi i} \varphi^{(n+1)}(u+z)\, dz.$$

Našim potřebám vyhoví důsledek (u realné a kladné)

$$|R'_n| < 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{2m\,(2m\pi)^n} \int_0^1 |\varphi^{(n+1)}(u+x)|\, dx;$$

$$|\varphi^{(n+1)}(u+x)| = (-1)^n \varphi^{(n+1)}(u),$$

$$\int_0^1 |\varphi^{(n+1)}(u+x)|\, dx = (-1)^n [\varphi^{(n)}(u+1) - \varphi^{(n)}(u)] = \frac{n!}{u^{n+1}},$$

tedy

(43⁰) $$|R'_n| < \frac{n!}{(2\pi)^n} \frac{\zeta(n+1)}{u^{n+1}}; \quad R_p = R'_{2p} = R'_{2p+1},$$

čili

(43¹) $$|R_p| < \frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \frac{\zeta(2p+1)}{u^{2p+1}}, \quad |R_p| < \frac{(2p+1)!}{(2\pi)^{2p+1}} \frac{\zeta(2p+2)}{u^{2p+2}}.$$

Poslední člen v řadě (43)

$$T_p = \frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \frac{\zeta(2p+1)}{u^{2p+1}},$$

tedy u porovnání s druhým tvarem zbytku

$$\frac{R_p}{T_p} < \frac{2p+1}{2u\pi} \frac{\zeta(2p+2)}{\zeta(2p+1)} < \frac{2p+1}{2u\pi},$$

t. j.

(43²) $$|R_p| < T_p \cdot \frac{2p+1}{2u\pi}.$$

První nerovnost (43') se píše
$$R_p < T_p\,.$$
Poněvadž zřejmě
$$\sum_m \frac{1}{2\,|\,m\,|\,(2m\pi i)^n}\, e^{2mz\pi i} = k_n(z)$$
je funkce realná:
$$k_{2p} = (-1)^p \frac{1}{(2\pi)^{2p}} \sum_1^\infty \frac{\cos 2mz\pi}{m^{2p+1}}\,,$$
$$k_{2p+1} = (-1)^{p+1} \frac{1}{(2\pi)^{2p+1}} \sum_1^\infty \frac{\sin 2mz\pi}{m^{2p+2}}\,,$$
poskytne nám hořejší vzorec
$$-R'_n = \int_0^1 k_n(z)\, \varphi^{(n+1)}(u+z)\, dz$$
podle věty o střední hodnotě $(0 < \vartheta < 1)$
$$-R'_n = k_n(\vartheta) \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(u+z)\, dz = k_n(\vartheta)\,[\varphi^{(n)}(u+1) - \varphi^{(n)}(u)]$$
t. j.
$$-R'_n = (-1)^n \frac{n!}{u^{n+1}}\, k_n(\vartheta);$$
neboť funkce $\varphi^{(n+1)}(u+z)$ nemění znamení v mezích integrace. Volme $n = 2p$, takže vychází
$$-R_p = \frac{(2p)!}{u^{2p+1}}\, k_{2p}(\vartheta) = (-1)^p \frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}\, u^{2p+1}} \sum_{m=1}^\infty \frac{\cos 2m\vartheta\pi}{m^{2p+1}}\,;$$
zde v obecném členu řady užijme rozkladu
$$\cos 2m\vartheta\pi = 1 - 2\sin^2 m\vartheta\pi,$$
čímž vyjde
$$-R_p = (-1)^p \frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}\, u^{2p+1}} \left[\zeta(2p+1) - 2\sum_1^\infty \frac{\sin^2 m\vartheta\pi}{m^{2p+1}}\right],$$
$$-R_p = (-1)^p\, T_p + (-1)^{p+1}\, 2\Theta T_p;\quad 0 < \Theta < 1.$$

Dosazením toho do (43) vypadne poslední člen T_p a zbude

$$\text{(43*)}\quad \Phi(u) = -\frac{\log 2}{u} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \frac{\zeta(2\nu+1)}{u^{2\nu+1}} + (-1)^p \frac{\Theta\,(2p)!\,\zeta(2p+1)}{(2\pi)^{2p}\, u^{2p+1}}$$

t. j. chyba v tomto poloukonvergentním rozvoji je částkou prvního vynechaného členu; výpočet ukazuje sice, že je částí dvojnásobného toho členu; avšak připojením jeho obrátí se znamení chyby, čímž věc doplněna.

Čísla $\zeta(n)$ počítali Euler, Legendre a Stieltjes; poslední na 32 míst (Acta math. sv. 10); uvádím 20místné hodnoty podle Nielsen, Dilogarithmus:

$$\zeta(3) = 1{\cdot}20205 \quad 69031 \quad 59594 \quad 28540$$
$$\zeta(5) = 1{\cdot}03692 \quad 77551 \quad 43369 \quad 92633$$
$$\zeta(7) = 1{\cdot}00834 \quad 92773 \quad 81922 \quad 82684$$
$$\zeta(9) = 1{\cdot}00200 \quad 83928 \quad 26082 \quad 21441$$

Znamenáme-li
$$c_\nu = \frac{(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}}\,\zeta(2\nu+1),$$
zní náš poloukonvergentní rozvoj
$$\Phi(u) = \frac{-\log 2}{u} - \frac{c_1}{u^3} + \frac{c_2}{u^5} - \frac{c_3}{u^7} - \dots$$

ν	$\log c_\nu + 10$	c_ν	$\log 2 = 0{\cdot}69314718056$
1	8·7836554	0·06076526	
2	8·2033603	0·01597203	
3	8·0720444	0·01180441	
4	8·2211931	0·01664152	

Pro $u = 5$ je $\frac{c_4}{u^9} \doteq 0{\cdot}0^8 8$, takže tři členy dají osm míst. Podle ($28^{1,2}$) máme tedy pro celistvá lichá u poloukonvergentně
$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \cos u x \pi\, dx = \frac{1}{2u} + \frac{2}{u^2\pi^2}\left(E - \frac{4c_1}{u^2} + \frac{4^2 c_2}{u^4} - \frac{4^3 c_3}{u^6} - \dots\right)$$
kde dlužno voliti $u \geqq 11$, aby sblížení bylo značné.

*

Opravy. Roč. 48., str. 318., ř. 8. čti $\frac{C_{12}}{12!} = -0{\cdot}010.$

Roč. 50, str. 268., ř. 3. z dola: za $\binom{-2\nu}{k}$ čti $\binom{-2\nu}{k}$

„ 269., posl. řád. čti $\frac{1}{1+u} = q.$

„ 277., ř. 2.: první dva členy v pravo $\varphi(a) - \varphi(s)$

Roč. 51., str. 81. (23*) spodní mez integrační je c