František Rádl

O rovnicích differenciálných lineárných obyčejných druhého řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 3, 189--197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123208

O rovnicích differenciálných lineárných obyčejných druhého řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou.

Napsal Dr. *Frant. Rádl.*

1. Známa jest důležitost transformace při stanovení obyčejné kvadratury. Rovněž při řešení rovnic differenciálných jak obyčejných tak s derivacemi parciálními osvědčila se transformace zvaná infinitesimální, pak transformace jmenovaná kontaktní. Při rovnicích lineárných vyšetřováním singulárných bodů koefficientů umožnilo vyjádřit jistá řešení konvergentními řadami. Jest však též možná užiti transformace pro tyto rovnice charakteristické, jak ukázal *Laplace* u rovnice 2ho ř. s der. parc. — rovnice Laplaceově —

$$f(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0. \tag{1}$$

V následujícím po vyložení transformace Laplaceovy ukázáno, že lze ji užiti též u rovnic differenciálných obyčejných a sice specielně řádu 2ho.

2. Budiž nejprve vysvětlena podstata *methody Laplaceovy.* Jestliže ze systému

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = 0,\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az. \tag{2}$$

vyloučíme z_1, obdržíme rovnici tvaru (1), v níž však koefficient c je závislý na koefficientech a, b. Rovnici tuto lze patrně podle (2) snadno řešiti.*) Nevyhovuje-li však c této závislosti, užil Laplace pro rovnici (1) tvaru

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 + hz = 0,\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \tag{3}$$

odkudž vyloučením z_1 a srovnáním s (1) obdržíme pro h relaci

$$h = c - ab - \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Možná však též ze systému (3) vyloučiti z, načež obdržíme

$$f_1(z_1) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0$$

téhož tvaru jako (1), avšak s jinými koefficienty. Platí-li o této rovnici

$$c_1 - c_1 b_1 - \frac{\partial a_1}{\partial x} = h_1 = 0,$$

možná ji psát ve tvaru (2), tudíž lze ji řešit, načež rovnice původní má řešení

$$z = -\frac{1}{h}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1\right).$$

Pak-li $h_1 \neq 0$, transformujme znovu atd., přijdeme-li po $i^{\text{té}}$ transformaci na rovnici, v níž jest $h_i = 0$, možná rovnici i^{tou}, tudíž

*) O rovnicích tohoto druhu viz článek autorův v Čas. p. p. m. a f. XLII.

všechny předcházející řešiti a daná rovnice jest methodou Laplaceovou integrovatelna.

Rovnici (1) možná též psát ve tvaru

$$\frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + a z_{-1} + kz = 0, \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz, \tag{4}$$

kde vyloučením z_{-1} obdržíme pro k relaci

$$k = c - ab - \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Je-li $k = 0$, lze rovnici (3) ihned integrovati, v případu $k \neq 0$ vylučme z, načež možná předešlé úsudky opakovati.

3. Transformací touto zabýval se pečlivě *Darboux**) a obdržel tyto výsledky:

Veličiny h, k nazval *invarianty*, poněvadž se nemění substitucí $z\ \lambda z$ a poněvadž u rovnice transformované podle systému (3) platí

$$k_1 = h, \quad h_1 = 2h - k + \frac{\partial^2 lh}{\partial x \partial y}, \tag{5}$$

pro transformaci dle (4) jest pak

$$h_{-1} = k, \quad k_{-1} = 2k - h + \frac{\partial^2 lk}{\partial x \partial y}. \tag{6}$$

Darboux řešil pak úlohu,**) nalézti všechny rovnice methodou Laplaceovou integrovatelné. Opakovanou transformací jednak dle (3), jednak dle (4) obdržel dvě řady rovnic

$$f, f_1, f_2 \ldots f_i \ldots; \qquad f, f_{-1}, f_{-2} \ldots f_{-j} \ldots$$

jež spojil v jednu řadu oboustrannou

$$\ldots f_{-j} \ldots f_{-1}, f, f_1 \ldots f_i \ldots \tag{7}$$

Jestliže u rovnice f_i předpokládáme $h_i = 0$, položme

$$\text{pro } z_i = \Theta e^{-\int a_i\, dy},$$

načež rovnici f_i možná dát tvar

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial lA}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0,$$

kde A jest jistá funkce x, y. Snadno stanovíme u této rovnice $h_{i-1} = k_i$ a pomocí relace (6) h_{i-2}, $h_{i-3}, \ldots$, všeobecně

$$k_{i-p} = h_{i-p-1} - \frac{\partial^2 l H_p}{\partial x \partial y}, \quad H_p = \begin{vmatrix} A & \frac{\partial A}{\partial k} & \ldots & \frac{\partial^p A}{\partial x^p} \\ \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} & \ldots & \frac{\partial^{p+1} A}{\partial x^p \partial y} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^p A}{\partial y^p} & \ldots & \ldots & \frac{\partial^{2p} A}{\partial x^p \partial y^p} \end{vmatrix}.$$

*) *Darboux*, Théorie des surfaces, tome II. p. 23. sq. (II. vyd.).

**) Ibid. p. 135. sq.

načež rovnici f_{i-p} lze dát tvar

$$f_{i-p} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial l H_{p-1}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial l H_p}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial l H_p}{\partial x} \frac{\partial l H_{p-1}}{\partial y} z = 0.$$

Je-li mimo to $k_{-j} = 0$, obdržíme pro funkci A dosud libovolnou jistou podmínku. Předpokládáme-li hned z počátku nejdříve, že $k_{-j} = 0$ a hledáme-li rovnice $f_{-j+1}, f_{-j+2}, \ldots$, obdržíme pro rovnici f_{-j+p} analogický tvar jako pro f_{i-p}, načež možná teprv připojiti podmínku $h_i = 0$.

4. Nadepsaný rozšířil methodu Laplaceovu na jisté rovnice lin. s der. parc. řádu n^{ho}, též však na všeobecné rovnice lin. obyčejné. Při vyšším řádu než druhém jest teorie komplikovaná a při přechodu na dvě neodvisle proměnné stává se vyšetřování přes jisté analogie daleko subtilnější. Omezíme-li se však na druhý řád rovnice obyčejné

$$f(y) = y'' + py' + qy = 0, \tag{8}$$

obdržíme výsledky formulím Darbouxovým nápadně podobné, což v následujícím ukázáno.

Rovnici (8) možná totiž psát ve tvaru

$$y'_1 + ay_1 + hy = 0, \quad y_1 = y' + (p - a)\, y \tag{9}$$

nebo též pomocí systému

$$Y' + (p-a)\, Y + ky = 0, \quad Y = y' + ay, \tag{10}$$

kde a je libovolná funkce; vyloučíme-li z obou systémů resp. y_1, Y, obdržíme rovnici (8) a o *invariantech h, k* platí

$$h = \frac{g(\alpha)}{\alpha}, \quad k = \frac{f(\beta)}{\beta}, \quad \left(\frac{\alpha'}{\alpha} = a, \; \beta = \frac{1}{\alpha}\right), \tag{11}$$

značí-li $g(z)$ rovnici k (8) *adjungovanou*

$$g(z) = z'' - pz' + (q - p')\, z = 0.$$

Vyloučením y ze systému (9) vznikne rovnice transformovaná $f_1(y_1)$ a snadno se přesvědčíme, že platí o této rovnici formule (5). Pokračujíce takto, obdržíme opět řadu transformační (7), v níž však na rozdíl od Darbouxa i sousední rovnice s indexem záporným na př. f_{-j}, f_{-j+1} nutně souvisí dle téhož zákona jako rovnice s indexem kladným na př. f_{i-1}, f_i, totiž dle (9); systém (10) nám slouží pouze k definici invariantu k, transformace jím definovaná nemá vlastností řady (7). Formule (5), (6) možná psát ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} h_{p-1} = k_p, \quad h_{p+1} - 2h_p + h_{p-1} &= \frac{d^2 l h_p}{dx^2}, \\ k_{p+1} - 2k_p + k_{p-1} &= \frac{d^2 l k_p}{dx^2}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

a na těchto relacích u rovnice Laplaceovy založena methoda Darbouxova v § 3.; platí-li tedy i o rovnici (8), lze tušiti též užití methody na jednu neodvisle proměnnou.

Stanovme ještě vliv substituce $y/\lambda y$ na invarianty h, k. Kdežto u rovnice (1) se touto substitucí invarianty h, k nemění, což je pro rovnici Laplaceovu podstatné, změní se po této substitucí $f(y)$ v rovnici $\frac{f(\lambda y)}{\lambda}$, jejíž adjungovaná jest

$$\frac{g(\mu z)}{\mu}, \mu = \frac{1}{\lambda},$$

takže zůstanou invarianty též nezměněny, nahradíme-li transformační funkci a funkcí $a + \frac{\lambda'}{x} = \frac{(\alpha\lambda')}{\lambda}$.

Jsou-li dány invarianty h, k, můžeme z rovnic (11) určiti koefficienty p, q, takže rovnice (8) pak zní

$$y'' + \left[\int (k-h)\,dx + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\right] y' + \left[\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha}\int (k-h)\,dx + k\right] y = 0, \tag{13}$$

je-li integrační konstanta $= 0$.

Kdybychom místo rovnice f transformovali rovnici $\frac{f(\lambda y)}{\lambda}$, snadno se přesvědčíme podle druhé relace v (9), že rovnice transformovaná jest $\frac{f_1(\lambda y_1)}{\lambda}$, zvolíme-li za transformační fukci opět $a + \frac{\lambda'}{\lambda}$. Zvolíme-li tudíž $\lambda = \beta$, dává rovnice $\frac{f(\beta y)}{\beta}$ transformací rovnici $\frac{f_1(\beta y_1)}{\beta}$, položíme-li transformační funkci $a = 0$. Na základě toho možná další vyšetřování omezit na případ $a = 0$, ačkoli případ $\alpha \neq 0$ úvahy podstatně nekomplikuje.

5. Hledejme nyní rovnice (8) integrovatelné transformací definovanou systémem (9). Předpokládejme především u rovnice (8) jako Darboux u rovnice (1) dle § 3., že $h_i = 0$, takže řadu transformační (7) nelze pokračovat za rovnici f_i, řada tato končí tedy na pravé straně touto rovnicí. Položíme-li v (9)

$$p = \frac{A'}{A}, \ (a = 0),$$

má rovnice f_i tvar

$$f_i = y'' + \frac{d\,lA}{dx} y' + \frac{d^2 lA}{dx^2} y = 0. \tag{14}$$

Abychom určili tvar rovnic $f_{i-1}, f_{i-2}, \ldots$, uvažme, že podle první rovnice (9) souvisí rovnice f, f_1 relací

$$y_1' + hy = 0, \tag{15}$$

takže provedeme-li v rovnici (8) vzhledem k první relaci (12) substituci

$$y + \int ky\,dx$$

a zbavíme-li se integračního znamení, obdržíme rovnici f_{-1}

$$f_{-1} = y'' + \left(p_1 + \frac{dlk}{dx}\right) y' + \left[k + \left(p_1 + \frac{dlk}{dx}\right)'\right] y = 0. \quad (16)$$

Užívajíce tohoto tvaru odvodíme z rovnice (14) snadno rovnice $f_{i-1}, f_{i-2}, \ldots$ čili všeobecně

$$f_{i-p} = y'' + \left(\frac{dl}{dx} A\, k_i\, k_{i-1} \ldots k_{i-p+1}\right) y' +$$

$$+ \left(\frac{d^2l}{dx^2} A^{p+1} k_i^p k_{i-1}^{p-1} \ldots k_{i-p+1}\right) y = 0 \quad (17)$$

Z této rovnice můžeme pomocí (16) odvoditi f_{i-p-1}, shledáme pak, že koefficienty jsou utvořeny dle téhož zákona, čímž úplnou indukcí tvar (17) je stvrzen.

Řešení rovnice f_i jest

$$y_i = \frac{c_1}{A} \int A\, dx + \frac{c_2}{A}$$

a podle relace (15) obdržíme řešení rovnic $f_{i-1}, f_{i-2}, \ldots$ čili všeobecně

$$y_{i-p} = \frac{1}{k_{i-p+1}} \left\{ \frac{1}{k_{i-p+2}} \left[\ldots \frac{1}{k_{i-1}} \left(\frac{y'_i}{k_i}\right)' \ldots \right]' \right\}'.$$

6. Možná však odvoditi jak tvar rovnice f_{i-p} tak její řešení y_{i-p} podobně jako v § 3. u dvou neodvisle proměnných ve formě daleko pohodlnější. Z rovnice (14) odvodíme totiž

$$h_{i-1} = k_i = \frac{d^2lA}{dx^2}$$

a užívajíce třetí z relací (12) obdržíme $h_{i-2}, h_{i-3}, \ldots$ čili všeobecně indukcí

$$k_{i-p} = h_{i-p-1} = \frac{d^2l}{dx^2} H_p, \quad H_p = \begin{vmatrix} A & A' & \ldots & A^{(p)} \\ A' & A'' & \ldots & A^{(p+1)} \\ \vdots & & & \\ A^{(p)} & A^{(p+1)} & \ldots & A^{(2p)} \end{vmatrix}.$$

Jest tedy podle rovnice (17)

$$A^{p+1} k_i^p k_{i-1}^{p-1} \cdots k_{i-p+1} = H_p.$$

Abychom mohli indukci tuto doplnit na úplnou, předpokládejme správnost této relace pro index p, načež zbývá dokázat, že platí pro index o 1 vyšší, totiž že jest

$$A^{p+2} k_i^{p+1} k_{i-1}^{p} \ldots k_{i-p} = H_{p+1}. \quad (18)$$

Avšak levé straně možná dát tvar

$$(A^{p+1} k_i^p \cdots k_{i-p+1}) \cdot (A k_i k_{i-1} \ldots k_{i-p+1}) \cdot k_{i-p} \text{ čili } H_p \cdot \frac{H_p}{H_{p-1}} \cdot k_{i-p},$$

poněvadž platí
$$k_{i+p} = \frac{d^2 l}{dx^2} H_p = \frac{1}{H_p^2} \begin{vmatrix} H_p & H'_p \\ H'_p & H''_p \end{vmatrix},$$
jedná se o dokázání relace
$$H_{p-1} \cdot H_{p+1} = \begin{vmatrix} H_p & H'_p \\ H'_p & H''_p \end{vmatrix},$$
která platí dle známého theorému o determinantech.*)

Lze tudíž rovnici f_{i+p} psát v independentním tvaru
$$f_{i+p} = y'' + \left(\frac{dl}{dx} \frac{H_p}{H_{p-1}}\right) y' - \left(\frac{d^2 l}{dx^2} H_p\right) y = 0 \qquad (19)$$
z něhož pro $p = i$ obdržíme rovnici hledanou f.

Řešení této rovnice určíme též neodvisle, přesvědčíme-li se analogicky jako Darboux při dvou neodvisle proměnných,**) že determinant
$$\eta_p = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta'_0 & \dots & \eta_0^{(p)} \\ A & A' & \dots & A^{(p)} \\ \vdots & & & \\ A^{(p-1)} & A^{(p)} & \dots & A^{(2p-1)} \end{vmatrix} \qquad (20)$$
jest řešením rovnice
$$\eta''_p - \frac{dl}{dx}\left(H_p H_{p-1}\right) \eta'_p + \left(\frac{dl}{dx} H_p \frac{dl}{dx} H_{p-1}\right) \eta_p = 0, \qquad (21)$$
z níž však obdržíme rovnici f_{i+p} substitucí
$$\eta_p = H_p\, y_{i+p}.$$
Poněvadž platí
$$\eta_0 = H_0 y_i = A y_i,$$
jest
$$\eta_0 = c_1 \int A\, dx + c_2$$
a derivace η_0 jsou úměrny elementům druhé řádky v determinantu (20), jak je nutno, má-li tento determinant hověti rovnici (21).†)

Sestavíme-li k rovnicím řady (7) řadu rovnic adjungovaných, pišme je ve tvaru
$$\dots g_j \dots g_1,\ g,\ g_{-1} \dots g_i \dots \qquad (22)$$
neboť snadno se přesvědčíme, že na př. rovnice g, g_1 souvisí při $a \neq o$ relací
$$z'_1 - a z_1 + h z = s, \quad z_1 = z' - (p - a)\, z.$$
Rovnice k f_{i+p} adjungovaná zní
$$g_{i+p} = z'' - \left(\frac{dl}{dx} \frac{H_{p-1}}{H_p}\right) z' - \left(\frac{d^2 l}{dx^2} H_{p-1}\right) z = 0. \qquad (23)$$

*) Ibid. p. 137, Weber, Algebra I p. 31.
**) Ibid. p. 138.
†) Ibid. p. 138.

a, jako platí o rovnicích adjungovaných 2^{ho} řádu všeobecně, souvisí s rovnicí f_{i-p} substitucí

$$y = \frac{H_{p-1}}{H_p} z,$$

takže řešení rovnic f_{i-p}, g_{i+p} jest resp.

$$y = \frac{1}{H_p} \eta_p, \quad z = \frac{1}{H_{p-1}} \eta_p.$$

Kdybychom hned z počátku § 5. předpokládali $a \neq o$, stačí dosaditi v (9) pro $y = a e^{-\int p\,dx} \Theta$, $\beta^2 e^{\int p\,dx} = A$ načež rovnice f_i nabude tvaru

$$\left(\frac{1}{A} \Theta'\right)' = 0 \text{ čili } \Theta'' - \frac{d\,lA}{dx} \Theta' = 0;$$

invariant k_i má opět tvar

$$k_i = -\frac{d^2 lA}{dx^2}$$

a ostatní postup je týž jako při $a = 0$. Rovnice (20) souvisí s f_{i-p} relací

$$\eta_p = \alpha H_p y, \quad \eta_0 = \alpha A y = \Theta.$$

7. Nyní teprv vyšetřeme případ, kdy řada (7) končí se oboustranně na př. na pravo rovnicí f_i tím, že $h_i = 0$, na levo u rovnice f_{-j}, takže $k_{-j} = 0$. Tato podmínka vyžaduje, aby

$$k_{-j} = h_{-j-1} = \frac{d^2 l}{dx^2} H_{i+j} = 0;$$

podle relace (18) vymizení k_{i-p} má za následek též vymizení H_{p+1}, tudíž podmínka daná má v zápětí

$$H_{i+j+1} = \begin{vmatrix} A & A' & \dots & A^{(i+j+1)} \\ A' & A'' & \dots & \\ \vdots & & & \\ A^{(i+j+1)} & \dots & & \end{vmatrix} = 0, \quad H_{i+j} \neq 0, \; H_{i+j-1} \neq 0, \dots, \; H_0 \neq 0.$$

Platí tudíž lineárná rovnice

$$c_0 A^{(i+j+1)} + c_1 A^{(i+j)} + \dots + c_{i+j+1} A = 0, \quad c_0 \neq 0$$

o koefficientech stálých libovolných, takže

$$A = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_{i+j+1} e^{m_{i+j+1} x}$$

nebo též, vymizí-li některé z konstant c na př. $c_{i+j-1}, c_{i+j}, c_{i+j+1}$

$$A = \sum C_k e^{m_k x} + C_{i+j-1} x^2 + C_{i+j} x + C_{i+j+1}.$$

Rovnice (19) značí tudíž pro $p = i$ při libovolném A rovnice s řadou transformační zakončenou na pravo; má-li A hodnotu právě ustanovenou, má tato rovnice řadu zakončenou oboustranně, též její řešení je stanoveno dle (20). Tím úloha na začátku § 5. předložená je rozřešena.

8. Celé vyšetřování možná obrátit a hledat nejdříve rovnice s řadou (7) končící se v levo, t. j. s podmínkou $k_{-j} = 0$. Píšeme-li rovnici f_{-j} ve tvaru systému (10), možná jí při $a = 0$ dát tvar

$$f_{-j} = y'' + ry' = 0,$$

v němž položme ještě

$$r = -\frac{B'}{B}.$$

Vzhledem k tomu, že k rovnici (8) zní rovnice transformovaná f

$$f_1 = y'' + \left(p - \frac{dlh}{dx}\right) y' + hy = 0,$$

můžeme odvoditi z f_{-j} postoupně f_{-j+1}, f_{-j+2}, .. čili všeobecně

$$f_{-j+p} = y'' - \left(\frac{dl}{dx} B h_{-j} h_{-j+1} \dots h_{-j+p-1}\right) y' +$$
$$+ \left(\frac{d^2 l}{dx^2} B^p h^p_{-j} h^{p-1}_{-j+1} \dots h_{-j+p-1}\right) y = 0.$$

V elegantnější formě obdržíme pro rovnici f_{-j}

$$k_{-j+1} = h_{-j} = \frac{d^2 lB}{dx^2}$$

a pomocí druhé relace (12) a úplné indukce, jako v § 6.

$$h_{-j+p} = k_{-j+p+1} = \frac{d^2 l}{dx^2} K_p, \quad K_p = \begin{vmatrix} B & B' & \dots & B^{(p)} \\ B' & B'' & \dots & B^{(p+1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ B^{(p)} & B^{(p+1)} & \dots & B^{(2p)} \end{vmatrix}$$

Rovnice f_{-j+p} má tvar

$$f_{-j+p} = y'' + \left(\frac{dl}{dx}\frac{K_{p-1}}{K_p}\right) y' + \left(\frac{d^2 l}{dx^2} K_{p-1}\right) y = 0. \qquad (24)$$

Nyní jest jasné, proč adjungovaná rovnice (23) má analogický tvar jako původní rovnice (19); v rovnici g_{-i+p} jest totiž $k_{-i+p} = 0$, transformační řada (22) končí v levo a jest možná psát rovnici g_{-i+p} dle (24). Týž úsudek platí ovšem obráceně o f_{i-p}.

Je-li $a \neq 0$, dosaďme v (10) pro $y = \beta\sigma$, takže rovnice f_{-j} nabude tvaru

$$\left(\frac{1}{B}\sigma'\right)' = 0 \text{ čili } \sigma'' - \frac{dlB}{dx}\sigma' = 0,$$

položíme-li

$$B = \alpha^2 e^{\int p dx} = \frac{1}{A};$$

pak jest opět

$$h_{-j} = \frac{d^2 lB}{dx^2}$$

a další vyšetřování jest jako při $a = 0$.

Končí-li řada (7) mimo v levo též na pravé straně, je-li tedy mimo $k_j = 0$ též $h_i = 0$, značí tato podmínka

$$h_i = k_{i+1} - \frac{d^2 l}{dx^2} K_{+i+j} = 0 \text{ čili } K_{i+j+1} = 0,$$

takže B má hodnotu téhož tvaru jako A.

Invarianty rovnice f s řadou (7) oboustranně zakončenou možná tedy dvojím způsobem stanoviti

$$h = \frac{d^2 h}{dx^2} H_{i+1} = \frac{d^2 l}{dx^2} K_j, \quad k = \frac{d^2 l}{dx^2} H_i = \frac{d^2 l}{dx^2} K_{j-1}$$

a možná dosazením hodnot za A, B přesvědčiti se přímo, že dvojí hodnota pro každý invariant jest totožná. Podle toho možná dát rovnici f symmetrický tvar

$$f = y'' + \left(\frac{dl}{dx}\frac{H_i}{K_j}\right) y' - \left(\frac{d^2 l}{dx^2} H_i\right) y = 0.$$

Na př. $i, j = 0, 0;\ 0, 1;\ 1, 1$ obdržíme při $a = 0$ rovnice resp.

$$y'' + \frac{alA}{dx} y' = 0, \quad y'' + \frac{dlA}{dx} y' + \frac{d^2 lA}{dx^2} y = 0,$$

$$y'' + \left(\frac{dlA}{dx} + \frac{d^3 lA}{dx^3}\right) y' + \left(2\frac{dlA}{dx^2} + \frac{d^4 lA}{dx^4}\right) y = 0$$

v nichž hodnota A jest určitá, v každé rovnici ovšem jiná a určí se dle předešlého.

Experimentální příspěvek k problému turbulentního proudění kapalin.

Napsal *Josef Velíšek.*

Proudění hydraulické čili turbulentní poprvé konstatoval, odlišil a popsal Hagen*) r. 1854. Zkoumal ve své práci vliv teploty a tlaku na vznik turbulence a pokusil se též o jistou theorii, jež však v důsledku toho, že vyšel při jejím odvozování z falešného předpokladu o lineárném rozdělení rychlosti po průměru trubice, byla nesprávná. Přes to však jest jeho práce důležitá: obsahuje odlišení nového druhu proudění a řadu cenných poznámek vztahujících se ke zkoumanému problému.

Práce Hagenova položila otázku, zda v novém druhu proudění platí také obecné rovnice hydrodynamické a na čem závisí t. zv. kritická rychlost, t. j. rychlost, při níž končí průtok Poiseuilleův a začíná turbulence. Jak takové otázky řešiti, ukázal ve svých kla-

*) Abhandl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. 1854, Berlin.