

Josef Hervert

Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 3, 131--142

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123199>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie.

(Podává *Josef Hervert*.)

(Pokračování.)

Chceme-li pomocí metody nové geometrie poznati zvláštní vztahy mezi předmětem a obrazem, když nesterjně hutná prostředí rozličnou polohu mají vzhledem k lámavé ploše, třeba jen následný optický zákon na mysl si uvéstí. Když paprsky světelné vycházejíce z jistého bodu  $p$  jednoho ústředí a vstupující do druhého ústředí tak se lámou, že se opět v jednom jeho bodu  $o$  sbíhají, nazýváme bod  $o$  skutečným (fysickým) obrazem bodu  $p$ . Děje-li se však lom tím způsobem, že paprsky vyslané od svítícího bodu  $p$  jednoho ústředí rozbíhají se zlomeny byvše v druhém ústředí tak, že sběžný bod  $o$  směřů jejich leží v témž ústředí co  $p$ , zove se bod  $o$  virtuálním (geometrickým) obrazem bodu  $p$ .

Leží-li tudíž prostředí opticky hustší na vnitřní straně kulové plochy, přísluší všem svítícím bodům co předmětům mezi  $\infty$  a  $f$  v řidším prostředí ležícím co skutečné obrazy body mezi  $f'$  a  $\infty$  v hustším ústředí; kdežto bodům svítícím, kteréž leží v mezeře  $\overline{fa}$  přiřaděny jsou co virtuelné obrazy body v řidším prostředí mezi  $\infty$  a  $a$ . Jestliže ale svítící bod  $p$  se nalézá v hustším ústředí na vnitřní straně kulové plochy a jestliže paprsky světelné vnikající na kulové mezi do řidšího ústředí lámou se od kolmice dopadu, nemění se uvedená relace mezi předmětem a obrazem, jak to již povaha promětných souosých řad sebou nese a jak se snadno dá dokázati. Geometrie polohy učí totiž o dvojpoměrech, že, vyměníme-li v symbolu (*capo*) poslední dvě písmena na vzájem, nabývá dvojpoměr hodnoty obrácené, takže

$$(capo) = \frac{1}{n}$$

a vyjádříme-li větu tuto ve smyslu fysikálním, zní takto: Je-li  $o$  svítícím bodem v hustším ústředí, má exponent lomu pro přechod světla do řidšího ústředí hodnotu obrácenou  $\frac{1}{n}$ .

Je-li však  $(caop) = \frac{co}{ao} : \frac{cp}{ap} = \frac{1}{n}$ , vyplývá z toho ihned

$$\frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao} = (capo) = n,$$

t. j. vztah mezi body  $p$  a  $o$  se nemění, nechť bod  $p$  je bodem svítícím v řidším ústředí a  $o$  jeho obrazem aneb  $o$  bodem svítícím v hustším ústředí a  $p$  jeho obrazem, čili jinými slovy řečeno: paprsky světelné probíhají touž dráhu, když mají směr z řidšího ústředí do hustšího od bodu  $p$  k bodu  $o$  aneb naopak z hustšího do řidšího od bodu  $o$  k bodu  $p$ .

Totéž by se i všemi uvedenými konstrukcemi dotvrditi dalo, jak z jednoho příkladu vysvitne. Je-li na př. v obr. 57. bod  $o$  obrazem bodu  $p$  v řidším ústředí ležícího sestrogen pro exponent  $n = \frac{3}{2}$ , pro přechod světla ze vzduchu do skla, shledáme, že týž bod  $p$  přináleží co obraz k bodu  $o$ , je-li tento svítícím bodem v hustším ústředí. Neboť chceme-li sestrojiti bod  $p$ , třeba hledati čtvrtý přiřazený k bodům  $c, a, o$  dle dvojpoměru  $\frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ . Za tou příčinou vedme bodem  $o$  libovolnou přímkou  $P$  a označme na ní délky  $do = 2, bo = 3$ . Spojíme-li bod  $d$  s bodem  $c$ , a bod  $b$  s  $a$ , protnou se přímky  $\overline{dc}, \overline{ba}$  v bodu  $t$  a jestliže bodem  $t$  proložíme přímkou  $P' \parallel P$ , vytkne nám tato na ose  $O$  bod  $p$  přiřazený co obraz svítícímu bodu  $o$ . Neboť považujeme-li bod  $t$  opět za persp. střed řad  $O, P$ , musí čtveřina :

$$(caop) = (dbo \infty) = \frac{do}{bo} : \frac{d\infty}{b\infty} = \frac{do}{bo} : 1 = \frac{do}{bo} = \frac{2}{3},$$

t. j. týž bod  $p$  přísluší bodu  $o$ , nechť jeden neb druhý bod považujeme za svítící a přiřazený bod za jeho obraz, avšak jen pod tou výminkou, že paprsky světelné přecházejí jednou z řidšího ústředí do hustšího a podruhé, že opačnou cestu vykonávají z prostředí hustšího do řidšího.

Tím ovšem není věta tato ve sporu s onou, kterouž jsme byli vytkli uvažující řadu předmětovou a obrazovou co dvě promětných, sousých řad a kdežto jsme pravili, že každému bodu  $k$  přiřazený jsou vždy dva od sebe rozdílné body, jestliže  $k$  buď za předmět aneb za obraz pojímáme. Tam jsme totiž předpokládali, že dvojpoměr  $n$  je pro obě řady veskrze stálou

veličinou, t. j. že paprsky světelné mají stále týž směr, na př. z ústředí řidšího do hustšího.

Na základě toho můžeme zcela snadno stanoviti obraz svítícího bodu, jestliže tento leží v hustším ústředí na vnitřní straně kulové plochy. Všem totiž svítícím bodům na poloměru  $\overline{ac}$  ležícím přísluší virtuelné obrazy v též mezeře; obrazy příslušící svítícím bodům mezi  $c$ ,  $f$  jsou taktéž virtuelné a sahají od  $c$  do  $\infty$  a konečně k obrazům svítícím mezi  $f'$  a  $\infty$  náležejí skutečné obrazy v ústředí řidším v mezeře  $\infty f$ . I patrně tudíž, že při této poloze prostřední ohniska  $f$  a  $f'$  jsou body skutečné, t. j. paprsky světelné se v nich skutečně sbíhají.

Pomocí ohnisek  $f$  a  $f'$  lze ku každému světelnému bodu a paprsku, nechť se nachází v řidším aneb hustším ústředí, velmi snadno přiřaděný element sestrojiti a též o tom se přesvědčiti, že světlo v jednom i druhém směru touž dráhu vykonává. Jestliže si na př. pro  $n = \frac{5}{3}$  pro přechod světla ze vzduchu do safíru, body  $f$  a  $f'$  určíme, můžeme k svítícímu bodu  $p$  v řidším ústředí pomocí přiřaděných bodů  $\infty$ ,  $f'$  sestrojiti známým způsobem obraz jeho  $o$ . Pojímáme-li však  $o$  co svítící bod v hustším ústředí a hledáme-li obraz k němu příslušný pro exponent lomu  $\frac{1}{n} = \frac{5}{9}$ , najdeme týž bod  $p$  v řid-

ším ústředí a sice touto dvojí cestou: Buď volíme na  $\overline{ma}$  jakýkoli bod  $t$  a proložíme jím a bodem  $o$  paprsek, který prostupuje  $\overline{mf'}$  v bodu  $l$  a spojíme-li  $l$  s  $e$  přímkou  $P$ , vytkne nám tato na  $\overline{m\infty}$  bod  $k$  a vedeme-li z tohoto přímkou bodem  $t$ , seče nám tato osu  $O$  v hledaném bodu  $p$  (obr. 58.). Neboť jest:

$$(caf'\infty) = \frac{cf'}{af'} = \frac{5}{9} = \frac{1}{n} = (egkl).$$

$$\text{Avšak } (egkl) = (caop) \text{ a tudíž i } (caop) = \frac{1}{n}.$$

Jiný způsob jest tento: Proloží se libovolným bodem  $t$  na přímce  $\overline{ma}$  co vrcholem svazku a bodem  $o$  přímkou  $P'$ , která protíná paprsek  $\infty m$  v bodu  $k'$  a spojíme-li tento průsečík s bodem  $e$  přímkou  $k'e$ , prostupuje tato paprsek  $\overline{mf}$  v témž bodě  $l$ , v kterém jej spojuje přímkou  $\overline{tp}$  seče, takže spojíme-li bod  $t$  s bodem  $l$  přímkou a prodloužíme-li ji až k ose, obdržíme

týž bod  $p$ . Neboť kdyby  $\overline{tp}$  protínala osu v jiném bodu, na př.  $p'$ , muselo by

$$(caop') = \frac{1}{n}$$

$$\text{jelikož } (ca \infty f) = \frac{af}{cf} = \frac{5}{9} = \frac{1}{n} = (cg'k'l') \text{ a}$$

$$(cg'k'l') = (caop').$$

Avšak svrchu jsme předpokládali, že  $(capo) = n$  čili  $(caop) = \frac{1}{n}$  a tudíž musí  $(caop') = (caop)$ , t. j. bod  $p'$  je totožný s bodem  $p$ .

Konstrukce tyto jsou ještě jednoduššími, promění-li se svazek paprskový o vrcholi  $m$  v osnovu rovnou s úběžným bodem  $co$  vrcholem. Jestliže na př. paprsky ty jsou k ose kolmy, lze k paprsku  $M$  z ústředí řidšího do hustšího vstupujícímu následovně sestrojiti příslušný zlomený paprsek  $M'$ . Prodloužíme-li  $M$ , až protíná paprsek  $A$  v bodu  $t$  a vedeme-li z  $c$  rovnoběžku k  $M$ , jelikož tu průsečík  $k$  v nesmírnosti leží, seče tato  $F'$  v bodu  $l'$  a spojíme-li  $t$  s  $l'$ , obdržíme zlomený paprsek  $M'$ . Je-li však  $M'$  dopadající paprsek, který se z hustšího do řidšího ústředí láme, obdržíme zlomený paprsek  $\overline{M}$ , jestliže průsečík  $l'$  paprsků  $M'F'$  spojíme s  $e$  a vedeme  $M // \overline{cl'}$  z bodu  $t$  (obr. 59).

Týž paprsek  $M$  obdržíme však též, když z bodu  $c$  vedeme přímkou  $// kM'$ , až protne  $F$  v bodu  $l$  a spojíme bod  $t$  s  $l$ . Neboť jelikož  $fa = cf' = ls$  je  $\triangle lsn \cong \triangle cf'm$  a tudíž:  $sn = f'm$  a protož i  $ts = l'f'$ .

Z té příčiny je i  $\triangle lts \cong \triangle cl'f'$  a tedy konečně  $tl // cl'$  čili obrazec  $ctll'$  rovnoběžník.

Z obr. 59. dá se obecná forma zákonu lomu velmi snadno takto odvoditi. Nazveme-li  $ct = u$ ,  $cl' = v$ , má se v  $\triangle ctt'$

$$ct : cl' = \sin vM' : \sin uM' \text{ aneb}$$

$$\frac{ct}{cl'} = \frac{\sin(Mu + uM')}{\sin uM'} = \frac{\sin Mu}{\sin uM'} \cos uM' + \cos Mu.$$

Jestliže však  $M$  s osou velmi malý úhel svírá, můžeme

$$\text{klásti: } ct = ca = r \quad cl' = cf' = \varphi' - r = \frac{r}{n-1}$$

a jestliže úhly v témž směru určujeme, bude v tomto případě :

$$\cos uM' = 1 \quad \cos Mu = -1, \text{ a tudíž}$$

$$\frac{ct}{ct'} = n - 1 = \frac{\sin Mu}{\sin uM'} - 1 \text{ aneb}$$

$$\frac{\sin Mu}{\sin uM'} = n.$$

Rovněž tak snadno můžeme vyzkoumati zvláštní vztahy mezi předmětem a obrazem, obrácí-li kulová plocha vydutou stranu k řidšímu ústředí a k hustšímu vypuklou.

Jestliže paprsky světelné vycházejíce od svítícího bodu v hustším ústředí vstupují do řidšího, lámou se od kolmice dopadu a zákon lomu dá se opět týmž způsobem vyjádřiti, jako v dřívějším případě. Je-li totiž bod  $p$  předmětem,  $o$  obrazem, obdržíme pro oba tuto relaci :

$$(c_{ap}o) = \frac{1}{n}.$$

Považujeme-li tento dvojpoměr za stálý a hledáme-li, jak se zvláštní polohou předmětu se mění poloha obrazu, obdržíme opět na ose dvě souběžné a soumísné řady bodové co řadu předmětovou a obrazovou, pro něž platí zákon již dříve vytknutý, že každému bodu  $k$  přiřaděny jsou vždy dva od sebe rozdílné body, ač-li  $k$  jednou za předmět, podruhé za obraz pojímáme. Avšak řady ty liší se od předešlých tím, že centrálné body č. ohniska obrácenou polohu mají, tak že se nachází  $f'$  v hustším ústředí před kulovou plochou a  $f$  v řidším ústředí, jakž se o tom snadno lze přesvědčiti. Neboť máme :

$$(ca_{\infty} f') = \frac{c_{\infty}}{a_{\infty}} : \frac{cf'}{af'} = \frac{1}{n}, \text{ aneb :}$$

$$\frac{cf'}{af'} = n, \text{ z čehož jde : } \varphi' = \frac{r}{n-1} \text{ a podobně}$$

$$(cfa_{\infty}) = \frac{cf}{af} = \frac{1}{n}, \text{ z čehož vyplývá } \varphi = \frac{nr}{n-1}$$

a protože je v tomto případě  $\varphi' + r = \varphi$  a  $\varphi = n\varphi'$ , t. j. leží-li svítící bod v nesmírné vzdálenosti v hustším ústředí, je obraz jeho  $f'$  v témž ústředí před kulovou plochou a stává-li se bod  $o$  svítícím bodem úběžným v řidším ústředí, leží opět  $f$  jemu přiřaděný v témž ústředí. Z toho jde, že body  $f$  a  $f'$  jsou v tomto případě body virtuální. Jaké jsou a kde leží obrazy

přiradění svítícím bodům v rozličných polohách jejich na ose, můžeme nyní snadno udati. Všem totiž svítícím bodům v hustším ústředí v mezeře od  $\infty$  do  $a$  přísluší co obrazy body mezi  $f'$ ,  $a$ , tedy virtuelné.

Jestliže však svítící bod leží na vnitřní straně kulové plochy, tudíž v řidším ústředí a jestliže paprsky světelné od něho vycházejíce v hustším ústředí se lámou, má opět exponent lomu obrácenou hodnotu, takže, je-li  $o$  bod svítící a  $p$  jeho obraz, třeba opět psáti:  $(cap) = n$  a z toho opět plyne:

$$(cap) = \frac{1}{n},$$

t. j. značí-li jednou  $p$  svítící bod v hustším ústředí a  $o$  jeho obraz, podruhé  $o$  svítící bod v řidším ústředí a  $p$  jeho obraz, vyjadřuje též symbol vztah mezi svítícím bodem a přiraděným k němu obrazem. Podle toho můžeme snadno stanoviti polohu obrazu, leží-li svítící bod v řidším ústředí. Všem totiž svítícím bodům mezi  $a$ ,  $c$  přísluší virtuelné obrazy v též mezeře, kdežto svítícím bodům mezi  $c$  a  $\infty$  přiraděny jsou virtuelné obrazy mezi  $c$  a  $f$ . Totéž by se i svrchu uvedenými konstrukcemi dokázati dalo.

Až potud uvažovali jsme toliko body na ose kulové plochy ležící. Avšak zákon lomu nechá se pomocí metody vyšší geometrie rozšířiti i na body mimo osu ležící a tudíž i na předměty v prostoru tělesně rozsáhlé, ač-li body ty tak blízko osy leží aneb v takové vzdálenosti od kulové plochy se nacházejí, že paprsky od nich vyslané a středem kulové plochy pronikající velmi malé úhly s osou svírají.

Je-li totiž  $m$  takový bod mimo osu ležící (obr. 60.), který řečené podmínce vyhovuje, bude i pro paprsky z něho vycházející a do druhého ústředí vstupující platiti zákon lomu svrchu odvozený, jelikož se okolností touto nezmení podmínky tam uvedené. Budou se tudíž paprsky, kteréž velmi malé úhly s osou svírají, zlomeny byvše zase v jednom bodu  $m'$  sbíhati (homocentrické), jehož poloha určena jest zákonem, že  $m$  a  $m'$  co dva přiraděné body rozdělují anharmonicky poloměr kulové plochy dle stálého dvojpoměru  $n$ , tak že  $(camm') = n$  a kdybychom i tu pro všechny možné polohy na paprsku centrálném přiraděné body co obrazy hledali, viděli bychom, že i tu lze

centrálný paprsek považovati co dvě souosých a souběžných řad bodových, řady předmětové a obrazové. Totéž platí i o bodech  $k, l$  a jich příslušných paprscích centrálných, na nichžto leží přiřazené jim body  $k', l'$  rozdělující s oněmi rovněž tak anharmonicky poměr kulové plochy.

Poněvadž ale každé dvě přiřazených bodů jednoho ústředí určuje jistý směr, patrně, že i směry dvěma páry vzájemných bodů stanovené sdruženy jsou dle stálého dvojpoměru  $n$ , na př.  $\overline{k'l}, \overline{k'l'}$  čili že tvoří dvě promětných řad a poněvadž každé dvě sdružených bodů leží na paprsku centrálném, jsou  $\overline{k'l}, \overline{k'l'}$  i v poloze persp. vůči bodu  $c$  co jich persp. středu. Totéž lze říci i o řadách bodových na  $\overline{lm}, \overline{l'm'}$  a  $\overline{km}, \overline{k'm'}$  ležících. Avšak přímkou  $\overline{k'l}, \overline{km}$  můžeme též pojímati jakožto paprsky ze svítícího bodu  $k$  jednoho ústředí vycházející a přiřazené jim paprsky  $\overline{k'l'}, \overline{k'm'}$  považovati za zlomené, kteréž se v jednom bodu  $k'$  druhého ústředí sbíhají. Z toho jde, že každé dvě přiřazených paprsků týmž bodem kulové plochy procházeti musí a jestli si v bodu  $a$  sestrojíme tečnu  $T$ , bude tato pro všechny paprsky, ač-li vyhovují podmínce, kteráž všem dedukcím této úvahy za základ položena jest, že totiž velmi malé úhly s osou svírají, splývati s obloukem  $MN$  a protož můžeme říci, že každá družina paprsků se v témž bodu tečny  $T$  protíná. Tomu-li tak, lze každý pár sdružených bodů  $k, k'; l, l'; m, m'$  pojímati za vrcholy svazků paprskových, kteréž, poněvadž paprsky středem procházející čili centrálné společné mají, i v poloze persp. jsou a sice vůči tečně  $T$  co jich persp. ose. Avšak podle naučení geometrie polohy nazýváme takové souhrny bodů a paprsků, kteréžto uvedeným zákonům vyhovují a sice jest-li prozatím vše na rovinu vztahujeme, kollineární soustavy rovné čili homologické útvary druhořadé v poloze perspektivické. Bod  $c$  co vrchol svazku paprskového oběma soustavám společného zove se středem a tečna  $T$  co řada bodová oběma soustavám společná osou homologie čili kollineace. Paprsky, kteréžto probíhají středem  $c$ , zovou se homologickými a dvojpoměr  $n$  slove tu modulem aneb činitelem kollineace. Všeobecněji lze tedy zákon lomu po způsobu nové geometrie takto vysloviti:

*„Předmět a obraz jsou dva homologické útvary dvou kollineárních soustav, kteréž mají polohu perspektivickou vzhle-*



dem  $k$  středu  $c$  kulové plochy a vůči tečně  $T$  jakožto ose kollineace, jejíž modul stanoven jest exponentem lomu  $n$ .“

V obr. 60. je obrazec  $klm$  předmět v ústředí řidším a  $k'l'm'$  přiřazený mu obraz v ústředí hustším a sice jest konstrukce ta provedena pro exponent lomu  $n = \frac{8}{5}$ , pro přechod světla ze vzduchu do topasu. Jestliže si ohniskem  $f$  ležícím před kulovou plochou ze vzdálenosti  $\varphi = \frac{5}{3}r$  vedeme přímkou  $F \parallel T$ , budou bodům na ní blízko osy ležícím přiřazeny úběžné body v druhém ústředí a paprskům, kteréž body těmi procházejíce velmi malé úhly s osou svírají a na kulovou plochu dopadají, příslušetí budou paprsky zlomené s osou rovnoběžné.

Poněvadž ale nová geometrie předpokládá, že všechny úběžné body jisté roviny v téže přímce leží, kteroužto úběžnou zove, patrno, že útvar  $F$  co měrické místo příslušných úběžníků homologickým je oné úběžné přímce, pročež se zove centrálnou osou aneb úběžnicí soustavy obrazové a z téže příčiny přímkou  $F'$  proložená ohniskem  $f' \parallel s$   $T$  centrálnou osou řady předmětové, ač-li stále týž exponent lomu  $n$  co modul kollineace na zřeteli máme a sice leží  $F'$  před kulovou plochou, jestliže řidší prostředí vně kulové plochy se nachází; jestliže však obě ústředí obrácenou polohu mají, jest  $F'$  před kulovou plochou. Jiné druhy kollineace, totiž ty, kde úběžnice mezi středem a osou homologie leží, u lomu možny nejsou, poněvadž modul kollineace  $n$  vždy jest veličina kladná.

Z toho jde, že vše, co geometrie polohy o takových kollineárních soustavách v poloze persp. učí, i zde platnost má, ač-li jen body a paprsky blízko osy na zřeteli máme. Sem hledí zejména tyto věty: Mimo střed homologie a jednotlivé body osy, kteréž co body oběma soustavám společné samy sobě přísluší, přináleží ku každému bodu  $k$  co svítícímu zcela určitý bod  $k'$  co jeho obraz; jestliže však  $k$  za obraz pojímáme, přiřazen jest mu co předmět bod od  $k'$  docela rozdílný; což podobně i o paprscích platí, jestliže tyto stále týž směr mají na př. z řidšího prostředí do hustšího pro exponent lomu  $n$ . Jestliže však uvažujeme jednou přechod světla z řidšího ústředí do hustšího pro exponent  $n$  a po druhé obrácený postup z hustšího do řidšího pro exponent  $\frac{1}{n}$ , je vždy bodu  $p$  týž bod  $o$

přiřazen, necht bod  $p$  považujeme za svítící v řidším ústředí a  $o$  za obraz, aneb  $o$  za svítící bod v hustším ústředí a  $p$  za jeho obraz, což podobně platí i o sdružených paprscích  $M$  a  $N$ , jelikož světlo touž dráhu vykonává, když z jednoho prostředí do druhého aneb naopak přechází. Probíhá-li v jednom ústředí paprsek určitým bodem, jde přiřazený paprsek v druhém ústředí sdruženým bodem. Leží-li více bodů v jednom prostředí na přímce, nalezají se příslušné body v druhém ústředí taktéž na přímce a sice jsou obě řady persp. vůči středu  $c$ . Stýká-li se více paprsků v jednom prostředí v jednom bodu co vrcholí svazku, sbíhají se přidružené paprsky také v jednom bodu a sice jsou oba svazky persp. vůči tečně  $T$ . Jsou-li  $K, K', L, L'$  dva páry vzájemně přiřazených paprsků, jsou průseky  $\overline{KL}, \overline{K'L'}$  sdružené body. Jsou-li  $k, k'; l, l'$  dvě družiny vzájemných bodů, jsou přímky spojivé  $\overline{kl}, \overline{k'l'}$  dva sdružené paprsky. Paprskům, které se v jednom bodu centrálné osy sbíhají, přiřazený jsou paprsky s osou rovnoběžné.

Kolineární vztah dvou persp. soustav je úplna určen a tudíž i úkon lámavé plochy na rozhraní dvou rozličně hutných prostředí stanoven, udáme-li dva páry sdružených prvořadých útvarů: totiž buď v jedné soustavě dva svazky  $P, Q$  a v druhé přiřazené svazky  $P', Q'$  aneb, což jedno jest, body  $p, q; p', q'$  co vrcholy svazků 2. jsou-li dány 2 páry sdružených řad bodových aneb paprsky  $A; B, A'B'$ . Jedna toliko družina vzájemných elementů nestačí, aby se pomocí jich k daným elementům sestrojily přiřazené, jakž se snadno dá dokázati.

Jsou-li dány sdružené paprsky  $M, M'$  (obr. 61.), aniž by však známy byly body  $c, a$  a exponent lomu  $n$ , lze naléztí všechny přiřazené paprsky, kteréžto procházejí průseky paprsků  $M, M'$  s osou totiž body  $p$  a  $o$ .

Třeba pouze průsečíkem  $\mu$  paprsků  $M, M'$  sestrojiti kolmou na osu  $O$ . Tato jest osou homologie  $\mathcal{A}$ . I musí tudíž paprsek  $N'$  přiřazený k  $N$  procházeti bodem  $\nu$ , průsekem paprsku  $N$  s osou homologie  $\mathcal{A}$  a bodem  $o$ , což tolikéž o všech paprscích platí, které náleží k vrcholům  $p$  a  $o$ . Dvěma přiřazenými paprsky jest tudíž toliko dvě přiřazených bodů stanoven, jich průseky totiž s osou, avšak nesčíslné množství paprsků, totiž persp. svazky v oněch průsečících.

Známe-li v rovině osou procházející dva přiřazené body  $a, a'$  (obr. 62), můžeme pomocí jich nalézt všechny přiřazené body, kteréžto leží na přímkách  $B, B'$  body danými  $a, a'$  kolmo k ose proložených. Třeba pouze  $a, a'$  spojití přímkou, kterážto seče osu v bodu  $c$ , středu kollineace a protože musí bod  $b'$  přiřazený k bodu  $b$  ležeti v průseku homologického paprsku  $\overline{bc}$  a paprsku  $B'$ . Z toho vysvítá, že družinou bodů  $a, a'$  pouze dva paprsky stanoveny jsou, totiž ty, ježto danými body procházejíce na ose kolmo stojí, jelikož se v úběžném bodu osy homologie stýkají, avšak nesčíslné množství bodů, kteréžto leží na oněch paprscích co persp. řadách bodových.

Ovšem ale lze ustanoviti všechny přiřazené elementy obou ústředí ležící v určité rovině osou procházející, dány-li jsou dva páry vzájemných paprsků  $M, M'; N, N'$  v též rovině protínajících osu v sdružených bodech  $p, o; p' o'$ . Máme-li na př. (ob. 63.) k danému bodu  $m$  sestrojiti přiřazený element  $m'$ , považujeme body  $p, p'$  za vrcholy svazků a proložíme jimi a bodem  $m$  paprsky  $K, L$ . Tyto protínají osu homologie  $A$  stanovenou průseky paprsků  $M, M'; N, N'$  v bodech  $k$  a  $l$  a jestliže tyto spojíme s body  $o, o'$  co vrcholy svazků paprskových v druhém ústředí přímkami  $K', L'$ , stanoví nám, jak patrně, jich průsečík hledaný bod  $m'$  a takovým způsobem se ku každému bodu přiřazený element sestrojiti nechá.

Rovněž tak snadno dá se k libovolnému paprsku  $R$  přiřazený  $R'$  nalézt. Třeba tu toliko vytknouti na  $R$  dva libovolné body  $r, s$  a hledati k nim přidružené body  $r', s'$ , jimiž  $R'$  procházeti musí a sice pomocí bodů  $p, p'; o, o'$  co vrcholů persp. svazků paprskových; což podobně o každém dvě přiřazených paprsků platí. Toto sestrojování přiřazených elementů lze i tehdyž provésti, když jedna družina paprsků původně daných na př.  $N, N'$  kolmo k ose stojí, jelikož druhé dva k stanovení osy homologie dostačují; z čehož na jevo jde, že dvěma páry sdružených paprsků všechny elementy obou ústředí stanovití se dají.

Taktéž můžeme sestrojovati přiřazené body a paprsky pomocí dvou párů sdružených bodů  $a, a'; b, b'$  (obr. 64.). Spojíme-li totiž body, musí přímkou spojující přiřazené body procházeti týmž bodem osy, t. j. středem homologie  $e$  a sestrojí-

me-li danými body  $k$  ose kolmice  $A, A'$ ;  $B, B'$ , jsou tyto vzájemné paprsky prostupující osu homologie v úběžném bodu. K danému paprsku  $M$  sestrojí se přiřazený paprsek  $M'$  takto: Spojíme-li body  $\alpha, \beta$ , v nichž paprsek  $M$  kolmice  $A, B$  seče, se středem  $e$ , určují nám tyto přímky spojivé na paprscích  $A', B'$  dva body  $\alpha', \beta'$ , jimiž hledaný paprsek  $M'$  procházeti musí. Je-li dána úloha, aby se na základě toho k určitému bodu  $r$  sestrojil přiřazený bod  $r'$ , třeba pouze proložití bodem  $r$  dva libovolné paprsky  $R, S$  a hledati k nim řčeným právě způsobem sdružené elementy  $R', S'$ , jichžto průsek jest hledaný bod  $r'$ . Tato konstrukce jest i tu možná, kdy dva z bodů původně daných na př.  $\alpha, \alpha'$  leží na ose, jelikož druhé dva  $k$  stanovení středu  $c$  dostačují.

Avšak i když známe dva nestejnorodé prvořadě útvary na př. dva paprsky  $M, M'$  přiřazené jakožto dopadající a zlomený, a dva body  $b, b'$  sdružené jakožto svítící bod a jeho obraz v téže rovině osou procházející, můžeme pomocí jich všechny přiřazené elementy obou ústředí sestrojiti, ač-li jen dané paprsky a body vyhovují podmínce homologicko-perspektivickým vztahem obou ústředí stanovené. Neboť průseky paprsků  $M, M'$  s osou (obr. 65.), totiž body  $p, o$  jsou vrcholy svazků perspektivických vůči ose homologie  $A$  a kolmice  $B, B'$  body  $b, b'$  na osu spuštěné jsou dvě řady bodové persp. vůči středu homologie  $c$ . Za tou příčinou musí se paprsky  $\overline{pb}, \overline{ob'}$  protínati v určitém bodu osy  $A$  a přímka spojující průseky  $(MB), (M'B')$  procházeti bodem  $c$ . Jestliže však ony čtyry elementy vyhovují řečené podmínce, můžeme pomocí jich všechny přiřazené body a paprsky určití, ač-li daná družina bodů  $b, b'$  neleží na ose lámavé plochy  $O$ , jelikož by se pak nedal určití bod  $c$  a ač-li paprsky  $M, M'$  nestojí kolmo na  $O$ , poněvadž bychom nemohli určití osu homologie  $A$ .

Má-li se k bodu  $m$  sestrojiti sdružený bod  $m'$ , třeba proložití body  $m, p$  paprsek  $P$ , jenž prostupuje osu  $A$  v určitém bodu  $\pi$ . Spojíme-li tento bod  $s$   $o$  paprskem  $P'$  a vedeme-li bodem  $m$  paprsek homologický, jest průsek obou těch paprsků:  $P'$  a  $mc$  hledaný bod  $m'$ . Rovněž tak snadné jest sestrojování přiřazených paprsků. Budiž na př. dán paprsek  $N$ , jenž seče osu  $A$  v bodu  $v$  a k němuž se hledá sdružený paprsek  $N'$ .

Proložíme-li průsečkem ( $NB$ ) paprsek homologický, vytkne nám tento na  $B'$  bod  $n'$  a spojíme-li průsečky  $v$ ,  $n'$ , obdržíme hledaný paprsek  $N'$ .

Ještě snadnějším jest sestrojování přiřazených elementů, známe-li střed  $c$  a osu homologie  $A$ , jakož i centrálné osy  $F$ ,  $F'$ . K danému bodu  $m$  (obr. 66.) najde se totiž přiřazený bod  $m'$  takto: Paprsku bodem  $m$  procházejícímu a s osou  $O$  rovnoběžnému přiřaden jest paprsek jdoucí bodem  $f'$  a paprsku, jenž z bodu  $m$  vycházejí prostupuje ohniskem  $f$ , přísluší co přiřazený element paprsek s osou  $O$  rovnoběžný, jich průsek jest hledaný bod  $m'$ . Tých bod obdržíme však též pomocí homologického paprsku bodem  $m$  proloženého a pomocí jednoho z obou paprsků strojných, právě uvedených, totiž buď toho, který jest s osou rovnoběžný aneb onoho, jenž prochází ohniskem  $f$ , tak že se trojí cestou k danému bodu přiřazený element sestrojiti dá. Jelikož paprsky, kteréž body  $m$ ,  $m'$  procházejí kolmo na ose stojí, družinu tvoří, lze pomocí jich sestrojiti přiřazené elementy i k bodům, které nekonečně blízko osy  $O$  leží. Je-li  $n$  takový bod, najde se k němu příslušný bod  $n'$  takto: Sestrojíme-li v  $n$  kolnici na osu, volíme-li na ní jakýkoli bod  $m$  a najdeme-li příslušný mu bod  $m'$ , třeba pouze v  $m'$  sestrojiti přímkou kolmou k ose  $O$ . I bude hledaný bod  $n'$  míti na ní takovou polohu, že:

$$\frac{k'n'}{kn} = \frac{k'm'}{km}.$$

K danému paprsku  $P$  sestrojí se přiřazený  $P'$  buď tak, že ze středu  $c$  vedeme rovnoběžku k  $M$ , a spojíme-li bod  $\alpha'$ , v němž tato prostupuje centrálnou osu  $F'$ , s bodem  $\pi$ , v němž seče  $P$  osu homologie  $A$ , aneb tím způsobem, že bod  $\alpha$ , v němž  $P$  centrálnou osu  $F$  protíná, spojíme s  $c$  přímkou, s kteroužto jest hledaný paprsek  $P'$  rovnoběžný.

(Pokračování.)