Josef Šolín

# Počátkové arithmografie. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 3 (1874), No. 4, 173--181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123175

Kdyby se křemen tak vyhraňoval, měl by u každého pobočného rohu dvoustejnoklonu jednu plochu Plagiedru, kdežto ji má jen u střídavých rohů.

III. Tvary čtvrtiměrné.

75. Spojením dvou čtvrtiměrných tvarů povstanou opět poloměrné tvary pravo-levé.

Jelikož křemen málokdy se vyskytuje co tvar různopolární (hemimorfický), jak to jednoduchá čtvrtiměrnost jeho žádá, nýbrž položení ploch jeho ukazuje na dva čtvrtiměrné tvary na vzájem k sobě obrácené, *náleží* tedy *křemen* vlastně *do řady dvoustejnoklonné čtvrtiměrné,* nechceme-li tvary jeho považovati raději za srostlice.

— Srostlice v soustavě stejnoklonné jsou velmi rozmanité. Vyskytují se dle ploch $h$, $o$, $\underline{o}_1$, $o_{1/2}$, $\underline{o}_{1/2}$ atd. O nich bude se jednati příležitě na jiném místě.

---

# Počátkové arithmografie.

(Píše prof. *Josef Šolín.)*

(Pokračování.)

Kromě spirály exponencialné může se užívati ku grafickému odmocňování také jiných křivek, jako na př. *logistiky*, kteráž má v soustavě Cartesiově obdobný význam jako spirála exponencialná v soustavě polárné.

*Schlesinger* *) poroučí k témuž účelu čáry, jimž náleží v polárné soustavě rovnice

$$u = a\, sec^k v.$$

Za $k = 1$ obdržíme přímku $\Gamma_1$ kolmou k ose $X$ (obr. 8.) a mající od počátku $o$ soustavy vzdálenost $\overline{oa} = a$; za $k = 0$ kružnici $\Gamma_0$ opsanou z bodu $o$ poloměrem $a$; za $k = -1$ kružnici $\Gamma'$ mající úsečku $\overline{oa}$ za průměr.

---

* Potenzcurven. Zeitschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1866.

K těmto křivkám snadně se strojí normály a tím i tečny; poněvadž pak mimo to křivky náležející k hodnotám $k > 1$ mají vůbec křivost skrovnou, lze jich užívati k odmocňování příbližnému, jež nevyžaduje rejsování křivek samých.

Je-li totiž (v obr. 8) $\Gamma_k$ čára náležející k mocniteli $k$, $\Gamma_1$ pak přímka náležející k mocniteli 1, tak že

$$\overline{op_k} = u_k = a \sec^k v$$

$$\overline{op_1} = u_1 = a \sec v,$$

máme

$$\frac{u_k}{a} = \left(\frac{u_1}{a}\right)^k, \quad \frac{u_1}{a} = \sqrt[k]{\frac{u_k}{a}}.$$

Polárná subnormála $\overline{on}$ bodu $p_k$ křivky $\Gamma_k$ dána bude výrazem

$$\overline{on} = \frac{du_k}{dv} = k\,u\,tg\,v = k.\overline{p_k m},$$

je-li $p_k m \perp op_k$; pročež

$$\overline{ro} = k.\overline{rm}.$$

Veďme $p' s_k \parallel nr$; spojíme-li body $a$, $p'$, je přímka $ap'$ kolmá ku přímce $op_k$ a tedy rovnoběžná s přímkou $p_k m$; protož

$$\frac{\overline{s_k a}}{\overline{s_k o}} = \frac{\overline{rm}}{\overline{ro}} = \frac{1}{k},$$

$$\overline{s_k a} = \frac{\overline{s_k o}}{k} = \frac{\overline{ao}}{k-1}.$$

Bod $s_k$ platí tedy pro všeliké body křivky $\Gamma_k$; přímka $s_k p'$ udává pak vždy zaměření normály v bodu $p_k$.

Ku každé křivce $\Gamma_k$ náleží určitý bod $s_k$; každý paprsek $P$ svazku $s_k$ seče kružnici $\Gamma'$ ve dvou bodech $p'$, $q'$ (realných neb idealných), a k těmto náležejí dva body $p_k$, $q_k$ křivky $\Gamma_k$, jichž normály $P_k$, $Q_k$ jsou rovnoběžné s paprskem $P$. Dvojiny rovnoběžných normál čáry $\Gamma_k$ jsou tedy v involuci, a souhrn všech těchto dvojin — involuční svazek vyšší vůbec třídy — je se svazkem $s_k$ prvé třídy v projektivné souvislosti jedno- dvojčlenné.*)

Pokud $k > 1$, jest v obr. 8. bod $s_k$ na pravo od bodu $a$; je-li $0 < k < 1$, objevuje se bod $s_k$ na levo od počátku $o$; je-li

*) Ein- zweideutige Beziehung. Viz „Weyr, Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde."

konečně $k < 0$, obsažen bod $s_k$ v úsečce $\overline{oa}$. V posledním případě odpovídá každému paprsku svazku $\bar{s}_k$ realná družina dotčeného involučního svazku normál čáry $\Gamma_k$, i lze vésti k čáře $\Gamma_k$ každým bodem úběžným (v každém zaměření) dvě realné normály a tudíž každým bodem úběžným dvě realné tečny.

V prvních dvou případech však odpovídají oběma tečnám, jež vésti lze bodem $s_k$ ke kružnici $\Gamma'$, samodružné paprsky involučního svazku normál; příslušné body čáry $\Gamma_k$, majíce nekonečné poloměry křivosti, jsou obraty této čáry. Dotčené tečny kružnice $\Gamma'$ rozdělují pak svazek $\bar{s}_k$ na dva úhly; paprskům jednoho úhlu (v němž obsažena kružnice $\Gamma'$) odpovídají realné, paprskům druhého úhlu idealné družiny involučního svazku normál čáry $\Gamma_k$.

Všeliké křivky $\Gamma_k$ jdou bodem $a$ i dotýkají se tam přímky $\Gamma_1$. Křivky náležející k hodnotám $k > 0$ obracejí od bodu $a$ až do obratů ku přímce $\Gamma_1$ stranu vypuklou, dále pak stranu dutou, i mají každá v zaměření kolmém k ose X bod úběžný a v něm úběžnou tečnu. —

Dejme tomu, že bychom měli stanoviti třetí odmocninu poměru dané délky $z$ k délce základní $a$, je-li tento poměr $\frac{z}{a} > 1$. Tu jde o stanovení jednoho z průsečíků kružnice $Z$ (obr. 9.), opsané z bodu $o$ poloměrem $z$, s čarou $\Gamma_3$, kterouž však nechceme rejsovati. Majíce na zřeteli běh čar $\Gamma_k$ vytkněme paprsek $om_1$ odhadem tak, abychom mohli poměr $\frac{\overline{om_1}}{a}$ vzíti za první přibližnou hodnotu žádané odmocniny. Ztrojmocníme-li tento poměr, vedouce $m_1m_2 \perp om_1$, $m_2m_3 \perp om_2$, obdržíme na paprsku $om_1$ bod $m_3$ čáry $\Gamma_3$, kterýž však vůbec nebude na kružnici $Z$. Abychom odvodili druhou přibližnou hodnotu žádané odmocniny, veďme v bodu $m_3$ k čáře $\Gamma_3$ tečnu $m_3z$ (pravoúhelně k $s_3m'$, kdež $\overline{as_3} = \frac{a}{k-1} = \frac{a}{2}$). Tečna tato protíná kružnici $Z$ v bodu $z$, a vedeme-li paprsek $oz$, stanoví průsečík jeho $n_1$ s přímkou $\Gamma_1$ druhou přibližnou hodnotu $\frac{\overline{on_1}}{a}$. Ztrojmocníme-li tuto, obdržíme bod $n_3$, který bude mnohem blíže ke kružnici $Z$ nežli bod $m_3$, a t. d. (V obr. 9. neliší se již bod $n_3$ patrně od bodu $z$, ač první přibližná hodnota dosti vzdálena byla od správné hodnoty; úloha tudíž řešena.)

Chceme-li tímto spůsobem odmocňovati daná *čísla*, zvolme základní délku $a$ za jedničku měřidla, kteréž má býti prostředníkem mezi čísly a linearnými obrazy jejich. V obr. 9. jest $\frac{z}{a} = 2$, tak že stanovena tam zároveň $\sqrt[3]{2}$.

*Druhé odmocniny.* Na strojení druhých odmocnin poskytuje elementárná geometrie prostředkův dostatečných.

*a) Odmocnění součinu dvou délek* jest totožné se stanovením jejich střední měřické úměrné. Pakli v obou podobných soustavách, jimiž vykonává se grafické násobení, vzájemně rovnají se dvě úsečky, jež nenáležejí ani k téže soustavě ani k téže družině, je-li tedy v úměře

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

na příklad $a' = b = x$, máme

$$x^2 = ab'$$

t. střední měřickou úměrnou. Podlé toho, jakou polohu mají ve výkresu dané délky a jakou polohu míti má výsledek, hodí se lépe ta neb ona konstrukce, z nichž některé naznačeny v obr. 10. [V obr. 10. a) jest $\overline{cx}^2 = \overline{ac} \cdot \overline{cb}$, dále pak $\overline{ax}^2 = \overline{ac} \cdot \overline{ab}$; v obr. 10. *b*) a 10. *c*) máme $\overline{ox}^2 = \overline{oa} \cdot \overline{ob}$, v posledním mimo to $\overline{b'a} = \overline{ob}$.]

Na tomto základě strojiti lze výrazy

$$\sqrt{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots},$$

jsou-li mocnitelé $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... celistvá čísla dílem positivná dílem negativná a mimo to

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 2.$$

Co se týče druhých odmocnin *čísel*, lze každé číslo bráti za součin dvou činitelů a tedy strojiti druhou jeho odmocninu spůsoby výše naznačenými.

*b) Odmocnění* $\left\{\begin{array}{l}\textit{součtu}\\ \textit{rozdílu}\end{array}\right\}$ *druhých mocnin dvou délek* vyžaduje sestrojení pravoúhelného trojúhelníka z $\left\{\begin{array}{l}\text{obou odvěsen}\\ \text{přepony a jedné odvěsny}\end{array}\right\}$, zakládajíc se na známé větě Pythagorově.

Opětováním téže konstrukce strojiti lze dále výrazy
$$\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \ldots}$$
a současnou konstrukcí úměrných výrazy
$$\sqrt{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots \pm a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \ldots \pm a''^{\alpha''} b''^{\beta''} c''^{\gamma''} \pm \ldots},$$
jsou-li všeliké exponenty čísla celistvá vyhovující podmínkám
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 2$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots = 2$$
$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \ldots = 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dáno-li na příklad
$$x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c} + \frac{def}{g} - \frac{h^3 k}{l^2}},$$
můžeme psáti
$$y^2 = a \,.\, a\frac{b}{c}, \quad y_1^2 = d\frac{e}{g} \,.\, f, \quad y_2^2 = h\frac{h}{l} \,.\, h\frac{k}{l}.$$

Vykonáme-li
$$a\frac{b}{c} = a', \quad d\frac{e}{g} = d', \quad h\frac{h}{l} = h', \quad h\frac{k}{l} = h'',$$
dále
$$y = \sqrt{aa'}, \quad y_1 = \sqrt{d'f}, \quad y_2 = \sqrt{h'h''},$$
pak
$$z = \sqrt{y^2 + y_1^2},$$
zbývá konečně strojiti
$$x = \sqrt{z^2 - y_2^2}.$$

Jsou-li činitelé $a$, $b$, $c$, ... čísla, odpadává podmínka, že jednotlivé členy pod odmocnidlem musí býti rozměru druhého; scházející činitelé mohou totiž v tomto případě jedničkami se nahraditi.

*Dodatek.* Do grafické arithmetiky náleží jistou měrou také užívání *logarithmického pravídka prostého i posouvacího* (logarithmischer Rechenschieber). Pravídko takové zastupuje logarithmické tabulky v případech, jež nevyžadují veliké přesnosti. Logarithmické tabulky obsahují zajisté dvě řady čísel: čísla přirozená a jich logarithmy. Přeneseme-li na přímku od společného počátku délky, vyjadřující hodnoty logarithmů přirozené řady čísel, a připíšeme-li ku každému bodu koncovému ono číslo, jehož logarithmus příslušnou délkou jest vyjádřen, lze užívati přímky tak rozdělené a tak číslované k týmž účelům, jako tabulek logarithmických. Sčítáním, odčítáním, násobením a dělením délek násobíme, dělíme, mocníme, odmocňujeme příslušná čísla. Přeneseme-li dotčené dělení a číslování na pravídko, máme prosté pravídko logarithmické. Práce svrchu uvedené vykonávají se kružidlem. Zřídí-li se týmž způsobem dvě pravídka tak, aby jedno podél druhého neb v druhém posouvati se mohlo, lze dotčené práce vykonávati na věčším díle tímto posouváním, i máme logarithmické pravídko posouvací. —

Přestávajíce zde na vyložení podstaty pravídek logarithmických, pomíjíme všelikých podrobností zřízení a užívání těchto nástrojů.

### VI. Řešení rovnic prvního stupně.

a) *Řešení rovnice o jedné neznámé*, totiž

$$ax = bc,$$

kdež $a$, $b$, $c$ jsou délky dané, záleží v strojení čtvrté úměrné, jak naznačuje forma

$$x = \frac{bc}{a}.$$

V případě *číselných* součinitelů rozloží se pravá strana na dva činitele, z nichž jeden může rovnati se na př. jedničce.

b) *Dvě rovnice o dvou neznámých*

$$\begin{aligned} ax + by &= cd \\ a'x + b'y &= c'd' \end{aligned}$$

lze řešiti sestrojením obou přímek, daných v soustavě Cartesiově těmito rovnicemi (viz čl. 4. o strojení výrazu $y = \lambda x + b$; zde mění se $\lambda$ v $-\frac{a}{b}$, $b$ pak v $\frac{cd}{b}$). Souřadnice průsečíku obou přímek jsou žádané hodnoty $x$, $y$.

c) *Tři rovnice o třech neznámých*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= de \\ a'x + b'y + c'z &= d'e' \\ a''x + b''y + c''z &= d''e'' \end{aligned}$$

řešiti lze obdobně sestrojením průsečíku tří rovin, daných oněmi rovnicemi v soustavě Cartesiově.

d) *Dáno-li vůbec n rovnic o n neznámých,*

můžeme je graficky řešiti strojením podílů příslušných determinantů. Tak na př. vychází z uvedených svrchu rovnic o třech neznámých

$$x = \frac{\Sigma \pm (de)\, b' c''}{\Sigma \pm a b' c''}, \quad y = \frac{\Sigma \pm a\,(d'e')c''}{\Sigma \pm ab' c''}, \quad z = \frac{\Sigma \pm ab'(d''e'')}{\Sigma \pm a b' c''}.$$

Vyjádříme-li známým spůsobem (viz čl. 3. o vysazování činitelů) společného jmenovatele všech těchto výrazů součinem $f\,g\,h$, kdež dva činitelé $f$, $g$ libovolně vzati, činitel třetí $h$ pak sestrojen, dále jednotlivé čítatele součiny $f g h \xi$, $f g h \eta$, $f g h \zeta$, jest

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

## VII. Řešení rovnic druhého stupně.

Vytkneme-li ve dvou soumístných projektivných řadách $\dot{P}$, $\dot{P}'$ prvního stupně určitý počátek $a$, i stanovíme-li bod $m$ řady $\dot{P}$ úsečkou $x = \overline{am}$, sdružený s ním bod $m'$ řady $\dot{P}'$ obdobně úsečkou $x' = \overline{am'}$, souvisí proměnné $x$, $x'$ rovnicí

$$xx' + ax + a'x' + bc = 0.$$

Pro samodružné body obou řad máme mimo to podmínku $x = x'$ a protož rovnici

$$x^2 + (a + a')\,x + bc = 0.$$

Dána-li tedy naopak rovnice

$$x^2 + px + qr = 0\,, \tag{1}$$

kdež $p$, $q$, $r$ jsou úsečky dané, můžeme ji bráti za rovnici samodružných bodů dvou soumístných projektivných řad prvého stupně, daných na př. rovnicí

$$xx' + px + qr = 0 \tag{2}$$

Abychom mohli strojiti body samodružné, musíme si zjednati tři družiny obou řad; zvolíme-li tři libovolné body $a$, $b$, $c$ jedné řady a vložíme-li hodnoty úseček jejich do rovnice (2), obdržíme výrazy úseček bodů $a'$, $b'$, $c'$ sdružených s oněmi v řadě druhé. Abychom se tu vyhnuli pomocným konstrukcím, položme

$$x = 0,$$

i obdržíme z rovnice (2)

$$x' = \infty\,,$$

t. j. s počátkem $a$ co bodem řady $\dot{P}$ sdružen v řadě $\dot{P}'$ bod úběžný $a'_\infty$. Jak patrno, jest družina tato nezávislá na součinitelích dané rovnice. Dále zvolme

$$x' = \infty;$$

k tomu náleží

$$x' = -p,$$

čímž stanovena družina $b_\infty$, $b'$. Konečně vytkněme

$$x = r,$$

což vede k hodnotě

$$x' = -p - q;$$

tím nabýváme třetí družiny $c$, $c'$.

Sestrojíme-li body samodružné, vyjadřují úsečky jejich, měřené od bodu $a$, žádané kořeny rovnice (1). *)

Není potřebí dokládati, že rovnice (2) není jediná forma, z níž můžeme vyvozovati danou rovnici (1). Vyvozujeme-li rovnici (1) z rovnice

$$xx' + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{2}px' + qr = 0, \qquad (3)$$

jsou řady $\dot{P}$, $\dot{P}'$ v involuci, poněvadž rovnice tato vystřídáním proměnných $x$ a $x'$ se nemění. V tomto případě stačují družiny dvě. Položíme-li zde

$$x' = \infty,$$

obdržíme

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Znamenejme tuto družinu písmeny $o$, $o'_\infty$ (obr. 11.); bod $o$ jest patrně středem involuční řady $\ddot{P}$ **).

*) Na strojení samodružných bodů řad $\dot{P}$, $\dot{P}'$ promítáme tyto řady na čáru $\Gamma$ druhého stupně (na př. kružnici) z bodu $s$ téže čáry (obr. 11.), čímž nabýváme dvou soumístných projektivných řad $\dot{\Gamma}$, $\dot{\Gamma}'$ stupně druhého. Z družin $aa'$, $bb'$, $cc'$ řad $\dot{P}$, $\dot{P}'$ odvozujeme tak družiny $a_1\,a_1'$, $b_1\,b_1'$, $c_1\,c_1'$ řad $\dot{\Gamma}$, $\dot{\Gamma}'$. Sestrojíme-li přímku $S$, stanovenou dvěma z průsečíků 1, 2, 3 paprsků $a_1\,b_1'$, $a_1'\,b_1$, dále $a_1\,c_1'$, $a_1'\,c_1$ a konečně $b_1\,c_1'$, $b_1'\,c_1$, jsou průsečíky její s čarou $\Gamma$ samodružnými body $e_1$, $f_1$ řad $\dot{\Gamma}$, $\dot{\Gamma}'$; promítneme-li pak tyto body z bodu $s$ zpět na přímku $P$, máme samodružné body $e$, $f$ řad $\dot{P}$, $\dot{P}'$, a úsečky $ae$, $af$ jsou žádanými kořeny dané rovnice.

**) Symbolem $\ddot{P}$ znamenáme involuční řadu, skládající se z obou řad $\dot{P}$, $\dot{P}'$.

Sestrojme další družinu, berouce na př. počátek $a$ za jeden bod, tak že

$$x = 0\,;$$

tím obdržíme pro bod $a'$ úsečku

$$x' = -\frac{2\,qr}{p}\,,$$

což snadně se strojí.

Samodružné body $e$, $f$ rozdělují zde obě družiny $o\,o'_\infty$, $a\,a'$ harmonicky; potřebí tedy strojiti pouze střední úměrnou mezi úsečkami $oa$, $oa'$, jakož naznačuje rovnice

$$\overline{oe}^2 = \overline{of}^2 = \overline{oa}\,.\,\overline{oa'}.$$

V případě číselných součinitelů rozloží se poslední člen rovnice dané vhodně na dva činitele $q$, $r$. V obr. 11. a 12. řešena oběma spůsoby vytčenými rovnice

$$x^2 + 2{\cdot}17\,x - 3{\cdot}78 = 0,$$

kdež tedy

$$p = 2{\cdot}17,\quad qr = -3{\cdot}78\,;$$

součin $qr$ rozvržen v činitele

$$r = 2,\quad q = -1{\cdot}89.$$

(Pro nedostatek místa připojeno k oběma dotčeným obrazcům měřidlo prosté místo transversálného.)

(Pokračování.)

---

# O kyvadle cykloidálním a kruhovém.

(Sepsal *V. Laudi*, *) z vlaštiny volně přeložil Dr. *F. J. Studnička.*)

I. Pohybuje-li se v neodporujícím ústředí působením přítažnosti zemské hmotný bod na oblouku cykloidy $DMH$ (obr. 19.), již zanechává co stopu bod $D$ kružnice poloměru $OB = r$, valené na vodorovné přímce $IL$, dosáhne v bodu $M$ rychlosti

$$v = \sqrt{2g\,.\,CQ}\,,$$

počíná-li pohyb v bodu $H$ vodorovné přímky $CH$ rychlostí $v = 0$

---

*) Periodico di scienze mat. e nat. I. fasc. 4. pag. 114.