Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Krejčí

Začátky mathematické krystallografie. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 4, 164--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123174

jektivní velmi důležitá; vrátíme se k ní později, neb chceme uvésti dříve upotřebení některá souřadnic přímkových a tudíž poukážeme jen k bezprostřednímu výsledku, jenž z této věty plyne.

Libovolná přímka protíná svazek harmonický čtyř přímek v bodech harmonických.

Libovolná přímka protíná involuci paprskovou v involuci bodové.

Spojíme-li s libovolným bodem čtyři harmonické body, obdržíme svazek harmonický čtyř přímek.

Involuce bodová promítá se z libovolného bodu v involuci paprskové.

(Pokračování.)

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.)*

(Dokončení.)

67. Výpočet koefficientů vztahuje Naumann na tu výminku, že polární hrany H, D tvaru $m P n$ odtínají hlavní osu t ve vzdálenosti $t' = m t$, a pobočné hrany jednu vedlejší osu r ve vzdálenosti $r = 1$, druhou ve vzdálenosti $n r$, kdežto meziosa $p = \frac{n \sqrt{3}}{n+1}$, při čemž v hraně H končí se meziosa p a v hraně D vedlejší osa $r = 1$.

Z dvou hran dá se třetí hrana vypočísti a pak jest na př. pro známé hrany D, S

$$m t = tang \tfrac{1}{2} S . sin (r, s),$$

$$cos (r, s) = \frac{cos \frac{1}{2} D}{sin \frac{1}{2} S},$$

$$n - {}^1/_2 = tang (r, s - 30^0) \sqrt{{}^3/_4}.$$

Pro známé hrany H, S jest

$$m t = tang \tfrac{1}{2} S . sin (150^0 - p, s),$$

$$cos (p, s) = \frac{cos \frac{1}{2} H}{sin \frac{1}{2} S},$$

$$n - {}^1/_2 = tang (120^0 - p, s) \sqrt{{}^4/_4}.$$

Pro tvar mP jest $r = 1$, $p = \sqrt{3/_4}$.

$$mt = tang\, \tfrac{1}{2} S \sqrt{3/_4}.$$

Pro tvar $mP2$ jest $r = 1$, $p = \sqrt{4/_3}$.

$$mt = tang\, \tfrac{1}{2} S.$$

Pro tvar ∞Pn jest $r = 1$, $p = \dfrac{n\sqrt{3}}{n+1}$, $\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}D = 150^0$,

$$tang\, \tfrac{1}{2}H = \frac{r \,.\, sin\, 30^0}{p - cos\, 30^0} \text{ nebo } \frac{n+1}{n-1} = tang\, \tfrac{1}{2} H \sqrt{3}.$$

Převedení známek Naumannových na známky Millerovy.

68. Dvanáctiboký jehlanec mPn jest spojka dvou sklalenoedrů o 60^0 k sobě otočených; jejich známky jsou $+\dfrac{mPn}{2}$, $-\dfrac{mPn}{2}$.

Plochy těchto skalenoedrů vztahují se ve smyslu Naumanna na tři osy x, y, z, z nichž dvě y, z se protínají v jedné rovině pod úhlem 60^0, kdežto třetí osa x stojí na nich kolmo.

Pro jednu z ploch mPn platí tedy rovnice

$$\frac{x}{mt} + y + \frac{z}{n} = 1$$

Pro plochu prvotvarného stejnoklonu, jehož tři hrany h, h', h'' skalenoeder mPn odtínají, a kteréž se v ose x stýkají, platí rovnice na středobod uvedené, a sice:
pro jednu plochu,

$$\frac{x}{t} + y + z = 0,$$

pro druhou plochu rovnoběžnou s osou z $\quad \dfrac{x}{t} - y \quad = 0,$

pro třetí plochu rovnoběžnou s osou y $\quad \dfrac{x}{t} - z \quad = 0.$

Hrany h, h', h'' tohoto stejnoklonu, jež co osy skalenoedru považovati chceme, jsou průsečnými čarami dvou a dvou ploch stejnoklonu, a tudíž se ustanoví z dvou a dvou rovnic ploch těchto rovnice a sice

pro hranu h, $\quad \dfrac{x}{t} - y = 0, \quad z - \dfrac{x}{t} = 0.$

pro hranu h', $\frac{x}{t} + \frac{y}{2} = 0$, $z - \frac{x}{t} = 0$,

pro hranu h'', $\frac{x}{t} - y = 0$, $\frac{z}{2} + \frac{x}{t} = 0$.

Spojí-li se postupně tyto rovnice s rovnicí plochy skalenoedru mPn, objeví se výraz pro souřadnice konečných bodů čar $^1/a$, $^1/b$, $^1/c$, v nichž plocha skalenoedru hrany h, h', h'' stejnoklonu protíná.

Pro konečný bod v $^1/a$ jest

$$x = \frac{mnt}{n + mn + m}, \quad y = \frac{mn}{n + mn + m}, \quad z = \frac{mn}{n + mn + m};$$

pro konečný bod $^1/b$ jest

$$x = \frac{mnt}{n - 2mn + m}, \quad y = \frac{mn}{n - 2mn + m}, \quad z = \frac{mn}{n - 2mn + m};$$

pro konečný bod v $^1/c$ jest pak

$$x = \frac{mnt}{n + mn - 2m}, \quad y = \frac{mn}{n + mn - 2m}, \quad z = \frac{mn}{n + mn - 2m}.$$

Délka čar $^1/a$, $^1/b$, $^1/c$ totiž délka úseků na nových osách ustanoví se jakožto vzdálenost konečných bodů od středobodu os, a sice dle vzorce pro soustavu klonoosou ve všeobecné krystallografii vyvinutého do něho vložíme úhel $(y, z) = 60^0$, úhel $(x, y) = (x, z) = 90^0$, čímž se objeví rovnice

$$v^2 = x^2 + y^2 + z^2 + yz.$$

Z toho vychází pro

$$^1/a = \frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n + mn + m},$$

$$^1/b = \frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n + 2mn + m},$$

$$^1/c + \frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n + mn - 2m}.$$

Pro jednu z ploch druhého skalenoedru $-\frac{mPn}{2}$ platí rovnice

$$\frac{-x}{mt} + y + \frac{z}{n} = 1,$$

z čehož následuje

$$^1/a = -\frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n-mn-m},$$

$$^1/b = -\frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n+2mn-m},$$

$$^2/c = -\frac{mn\sqrt{t^2+3}}{n-mn+2m},$$

K převedení Naumannových známek na známky Millerovy $= abc$ slouží tudíž následující vzorce, do nichž postupně $n = 1$, $m = 1$, $n = 2$, $m = {}^1/o$, $m = o$ se vloží

$\frac{mPn}{2}$	$a = n+mn+m$,	$b = n-2mn+m$,	$c = n+mn-2m$;	
$-\frac{mPn}{2}$	$a = n-mn-m$,	$b = n+2mn-m$,	$c = n-mn+2m$;	
$\frac{mP}{2} = mR$,	$a = 2m+1$,	$b = 1-m$,	$c = 1-m$;	
$-\frac{mP}{2} = -mR$,	$a = 1-2m$,	$b = 1+m$,	$c = 1+m$;	
$\frac{P}{2} = R$,	$a = 1$,	$b = 0$,	$c = 0$;	$abc = 100$;
$-\frac{P}{2} = -R$,	$a = -1$,	$b = 2$,	$c = 2$;	$abc = \bar{1}22$;
$mP2$,	$a = 2+3m$,	$b = 2-3m$,	$c = 2$,	
∞Pn,	$a = 1-2n$,	$b = n-2$,	$c = n+1$;	
$\infty P2$,	$a = -1$,	$b = 0$,	$c = 1$;	$abc = \bar{1}01$;
$\infty P = \infty R$,	$a = -1$,	$b = -1$,	$c = 2$;	$abc = \bar{1}12$;
$oP = oR$,	$a = 1$,	$b = 1$,	$c = 1$;	$abc = 111$.

Příklad spojky plnoměrně dvoustejnoklonné.

69. *Beryll* z Uralu (obr. 8.) (v 3. sešitu). Ustanoví-li se spůsobem Naumannovým a vezmou-li se plochy P co plochy základného jehlance, náleží plocha z ostřejšími jehlanci první řady; úklony k Pinakoidu m jsou $(m,P) = 150^0 3'$, $(z,P) = 130^0 57'$, z čehož pobočná hrana $\frac{1}{2}S = 180^0 - 150^0 3' = 29^0 57'$, $\frac{1}{2}S' = 180^0 - 130^0 57' = 49^0 3'$. Porovnáním tangent obou úhlů hledá se:

$$tang\,\tfrac{1}{2}S : tang\,\tfrac{1}{2}S' = 0{\cdot}576 : 1{\cdot}152 = 1 : 2,$$

pročež $z = 2P$.

Jehlanec s jest druhořadý $mP2$ a poněvadž otupuje polární hrany jehlance $2P$, má tu samou osu $t = 2$ jako $2P$, pročež jest $s = 2P2$.

Plocha m jest Pinakoid oP, plocha M náleží hranolu ∞P Plochy O náleží 12ti-bokému jehlanci, jenž leží v pásmu P, s, o.

Pásmová rovnice upravená pro známky Naumannovy má tvar

$$\frac{1}{a b' c''} + \frac{1}{b c' a''} + \frac{1}{c a' b''} = \frac{1}{a' b c''} + \frac{1}{b' c a''} + \frac{1}{c' a b''},$$

dá se však upotřebiti jen pro takové tři plochy, jejichž úseky padají do těch samých vodorovných dvou os, a nikoliv také do třetí vodorovné osy. V tom případě musí se vytknutá pásmová rovnice upraviti pro ony dvě osy.

Je-li totiž kolmá osa x, vodorovné osy pod úhlem 60° k sobě nakloněné y, z, u; je-li pak úsek v ose $u = n$, v ose $z = n'$, úhel $u.z$ proti n je-li v, a má-li se ustanoviti úsek v ose $y = n''$, jest

$$tang\, v = \frac{n \sin 60^0}{n' - n \cos 60^0},$$

$$tang\, (180^0 - v) = \frac{n'' \sin 60^0}{n' - n'' \cos 60^0}.$$

a tudíž

$$\frac{n}{n' - \frac{n}{2}} = - \frac{n''}{n' - \frac{n''}{2}}$$

anebo

$$n'' = \frac{n n'}{n - n'}.$$

V pásmu P, s, o jest pro

$$\begin{array}{lll} P, & a b c & = 111 \\ s, & a' b' c' & = 221 \\ o, & a'' b'' c'' & = m \frac{n}{n-1} 1, \end{array}$$

z čehož $n = \frac{m}{m-1}$, totiž jehlanec o má známku $m P \frac{m}{m-1}$.

K dalšímu ustanovení jest zapotřebí znáti jednu hranu. Je-li ku př. dáno $M : o = 142^0 25'$ jest $142^0 25' - 90^0 = 52^0 25' = \frac{1}{2} U$, kdežto $\frac{1}{2} U$ znamená úhel (p, l) v trojúhelníku p, k, l, jenž povstane, vedeme-li z vedlejší osy p v rovině hranolu M kolmici na spojkovou hranu (o, M) a pak čáru l z té hrany ke konečnému bodu osy p.

Spojková hrana mezi hranolem M a jehlancem o, jest rovnoběžná s polární hranou 6ti-bokého jehlance P a plocha 12ti-bokého jehlance o otupuje onu spojkovou hranu. Přeneseme-li plochu hranolovou až do středobodu, jest

$$k = \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)}},$$

$$tang\,(p, l) = tang\,\tfrac{1}{2}\,U = \frac{k}{p},$$

nebo kladouce

$$mp = \frac{n\sqrt{3}}{(n+1)}, \quad n = \frac{m}{m-1},$$

jest

$$tang\,\tfrac{1}{2}\,U = \frac{t\,(2m-1)}{\sqrt{(t^2+1)}\,\sqrt{3}},$$

z čehož

$$2m - 1 = \frac{tang\,\tfrac{1}{2}U.\,\sqrt{(t^2+1)}\,\sqrt{3}}{t}.$$

Délka osy t jest v základním jehlanci

$t = tang\,\tfrac{1}{2}S\,\sqrt{3/4}$, kdežto $\tfrac{1}{2}S = 29^0 57'$, pročež $t = 0{\cdot}5$.

Z toho následuje $2m - 1 = 5$ nebo $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$, tedy $o = 3P\frac{3}{2}$. Pro Millerovy známky počítá se ten tvar zrovna jako křemen (58). Dle vzorců uvedených lze pak známky jednoho spůsobu na druhé uvésti.

Známky vyobrazeného Beryllu jsou dle toho

	M	m	P	z	s	o
Dle Naumanna:	$\infty P.$	$o\,P.$	$P.$	$2P.$	$2P2.$	$3P\frac{3}{2}.$
Dle Millera:	$\bar{1}2\bar{1}.$	$111.$	$\left.\begin{matrix}100.\\ 12\bar{2}.\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}5\bar{1}\bar{1}.\\ \bar{1}11.\end{matrix}\right\}$	$\bar{1}2\bar{4}.$	$\bar{1}20.$
Naše:	$\underline{p}_1$	$o.$	$h.(h).$	$(\underline{o}_1).\underline{o}_1$	$\underline{i}_2$	$\underline{d}_2$

II. Tvary dvoustejnoklonné, poloměrné.

A. *Poloměrnost rovnoběžná.*

70. Řada jednoduchých rovnoběžně poloměrných tvarů obsahuje stejnoklony prvořadé, druhořadé a třetiřadé, a konečně Pinakoidy.

Ve spojení dvoustejnoklonném promění se dva a dva takové tvary v postavě vzájemně obrácené ve tvary dvoustejnoklonné, a sice stejnoklony v jehlance prvo-, druho- a třetiřadé; hranoly a Pinakoidy zůstanou nezměněné. Známky jsou jako u plnoměrných.

Příklad spojky dvoustejnoklonné, poloměrně rovnoběžné.

71. *Apatit* z Gotthardu. (obr. 9.) v 2. sešitu.

Vezme-li se dle Naumanna plocha x co plocha základního jehlance P, náleží plocha a druhořadému jehlanci $P2$ a plocha s, kteráž jest s a, x v jednom pásmu, náleží jako u *Beryllů* tvaru $2P2$. Plocha z otupuje polární hrany tvaru $s = 2P2$, tedy jest $z = 2P$; plocha o jest jako u Beryllu $= mP\frac{m}{m-1}$, a jelikož leží v pásmu s, z, o dá pásmová rovnice $o = 3P\frac{3}{2}$.

Plocha c má vodorovné hrany s plochou o, pročež jest $c = \infty P\frac{3}{2}$.

Plocha M náleží k ∞P a plocha e k $\infty P2$.

K ustanovení plochy f jest zapotřebí znáti jednu hranu; je-li dáno $f:e = 160^\circ 54'$, jest $160^\circ 54' - 60^\circ = \frac{1}{2}D = 70^\circ 54'$; $\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}D = 150^\circ$, pročež $\frac{1}{2}H = 79^\circ 6'$ a dle vzorce

$$\frac{n+1}{n-1} = tang\, \tfrac{1}{2}H \sqrt{3},$$

$$n = {}^5/_4, \text{ tudíž } f = \infty P\tfrac{5}{4}.$$

Pro hranol c jest $\frac{1}{2}D = 79^\circ 6$, $\frac{1}{2}H = 70^\circ 54'$, pročež jsou oba hranoly c a f zcela stejné a jen o 30° k sobě otočeny.

Ostatně jest úklon Pinakoidu k ploše základního jehlance $= 139^\circ 47'$, což k delšímu výpočtu slouží.

Pro Millerovy známky dá se tvar ustanoviti pomocí pásmové rovnice.

Známky vyobrazeného Apatitu jsou

	M	e	P	x	z	a	s	o	c	
Dle Naumanna:	∞P.	$\infty P2$.	oP.	P.	$2P$.	$P2$.	$2P2$.	$\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$.	$\frac{\infty P\frac{3}{2}}{2}$.	$\frac{\infty P\frac{5}{4}}{2}$.
Dle Millera:	$\bar{1}2\bar{1}$.	$\bar{1}10$.	111.	$\left.\begin{matrix}100.\\ 12\bar{2}.\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}5\bar{1}\bar{1}.\\ \bar{1}11.\end{matrix}\right\}$	$5\bar{1}2$.	$\bar{1}2\bar{4}$.	$\bar{1}20$.	$\bar{4}\bar{1}5$.	$\bar{2}\bar{1}3$.
Naše:	$\underline{p}_1$.	$\underline{d}_1$	o.	$h.(h)$	$(\underline{o}_1)\underline{o}_1$	$\underline{i}_5$	$\underline{i}_2$	$\underline{d}_2$	$\underline{r}_5$	$\underline{r}_3$

B. *Poloměrnost klonoplochá.*

72. Tvary poloměrně jednoduché, klonoploché jsou různopolárné; spojí-li se tedy dva takové tvary v postavě na vzájem obrácené, objeví se opět plnoměrné tvary jednoduché; totiž stejnoklony, skalenoedry, druhořadé jehlance, prvo-, druhořadé a dvanáctiboké hranoly, jakož i oba Pinakoidy.

Jest to tedy ta samá plnoměrná řada jako na Calcitu.

73. Naumann vycházeje od prvořadého jehlance P, jakožto od základního tvaru, považuje jednoduché stejnoklonné tvary za poloviny naší plnoměrné dvou- stejnoklonné řady. Tudíž vykládá

a) Prvořady jehlanec mP ve dva stejnoklony $\pm\frac{mP}{2}$, jimž dává také zkrácenou známku $\pm mP$.

b) Druhořadé jehlance $mP2$ nerozkládají se.

c) Dvanáctiboké jehlance mPn rozkládají se ve dva skalenoedry $\pm\frac{mPn}{2}$, jimž dává Naumann zkrácenou známku $\pm m'Rn'$, kdežto značí m' koefficient hlavní osy stejnoklonu do pobočných hran skalenoedru vepsaného, vezme-li se hlavní osa prvotvaru $=1$; n' značí koefficient hlavní osy skalenoedru, totiž činitel, jimž se m' násobí, aby se obdržela délka hlavní osy skalenoedru.

Převedení známek $\pm\frac{mPn}{2}$ v $\pm m'Rn'$ děje se takto.

Vezme-li se vedlejší osa r čili průměr šestiúhelníka v průmětu prvořadého jehlance P jakožto $=1$, jest an tupější hrana D polární jak u skalenoedru tak u 12ti-bokého jehlance stejnou má polohu a meziosa $p=\frac{n\sqrt{3}}{n+1}$, pro 12ti-boký jehlanec mPn

$$\cot(d, t) = \frac{mt}{p} = \frac{mt(n+1)}{n\sqrt{3}};$$

pro skalenoeder $m'Rn'$

$$\cot(d, t) = \frac{m't(3n'+1)}{2\sqrt{3}},$$

tedy

$$\frac{m(n+n)}{n} = \frac{m'(3n'+1)}{2},$$

a jelikož $m = m'n'$ jest konečně

$$m' = \frac{m(2-n)}{n}, \quad n' = \frac{n}{2-n},$$

tedy

$$mPn = \frac{m(2-n)}{n} R \frac{n}{2-n}, \quad \text{nebo} \quad m'Rn' = m'n' P \frac{2n'}{n'+1}.$$

Uvedou-li se tyto výrazy do redukcí Naumannových známek na známky Millerovy, jest pro

$$+m'Rn' = abc, \quad a = 2 + 3m'n' + m'$$
$$b = 2(1 - m')$$
$$c = 2 - 3m'n' + m';$$

$$-m'Rn' = abc, \quad a = 2 + 3m'n' - m'$$
$$b = 2(1 + m')$$
$$c = 2 - 3m'n' - m'.$$

Známky hranolu ∞Pn a $\infty P2$ Naumann nepřevádí. Místo ∞P píše také ∞R a místo oP také oR.

C. *Poloměrnost pravo-levá.*

74. Jednoduché tvary řady pravo-levé jsou: Plagiedry, trojboké jehlance, stejnoklony, trojboký hranol, prvořadý hranol a souměrně šestiboké hranoly, jakož i oba Pinakoidy.

Spojením stejných dvou takových tvarů v obrácené postavě vyvinou se

a) z jednoduchých Plagiedrů Diplagiedry, totiž tvary obmezeny jak u hořejšího tak u dolejšího polu 12. trapezy, kteréž se stýkají v 24 stejných hranách polárních a ve 12 hranách pobočných, střídavě delších a kratších a v oklice postupujících;

b) z trojbokých jehlanců vyvinou se druhořadé jehlance šestiboké;

c) z trojbokých hranolů druhořadé hranoly šestiboké;

d) ze souměrně šestibokých hranolů dvanáctiboké hranoly;

e) ze stejnoklonů prvořadé jehlance, kdežto prvořadý hranol a Pinakoidy zůstavají nezměněné.

Spojka ploch toho spůsobu není posud na vyhráněných hmotách známa.

Kdyby se křemen tak vyhraňoval, měl by u každého pobočného rohu dvoustejnoklonu jednu plochu Plagiedru, kdežto ji má jen u střídavých rohů.

III. Tvary čtvrtiměrné.

75. Spojením dvou čtvrtiměrných tvarů povstanou opět poloměrné tvary pravo-levé.

Jelikož křemen málokdy se vyskytuje co tvar různopolární (hemimorfický), jak to jednoduchá čtvrtiměrnost jeho žádá, nýbrž položení ploch jeho ukazuje na dva čtvrtiměrné tvary na vzájem k sobě obrácené, *náleží* tedy *křemen* vlastně *do řady dvoustejnoklonné čtvrtiměrné*, nechceme-li tvary jeho považovati raději za srostlice.

— Srostlice v soustavě stejnoklonné jsou velmi rozmanité. Vyskytují se dle ploch h, o, $\underline{o}_1$, $o_{1/2}$, $\underline{o}_{1/2}$ atd. O nich bude se jednati příležitě na jiném místě.

Počátkové arithmografie.

(Píše prof. *Josef Šolín.*)

(Pokračování.)

Kromě spirály exponencialné může se užívati ku grafickému odmocňování také jiných křivek, jako na př. *logistiky*, kteráž má v soustavě Cartesiově obdobný význam jako spirála exponencialná v soustavě polárné.

Schlesinger *) poroučí k témuž účelu čáry, jimž náleží v polárné soustavě rovnice

$$u = a \sec^k v .$$

Za $k = 1$ obdržíme přímku Γ_1 kolmou k ose X (obr. 8.) a mající od počátku o soustavy vzdálenost $\overline{oa} = a$; za $k = 0$ kružnici Γ_0 opsanou z bodu o poloměrem a; za $k = -1$ kružnici Γ' mající úsečku $\overline{oa}$ za průměr.

* Potenzcurven. Zeitschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1866.