František Machovec

Příspěvek ku zobrazování křivek intensitních pravoúhlé a kosoúhlé plochy šroubové

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 13 (1884), No. 2, 111--117

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123168

# Příspěvek ku zobrazování křivek intensitních pravoúhlé a kosoúhlé plochy šroubové.

Sepsal **F. Machovec.**

Jak známo, odchylují se roviny tečné plochy v jednotlivých bodech její jedné křivky intensitní o určitý stálý úhel od jistého směru $S$*).

Je-li plocha ta plochou mimosměrek, prochází každá její rovina tečná povrchovou přímkou, na které jest bod dotyku. Jmenujeme-li bod tento $c$, rovinu tečnou plochy v tomto bodě **C**, bod centrálný na přímce povrchové ku $c$ příslušné $o$ a rovinu centralnou **O**, jmenujeme-li dále parametr oné přímky $k$, tu jak známo platí rovnice

$$oc = k \,.\, tang\, \widehat{\mathbf{OC}} \quad \text{čili} \quad \varrho = k\, tang\, \varphi.$$

Na základě této rovnice lze zobrazovati body křivek intensitních libovolné plochy mimosměrek. K tomu cíli nutno jen pro každou přímku povrchovou vyhledati bod centrálný čili zobraziti křivku strikční té plochy, vyšetřiti pro každou přímku povrchovou parametr $k$ a určiti odchylku roviny tečné, která se směrem $S$ určitý úhel svírá, od příslušné roviny centrálné, načež z vytčené rovnice vyplývá $\varrho$, jakožto vzdálenosť bodu křivky intensitní, který jest na určité přímce povrchové od příslušného bodu centrálného.

Při pravoúhlé i kosoúhlé ploše šroubové jsou jich osy křivkami strikčními a parametr $k$ má pro všecky přímky povrchové hodnotu stejnou $= \frac{v}{2\pi}$, značí-li $v$ výšku jednoho závitu.

## *a)* Křivky intensitní pravoúhlé plochy šroubové (P).

1. *Křivka intensity* 0. — Roviny tečné plochy **P** v bodech této křivky jsou $\parallel S$. Abychom odchylky $\varphi$ rovin určených jednotlivými přímkami plochy **P** a $\parallel$ se směrem $S$ od příslušných rovin centrálných snadno ustanovili, počínejme si takto:

Mějme na mysli nejprvé jednu z těch přímek povrchových plochy **P**, které jsou v rovině určené osou $O$ plochy **P** a směrem

*) Při osvětlení rovnoběžném.

$S$. Jmenujme přímku tu $A$. Rovinu $(A, O)$ zvolme za průmětnu druhou a rovinu na ní kolmou, obsahující přímku $A$ za průmětnu první. Pro tuto přímku jest $\varphi = 0$ a tedy i $\varrho = 0$. Každou jinou přímku povrchovou $P$ procházejí dvě roviny: rovina $\parallel S$ a rovina centrálná obsahující osu $O$. První jest určena přímkou $P$ a přímkou $S' \parallel S$, procházející bodem $(P, O)$, t. j. bodem centrálným. Mysleme si nyní přímky $P$ a $S'$ i s vytčenými rovinami převedené šroubovitým pohybem do takové polohy, že $P$ sjednotí se s $A$ a že rovina centrálná příslušná ku $S$ splyne s rovinou centralnou, příslušnou ku $A$ (s II. prům.)

Přímka $S'$ dostane se tím do takové polohy $(S')$, že její první obraz $(S')_1$ jest s $P_1$ souměrně položen naproti $A_{12}$ (obr. 2.). Zvolíme-li rovinu průmětnou třetí $\perp$ na $A$, svírá třetí obraz přímky $(S')$ s třetím obrazem osy $O$ úhel rovný odchylce $\varphi$. Je-li potom $o_3 s_3 = k$, jest $s_3 b_3 = k \, tang \, \varphi = \varrho$ a jest jen délku tuto přenésti na $P_1$ od $o_1$ v náležitém směru, abychom obdrželi $c_1$, jakožto bod prvního obrazu křivky intensity $0$ $(J^{(o)})$.

Jest patrno, že všecky přímky $(S')$ tvoří plochu kuželovou otáčení $\mathbf{S}$, jejíž osou jest přímka $O$ a jejímž středem jest bod $o$. Sestrojíme-li tedy třetí obrazy jednotlivých její povrchových přímek a učiníme-li čáru $K_3 \perp O_3$ ve vzdálenosti $k$ od $o_3$, udávají úseky na této kolmici, obsažené mezi $O_3$ a třetími obrazy oněch povrchových přímek, délky $\varrho$, které jest jen přenésti na příslušné $P_1$, abychom dostali obrazy bodů křivky $J_1^{(o)}$.

Budiž hned podotčeno, že $K_3$ lze pokládati za třetí obraz kružnice $K$ plochy $\mathbf{S}$.

Z provedené konstrukce však vyplývá, že

$$\varrho = s_3 b_3 = o_1 b_1'' = o_1 c_1,$$

a z toho zase, že

$$\triangle o_1 c_1 d_1 \cong \triangle o_1 b_1'' b_1',$$

tudíž jest

$$\sphericalangle d_1 c_1 o_1 = 90^\circ,$$

t. j.: Všecky body $c_1$ jsou na kružnici, jejímž průměrem jest $o_1 d_1 = k \,.\, tang \, \alpha$, značí-li $\alpha$ úhel, o který se směr paprsků odchyluje od osy $O$. *Prvním obrazem křivky intensity* 0 *jest tudíž pro vytčenou polohu první roviny průmětné kružnice.*

2. *Křivka libovolné intensity* $\varepsilon$ $(J^{(\varepsilon)})$. Body její obdržíme, jakožto body dotyčné rovin tečných, které se o úhel $\varepsilon$ odchylují

od $S$. Myslíme-li si každou takovou rovinu zároveň s $P$ a příslušnou rovinou centralnou jako prvé šroubovitým pohybem převedenou do nové, dříve vytčené polohy, procházejí všecky ty nové polohy rovin přímkou $A$ a svírají s příslušnými ku $P$ přímkami povrchovými plochy kuželové **S** úhly $\varepsilon$ a úhly, které sevřeny jsou těmito novými polohami rovin tečných a rovinou centralnou, příslušnou ku přímce $A$, t. j. úhly $\varphi$, jeví se ve třetím obraze, jakožto úhly sevřené třetími obrazy třetích stop těch rovin s $O_3$ (obr. 2.).

Abychom tedy obdrželi průvodiče $\varrho$, příslušné k bodům křivky $(J^{(\varepsilon)})$, dostačí, mysliti si dle přímky $A$ roviny, které svírají s přímkami povrchovými plochy **S** úhly $\varepsilon$ a vyhledati třetí obrazy jich třetích stop. Tyto třetí obrazy obdržíme však snadno takto: Bod $b$, v němž přímka $(S')$ plochy **S** protíná kružnici $K$, pokládejme za střed plochy kulové takového poloměru, aby roviny tečné té plochy kulové, procházející bodem $o$, svíraly s $(S')$ úhly $\varepsilon$. Třetí obraz té plochy kulové má za konturu kružnici $M_3$, jejíž poloměr roven jest poloměru té plochy kulové a jejímž středem jest $b_3$. Tečny z $o_3$ na $M_3$ sestrojené jsou žádanými třetími obrazy třetích stop a $\measuredangle\, e_1 o_3 s_3$ roveň jest tudíž $\varphi$ a $s_3 e_1 = \varrho$, tak že učiníme-li $o_1 f_1 = s_3 e_1$, obdržíme v $f_1$ obraz jednoho bodu křivky $J_1^{(\varepsilon)}$. Tak se to provede pro každou jinou přímku povrchovou $P$.

Z této konstrukce lze snadno odvoditi jiné.

I. Jest patrno, že lze vystačiti s jedinou kružnicí $M_3$ pro určitou křivku $J^{(\varepsilon)}$ a sice kružnicí téhož poloměru jako $M_3$, opsanou z $o_3$. Jak se potom celá konstrukce změní snadno lze poznati.

II. Snadno jest odvoditi také tuto konstrukci křivky $J_1^{(\varepsilon)}$: Bod na libovolné přímce $P_1$ obdržíme, opíšíce z bodu $c_1$, v němž $P_1$ protíná $J_1^{(o)}$, kružnici shodnou s $M_3$, v $o_1$ vztyčíce na $P_1$ kolmici a učiníce ji rovnou $k$, načež se z konce této kolmice sestrojí tečny na onu kružnici. Ty protínají $P_1$ v bodech křivky $J_1^{(\varepsilon)}$.

*Zobrazení tečny křivky* $J_1^{(\varepsilon)}$ *v jejím libovolném bodě* $f_1$. — Konstruktivným čarám směřujícím ku zobrazení $f_1$ lze přiložiti tento význam:

$H_1 \equiv K_3$ pokládejme za první obraz orth. průmětu přímky $H$, jejímž stopníkem jest $(h_1)$. Přímka $H$ jest osou plochy válcové, na níž jsou kružnice $N$, mající své první obrazy v $N_1 \equiv M_3$. Tato plocha válcová jest s přímkou $O$ a průmětnou první řídícím útvarem plochy mimosměrek, která protíná rovinu promítající přímky $H$ ve křivce $Z$, jejíž body mají své první obrazy v $e_1$. Křivka průmětny třetí, shodná s křivkou $Z$, jest meridianem plochy otáčení, jejíž osou jest přímka $O$. Rovina určena přímkou $H$ a přímkou $A$ protíná promítající plochu válcovou kružnice $K$ v ellipse a ellipsa s ní naproti druhé průmětně souměrně položená jest s přímkou $O$ a průmětnou první řídícím útvarem plochy mimosměrek $\mathbf{V}$, která má s onou plochou otáčení společnou křivku, jejímž prvním obrazem jest $J_1^{(\varepsilon)}$. Z toho vychází na jevo tato konstrukce tečny: $g_1$ $(g_1) \| h_1$ $(h_1)$, i jest potom $o_1$ $(g_1)$ stopnicí hyperb. paraboloidu, který se dotýká plochy $\mathbf{V}$ a $(e_1)$ stopníkem tečny křivky $Z$ v bodě $e$. Učiníme-li dále $f_1$ $(f_1) \equiv e_1$ $(e_1)$ a $(f_1) v_1 \perp f_1 o_1$, jest tato kolmice stopnicí roviny tečné oné plochy otáčení v bodě $f$; je-li dále $f_1$ $(f_1) \perp o_1 f_1$ a $[f_1] v_1 \| P_1$, jest $[f_1]$ $v_1$ stopnicí roviny tečné plochy $\mathbf{V}$ v bodě $f_1$. Tudiž jest $f_1 v_1$ obrazem žádané tečny.*)

## *b*) **Křivky intensitní kosoúhlé plochy šroubové (P).**

1. *Křivka intensity* 0 $(J^{(o)})$. — Za rovinu průmětnou druhou zvolme rovinu určenou osou $O$ plochy $\mathbf{P}$ a směrem $S$. Jednu ze přímek povrchových, která jest v té rovině, označme $A$ a bod jí a ose $O$ společný $o$. Průmětna první nechť prochází tímto bodem a jest na $O$ kolma. (Obr. 3.).

Provedeme-li s každou přímkou povrchovou $(P)$ plochy $\mathbf{P}$ i s rovinou centralnou jí příslušnou a rovinou $(P, S')$ totéž co ve případě *a*), splynou nové polohy přímek $P$ s přímkou $A$ a přímky $(S')$ budou přímkami povrchovými plochy kuželové $\mathbf{S}$, jejíž osou jest přímka $O$ a středem bod $o$. Zvolíme-li třetí průmětnu $\mathbf{R}_0 \perp A$. jeví se ve třetím obraze úhly $\varphi$, jakožto úhly sevřené čarami $O_3$ a $(S_3')$.**) — Učiníme-li $o_3 s_3 = k \sin \beta$,

*) Viz můj spis: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.

**) V obraze 3. jest třetí průmětna $\mathbf{R}$ sdružena s první.

kdež $\beta = \widehat{PO}$ a dále $E_3 \perp O_3$, jest $s_3 b_3 = \varrho \sin \beta$ a učiníme-li $o_1 c_1 = s_3 b_3$, jest tečka $c_1$ obrazem bodu křivky $J^{(o)}$. — Táž konstrukce provede se pro každou jinou přímku $P$ a jest patrno, že se liší od konstrukce v *a*) provedené jen tím, že třetím obrazem kružnice $K$ jest ellipsa. —

Zajímavá vlastnosť křivky $J_1^{(o)}$ vychází na jevo z této úvahy:

Čáru $E_3$ lze pokládati za obraz třetího průmětu jisté kuželosečky plochy **S**. Druhý její obraz jest v čáře $E_2 \perp \mathbf{R}_2$ a první její obraz a tudíž křivka sama jest ellipsou, parabolou neb hyperbolou podle toho, je-li $\widehat{AO} > \widehat{SO}$, $\widehat{AO} = \widehat{SO}$, $\widehat{AO} < \widehat{SO}$. — Z provedených konstrukcí, směřujících k sestrojení $J_1^{(o)}$, vyplývá však, že $o_1 c_1 = s_3 b_3 = o_1 b_1''$, při čemž $b_1' b_1'' \perp o_1 b_1''$ a poněvadž $o_1$ jest ohniskem křivky $E_1$, jest zřejmý tento zákon výtvarný křivky $J_1^{(o)}$.

*Jest dána křivka stupně druhého* ($E_1$). *Na průvodič každého jejího bodu* ($b_1'$) *nanesena jest od ohniska vzdálenosť onoho bodu od hlavní osy. Krajní body těch délek jsou na křivce* $J_1^{(o)}$.

Při pravoúhlé ploše šroubové jest $E_1$ kružnicí středu $o_1$ a týž zákon výtvarný poskytne v tomto případě za $J_1^{(o)}$ kružnici.

Ze zákona výtvarného křivky $J_1^{(o)}$, právě vytčeného, lze odvoditi jiné konstrukce jejího obrazu, které jsou obsaženy v de la Gournerie-ově „Traité de géométrie descriptive“ a v Burmestrově „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen.“

Jest totiž patrno, že ku zobrazení křivky $J_1^{(o)}$ není potřebí zobraziti křivku $E_1$, nýbrž že dostačí, je-li tato křivka náležitě určena. Volme za určovací částky křivky té ohnisko ($o_1$), parametr $= 2 o_1 a_1$ a přímku řídící $R$ (obr. 4, ukazovatelé 1 jsou v něm vynechány). Vytkneme-li ohniskem $O$ libovolný paprsek $om$, tu jde patrně o to, ustanoviti vzdálenosť průsečníku toho paprsku s $E_1$ od hlavní osy této křivky, t. j. od $or$. Opíšeme-li z $o_1$ dvě kružnice $D$ a $C$, z nichž jedna má poloměr rovný poloparametru kuželosečky a druhá se $R$ dotýká a určíme-li $mn = ro$, jest přímka $on$ geometrickým místem bodů, pro něž poměr $om : mn = e =$ numerické výstřednosti křivky $E_1$. Z toho však jde, že $r'p$ jest žádanou vzdáleností, kterou přenésti jest na $om$, abychom dostali bod $c$ náležející křivce $J_1^{(o)}$. Z provedené konstrukce však vyplývá, že jest $rm \#\, on$ a $ob'' \#\, r'p$, tak že celá konstrukce redukuje se na tuto: *Bod m spojiti jest s r a délku ob'' přenésti na om.* Konstrukce tato obsažena jest v deskriptivní geometrii de la Gournerie-ově, jen že jest tam počato kružnicí $L$.

Z této konstrukce vychází na jevo jiná těmito úvahami:

Přímka $ac$ protíná kružnici $C$ v bodě $u$, který určuje s bodem $o$ přímku $ou$. Jest zřejmo, že $\triangle aou \cong \triangle mor$ a tudíž i $\triangle aco \cong \triangle ob''m$, z čehož vyplývá, že $oc \perp ou$ a tudíž jest patrna tato konstrukce křivky $J_1^{(o)}$: *Bodem a vytčen budiž libovolný paprsek; bod u společný tomuto paprsku a kružnici C určuje s bodem o přímku, kolmice na tuto přímku v o vztyčená má s oním paprskem společný bod, který náleží křivce* $J_1^{(o)}$. Konstrukce tato obsažena jest v obou dříve vytčených dílech.

Je-li křivka $E_1$ parabolou, splynou v jednu kružnice $C$ a $D$ (obr. 5.) a přímka $au$ prochází bodem $y$, v němž osa paraboly protíná kružnici $L$. Učiníme-li $\triangle ax \parallel ro$, jest $\triangle acx \sim \triangle cyo$ a tudíž $xc = xa$, z čehož vyplývá tento zákon výtvarný křivky $J_1^{(o)}$ v tomto zvláštním případě: *Jsou dány dvě přímky na sobě kolmé; libovolný bod jedné z nich* ($o_1$) *jest středem svazku paprsků, jichž průsečníky s druhou vytčenou přímkou jsou středy kružnic procházejících bodem daným přímkám společným. Body společné každé té kružnice s paprskem jí příslušným jsou na křivce* $J_1^{(o)}$. — Křivka $J_1^{(o)}$ jmenuje se v tomto zvláštním případě strofoidou.

*Zobrazení tečny křivky* $J_1^{(o)}$ *v libovolném jejím bodě.* — Z každého zákona výtvarného, jež právě byly vytčeny, lze odvoditi konstrukci tečny. Volím k tomu cíli odvození křivky $J_1^{(o)}$ z $E_1$. (Obr. 3.).

Pokládejme $E_1$ za obraz jakékoliv křivky prostorové $E$. Tečna její v bodě $b'$ mějž stopník v $(b'_1)$. Z každého bodu $b'$ křivky $E$ sestrojena jest kolmice na rovinu, která procházejíc přímkou $o_1 a_1$, jest kolma na první průmětně. Paty $b''$ těch kolmic jsou na jisté křivce, která jest meridianem plochy otáčení, jejíž osou jest přímka $O$.

Tato plocha má s plochou mimosměrek určenou křivkou $E$, přímkou $O$ a průmětnou první společnou křivku, jejímž prvním obrazem jest $J_1^{(o)}$. Učiníme-li $c_1(c_1) \parallel b'_1(b'_1)$ a $(c_1)t_1 \parallel P_1$, obdržíme stopnici roviny oné tečné plochy mimosměrek v bodě $c$ a učiníme-li dále $o_1[c_1] = o_1(b'_1)$ a $[c_1]t_1 \perp P_1$, jest $[c_1]t_1$ stopnicí roviny tečné oné plochy otáčení a tudíž jest $c_1 t_1$ obrazem žádané tečny.

Při strofoidě dostačí učiniti (obr. 5.) $cd \perp oc$, $de \parallel cd$, načež jest $ec$ tečnou strofoidy v bodě $c$.

*Křivka libovolné intensity* $\varepsilon$ $(J^{(\varepsilon)})$. — Celý výklad zůstane jako u křivky $J^{(\varepsilon)}$ v $a$), jen že kružnice $M_3$ má své středy na ellipse $K_3$ a délky $\varrho \sin \beta$ měří se na přímé čáře $E_3$. 1 tečna křivky $J_1^{(\varepsilon)}$ zobrazí se na základě těchže úvah jako v $a$), jen že místo plochy válcové, jejímž tvořícím útvarem byly v $a$) kružnice $N$, nastoupí plocha posouvání, jejíž řídící křivkou jest libovolná křivka prostorová $H$, která má svůj orthogonalný průmět první zobrazený v $H_1 \equiv K_3$. Stopník každé tečny křivky $H$ nejlépe zvoliti jest na $O_3$. Ostatní změny souvisí úzce se změnou touto a jsou patrny z obrazce 3., kdež celá tato konstrukce jest provedena a kdež užito jest téhož označení jako v $a$) *).

---

# O Queteletově focale kruhového válce.

Napsal **Václ. Tluchoř.**

Dány jsou dvě přímky $OX$ a $OY$ na sobě kolmé a na přímce $OX$ bod $S$ ve vzdálenosti $a = 1$ od bodu $O$. Vytkneme-li bodem $S$ libovolný paprsek $SQ$ a učiníme-li $QP = P'Q = OQ$ (obr. 6.) jsou body $P$ a $P'$ na křivce, která slove strofoida.

Rovnice její v soustavě $XOY$ jest

$$x^2(x+1) + y^2(x-1) = 0.$$

Z této rovnice vyplývá, že přímka $AA' \parallel OY$ ve vzdálenosti $OA = SO = 1$ jest asymptotou křivky té.

---

*) Úryvky z tohoto pojednání byly předneseny v listopadu roku 1882 v „Jednotě českých mathematiků“. — Zobrazení tečen ve případech $a$) i $b$) lze též provésti na základě theoremu Dupinova.