František Josef Studnička
Příspěvek k dějinám veličin soujemných. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 49--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123162

Příspěvek k dějinám veličin soujemných.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Co jest číslo? Krátká to zajisté otázka; a přec dlouho se mnohý rozmýšlí, nežli dá odpověď. Což divu, že otázka, co jest číslo soujemné, ještě větší spůsobuje nesnáze chtějícím k ní jasně odpověditi.

Jakož známo, dosáhla tak zvaná čísla *negativní* teprva přičiněním Harriotovým (1631) domovského práva v arithmetice, kdežto čísla *soujemná* dosud se ho domáhají v kruzích širších, ač od počátku století tohoto již ho požívají v užším kruhu výhradně mathematickém. Příčina této nepopulárnosti veličin *imaginárních*, kteráž ve spojení s čísly reálnými představují *Gaussem* tak zvané veličiny soujemné čili *komplexní*, vězí zajisté jen v jich původu ryze theoretickém, takže každý výklad k objasnění tohoto původu se táhnoucí velmi dobře slouží k obecnějšímu jich uznání.

Ačkoli by nebylo nezajímavým vypsání dějin pojmu mathematické imaginárnosti, kterouž *Cardano* (1545) nazývá sofistickou *) a *Wallis* poprvé (1673) pojímá geometricky, musíme se mu předc na tomto místě vyhnouti, a majíce na zřeteli jen objasnění jednoho druhu, přímo k tomuto se obrátiti. Jednáť se nám tu jen o vyšetření poměru jeho k algebraickým kongruencím, majícím za modul výraz x^2+1, poměr to, kterýž *Cauchy* (1847) vytknul **) a nejnověji *Teixeira* (1883) blíže

*) Praví při řešení rovnic kvadratických $x^2+b=2ax$: „Si detractio ipsa a^2-b fieri nequit, quaestio ipsa est falsa, nec esse potest, quod proponitur" a jest mu na př. $5 \pm \sqrt{-15}$ „solutio vere *sophistica*," ba řešení $-1-\sqrt{-1}$ „omnino *falsum*!"

**) Ve svém sborníku „Exercices d'analyse et de phys. mathém." T. IV. pag. 87, kdež umístěno jest jeho pojednání „Mém. sur la théorie des équivalences algébriques, substituée à la théorie des imaginaires."

ještě odůvodnil, *) jakož v následujících řádcích jest vyloženo.

I.

Jako slují dvě čísla a, b *shodnými* čili *kongruentními*, poskytují-li, dělena byvše číslem c, týže zbytek γ, takže bychom je nazývati mohli čísly *stejnozbytkovými*, podobně možná jmenovati dva polynomy

$$\varphi(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \tag{1}$$

$$\psi(x) \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n, \tag{2}$$

shodnými, objeví-li se u obou týže zbytek, dělíme-li je polynomem

$$\chi(x) \equiv c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k, \tag{3}$$

kdež platí o nejvyšších mocnitelích podmínka

$$m > k, \quad n > k.$$

Vyjádříme-li tuto vlastnost čísel podlé *Gausse* symbolem

$$a \equiv b \ (mod\ c),$$

kdež dělitel c tedy jmenuje se *modulem* čili *mírou* čísel a, b, aneb užijeme-li označení

$$Z\left(\frac{a}{c}\right) = Z\left(\frac{b}{c}\right),$$

kdež čtenou Z značí se *zbytek*, povstávající při dělení čísla a nebo b číslem c, představujeme si, že platí **)

$$a = kc + \gamma, \quad \gamma < c,$$

$$b = lc + \gamma,$$

značí-li k a l čísla celistvá; a podobně můžeme tedy psáti buď

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad [mod\ \chi(x)] \tag{4}$$

anebo spůsobem druhým

$$Z\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = Z\frac{\psi(x)}{\chi(x)},$$

čímž označena jest *algebraická* tato shoda stejným spůsobem jako předcházející shoda *arithmetická*. Aby konečně ještě případněji označil tuto vlastnost, užívá *Cauchy* místo čárek $\equiv$,

---

*) V pojednání laskavě mi zaslaném „Sur la théoris des imaginaires." Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles 7e année, pag. 417.

**) Viz *Studnička* „Základové nauky o číslech" pag. 60. a pag. 131., kdež se další výklady shledávají.

značících též *totožnost* neb *identičnost* dvou výrazů, znaku $\equiv$ a místo mnohoznačného slova *modul* známějšího výrazu *dělitel* čili *divisor*, takže píše

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad [div\, \chi(x)], \tag{5}$$

což pak jmenuje algebraickou *ekvivalencí* čili *rovnoměrností.*

Z tohoto výměru plyne pak, že při stejném děliteli $\chi(x)$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \equiv \Sigma \psi_k(x), \quad [div\, \chi(x)], \tag{6}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \equiv \Pi \psi_k(x), \quad \text{,,} \tag{7}$$

vyhovují-li tyto funkce podmínce

$$\varphi_k(x) \equiv \psi_k(x), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

a ze vzorce (7) plyne konečně pro

$$\varphi_k(x) = \varphi(x),$$
$$\psi_k(x) = \psi(x),$$

jelikož pak součin přejde v mocninu,

$$[\varphi(x)]^n \equiv [\psi(x)]^n, \quad [div\, \chi(x)]. \tag{8}$$

Poněvadž ze vzorce (5) se poznává, že rozdíl obou funkcí

$$\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$$

jest dělitelný výrazem $\chi(x)$, takže

$$Z\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\chi(x)} = 0,$$

můžeme rozdíl tuto se vyskytující sloučiti v jediný polynom podlé mocnin veličiny x spořádaný, načež obdržíme místo (5) jinou ekvivalenci algebraickou *), totiž

$$f(x) \equiv 0, \quad [div\, \chi(x)]. \tag{9}$$

Poněvadž dělitel tu jest podlé podmínky (3) stupně k-tého, může býti zbytek nanejvýš stupně $(k-1)$ho, tedy míti tvar

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_{k-1} x^{k-1};$$

možná tedy ekvivalenci (9) nahraditi podmínkou

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + , \ldots + \gamma_{k-1} x^{k-1} = 0, \tag{10}$$

z níž plyne všeobecně

$$\gamma_h = 0, \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, k-1), \tag{11}$$

---

*) Že zavedl Cauchy slovo „ekvivalenci“ místo „kongruence“, má vedlé důvodu podstatného i vedlejší ten, že adjektivum francouzské „congru“ není tak pohodlné jako „équivalent“.

jelikož veličina x jest libovolnou. Kdyby tedy dělitel byl na př. rozměru druhého, bude levá strana výrazu (10) linearní a počet podmínek (11) zredukuje se na 2.

Majíce okolnosti tyto na zřeteli, zvolme za dělitele

$$\chi(x) \equiv x^n - 1,$$

kterýžto binom zajisté obsažen jest v binomu podobném

$$f(x) \equiv x^{mn} - 1,$$

kdež m značí celistvé číslo jaké koli; jestiť

$$\frac{x^{mn}-1}{x^n-1} = \sum_{k=0}^{m-1} x^{nk}.$$

I bude tedy podlé vzorce (9)

$$x^{mn} - 1 \veeeq 0, \quad [div\,(x^n - 1)], \tag{12}$$

což vyjádřiti možná též ekvivalencí

$$x^{mn} \veeeq 1, \tag{13}$$

z níž plyne pouhým násobením všeobecnější

$$x^{mn+k} \veeeq x^k. \tag{14}$$

Zavedeme-li pak do této ekvivalence, kde dělitele vzorcem (12) vytknutého sluší v duchu připojiti, za k postupně

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,$$

obdržíme řadu ekvivalencí

$$\left.\begin{aligned} x^{mn+1} &\veeeq x, \\ x^{mn+2} &\veeeq x^2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^{mn+n-1} &\veeeq x^{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

z čehož patrno, že v polynomu, obsahujícím členy s mocninami strany levé, klásti možná členy s mocninami strany pravé.

Poněvadž ze vzorce (14) též plyne

$$a_{mn+k}\, x^{mn+k} \veeeq a_{mn+k}\, x^k, \tag{16}$$

můžeme pro polynom stupně $(mn-1)$ního, totiž

$$\begin{aligned} F(x) = a_0 &+ a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\ &+ a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1} \\ &+ a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots + a_{3n-1} x^{3n-1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn-1} x^{mn-1}, \end{aligned} \tag{17}$$

užívajíce pro členy řádku druhého, třetího, ..., vzorce (16), zjednati si ekvivalenci jednodušší

$$\begin{aligned}F(x) \equiv\; & a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\ & + a_n + a_{n+1} x + \ldots + a_{2n-1} x^{n-1} \\ & + a_{2n} + a_{2n+1} x + \ldots + a_{3n-1} x^{n-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots + a_{mn-1} x^{n-1},\end{aligned}$$

anebo spořádáme-li pravou stranu podlé mocnin veličiny x,

$$\left.\begin{aligned}F(x) \equiv\; & (a_0 + a_n + a_{2n} + \ldots) \\ & + (a_1 + a_{n+1} + a_{2n+1} + \ldots)\, x \\ & + (a_2 + a_{n+2} + a_{2n+2} + \ldots)\, x^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-1} + a_{2n-1} + a_{3n-1} + \ldots)\, x^{n-1}\end{aligned}\right\} (div\, x^n - 1). \qquad (18)$$

Z tohoto výsledku poznáváme, majíce na zřeteli vzorec (10), zbytek při dělení funkce $f(x)$ vytknutým dělitelem povstávající.

Podobný obdrží se výsledek, jest-li ve zvláštním případě

$$\chi(x) \equiv x^n + 1.$$

Poněvadž tento binom obsažen jest v podobném binomu

$$f(x) \equiv x^{mn} - (-1)^m,$$

pokud jest m celistvé, a tedy pro *liché* m platí

$$x^{mn} + 1 \equiv 0, \quad [div\, (x^n + 1)],$$

což nahraditi možná výrazem

$$x^{mn} \equiv -1,$$

obdržíme obdobu vzorce (14)

$$x^{mn+k} \equiv -x^k; \qquad (19)$$

pro *sudé* m pak bude podobně

$$x^{mn} - 1 \equiv 0, \quad [div\, (x^n + 1)],$$

což souhlasí s ekvivalencí

$$x^{mn} \equiv 1,$$

z níž plyne všeobecně

$$x^{mn+k} \equiv x^k. \qquad (20)$$

V tomto případě platí pro polynom (17), rozlišíme-li sudá a lichá multipla mocnitele n, tedy členy mající

$$x^n,\; x^{3n},\; x^{5n}, \ldots,$$

kdež platí vzorec (19), a členy

$$x^{2n},\; x^{4n},\; x^{6n}, \ldots,$$

kdež platí vzorec (20), místo ekvivalence (18) jiná a sice

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \leftrightharpoons (a_0 - a^n + a_{2n} - \ldots) \\ + (a_1 - a_{n+1} + a_{2n+1} - \ldots)\, x \\ + (a_2 - a_{n+2} + a_{2n+2} - \ldots)\, x^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (a_{n-1} - a_{2n-1} + a_{3n-1} - \ldots)\, x^{n-1} \end{array}\right\} div\,(x^n + 1). \quad (21)$$

Jako ze vzorce (18) se poznává zbytek, dělením polynomu $F(x)$ binomem $x^n - 1$ povstávající, podobně obsahuje vzorec (21) zbytek, je-li dělitelem téhož polynomu $x^n + 1$.

II.

Vyloživ takto některé všeobecné vlastnosti, týkající se algebraických ekvivalencí vůbec a dělitele $x^n \pm 1$ zvlášť, přechází pak *Cauchy* ku případu jednoduchému, kdež

$$n = 2, \quad x = i,$$

takže dělitelem jest $i^2 + 1$, načež nazývá ekvivalenci tuto rovnicí *imaginární* (équation imaginaire) a znakem $\simeq$ ji od ostatních ekvivalencí rozlišuje.

Jak patrno, jest tu i veličinou algebraickou jako bylo dříve x, a jakož poznáme, chová se tato veličina jako známá jednotka imaginarní, takže klásti možná konečně

$$i \equiv \sqrt{-1}.$$

Především může se dle dřívějších ekvivalencí psáti přímo

$$i^{2m} \simeq (-1)^m, \quad [div\,(i^2 + 1)], \qquad (22)$$

kdež značí m libovolné číslo celistvé; a z toho plyne pak

$$i^{2m+1} \simeq (-1)^m\, i, \quad [div\,(i^2 + 1)]. \qquad (23)$$

Dosadíme-li pak do vzorce (22) za m řadu čísel sudých, obdržíme

$$i^{4m} \simeq 1, \quad i^{4m+2} \simeq -1, \quad i^{4m+4} \simeq 1, \ldots$$

a všeobecně tedy

$$i^{4k} \simeq 1, \quad [div\,(i^2 + 1)] \qquad (24)$$

$$i^{4k+2} \simeq -1, \quad \text{"} \quad ; \qquad (25)$$

a podobně si zjednáme ze vzorce (23)

$$i^{4m+1} \simeq i, \quad i^{4m+3} \simeq -i, \quad i^{4m+5} \simeq i, \ldots$$

a všeobecně tedy

$$i^{4k+1} \simeq i, \quad [div\,(i^2 + 1)] \qquad (26)$$

$$i^{4k+3} \simeq -i, \quad \text{"} \quad . \qquad (27)$$

Majíce tyto vzorce na zřeteli, položme

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2^2 + a_3^3 + a_4 i^4 + a_5 i^5 + \ldots; \qquad (28)$$

i bude tedy o tomto polynomu podlé vzorce (21) míti platnost ekvivalence, nevyjádří-li se tu zřejmě divisor známý,

$$f(i) \simeq (a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots) + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots)\, i. \qquad (29)$$

Jest-li tedy ve zvláštním případě

$$f(i) \equiv (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i),$$

obdržíme se strany jedné

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, i + \beta\delta i^2,$$

se strany pak druhé podlé vzorce (29) rovnici

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, i; \qquad (30)$$

učiníme-li pak

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = -\beta,$$

povstane ze vzorce (30) ekvivalence

$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \simeq \alpha^2 + \beta^2. \qquad (31)$$

Změníme-li pak ve vzorci (30) označení veličiny β a δ, obdržíme přímo

$$(\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma)\, i, \qquad (32)$$

takže povstane, znásobíme-li ekvivalenci (30) a (32) a užijeme-li vzorce (31), nová ekvivalence

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \simeq (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2,$$

z níž plyne, jelikož neobsahuje veličiny i, stejnina známá

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2, \qquad (33)$$

vyjadřující vlastnost čísel, že *součin dvou čtverců se dvěma čtverci představuje součet dvou čtverců.* *)

Poněvadž $\simeq$ značí stejnost zbytků dělením funkcí $i^2 + 1$ povstávajících, poznáváme, že možná $\simeq$ nahraditi znamením $=$, redukují-li se oba členy ekvivalence na výraz linearní. Platí-li tedy

$$f(i) \simeq 0 \qquad (34)$$

a značí-li tu

*) Identičnost tuto vytkl již r. 1202 *Fibonacci.* Jest nejjednodušším případem vlastností, týkajících se čísel kvadratických; dokázalť *Euler,* že též součin $2^2 = 4$ čtverců se 4 čtverci představuje součet 4 čtverců, kteroužto poučku pak rozšířil *Brioschi* na $2^3 = 8$ čtverců, *Genocchi* konečně na 2^m čtverců, takže náš případ nastává, je-li $m = 1$.

$$Z\frac{f(i)}{i^2+1}=\gamma_0+\gamma_1 i,$$

přejde ekvivalence (34) v rovnici

$$\gamma_0+\gamma_1 i=0, \tag{35}$$

z níž plyne, jelikož i jest libovolné a tedy může i 0 značiti,

$$\gamma_0=0, \tag{36}$$

načež pro kteroukoli hodnotu veličiny i ze vzorce (35) jde

$$\gamma_1=0.*) \tag{37}$$

Jak patrno, souvisí tu rovnice imaginární (34) s dvěma rovnicemi realními (36) a (37) přímo; třebať jen v příslušném zbytku položiti část první, i neobsahující, $=0$ a rovněž i koëfficient veličiny i učiniti $=0$.

Aniž bychom dále se zanášeli s upotřebením těchto výsledků v rozmanitých případech konkretních, uvádíme pouze, že hlavní význam jeho záleží ve vzorci (29), jakož na př. se poznává z odvození známého vzorce

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Značí-li totiž i číslo libovolné, plyne z relace

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

píšeme-li tam ix místo x, napřed

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\ldots$$

a z toho dle vzorce (29)

$$e^{ix}\simeq\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)$$
$$+i\left(x-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right);$$

užijeme-li konečně známých řad pro $\sin x$ a $\cos x$, bude

$$e^{ix}\simeq\cos x+i\sin x$$

míti se zřetelem k děliteli i^2+1 všeobecný význam algebraické ekvivalence.

---

*) Kdyby i značilo jednotku imaginární, obdrželo by se z rovnice (35) přímo $\gamma_0=0$, $\gamma_1=0$.

III.

Takto asi objasňoval *Cauchy* poměr imaginarnosti k algebraickým shodám na str. 87 et seqq. IV. svazku svých „Exerc. d'analyse"; na str. 157 však vykládá v pojednání, zvaném „Mémoire sur les quantités géometriques" zcela jednoduše, že možná též s užitkem — „avec avantage" — výrazy imaginarní nahraditi „*veličinami geometrickými*", čímž se prý dosáhne nejen jasnosti a přesnosti, nýbrž větší všeobecnosti.

Maje na zřeteli své předchůdce v tomto věci pojímání, jako byl na př. *Buée*, *Argand*, *Francais*, *Faure*, *Mourey*, *Vallès* a m. j., uvádí za „*výrazy*" imaginarní „*veličiny*" geometrické, rozeznávaje takto „expression imaginaire" a „quantité géometrique." Že tímto spůsobem možná „znázorniti" číslo, jež nazýváme *soujemným*, a provésti jednoduché úkony početní, jest nyní všeobecně známo;*) a že příslušná symbolika

$$1_0 = 1, \quad 1_\pi = -1,$$
$$1_{\frac{\pi}{2}} = i, \quad 1_{\frac{3\pi}{2}} = -i,$$

velmi jednoduše vyjadřuje čtvero základních jednotek geometrických, taktéž není věcí snadno nepochopitelnou, ač tím pojem vlastní s hlediska theoretického nenabývá všestranné jasnosti.

K tomuto významu veličin geometrických vrací se pak *Cauchy* opětně, zejména na str. 213 et seqq. v pojednání, majícím název „La quantité géométrique $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$, et sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme $x + yi$," kdež zejména vykládá, že „geometrické" veličiny i a $-i$ představují čili „representují" kvadratický kořen z -1, jelikož

$$i^2 = \left(1_{\pm\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{\pm\pi} = -1.$$

V následujícím pojednání, majícím název „Sur les avantages que présent l'emploi des quantités géométriques dans la trigonometrie rectiligne" užívá pak s prospěchem identičnosti zavedené

---

*) Porovnej, co „O číslech soujemných vůbec a imaginarních zvlášť" řečeno jest v III. oddělení mé „Algebry pro vyšší třídy škol středních."

$$1_{\pm p} = \cos p \pm i \sin p,$$

a vyvinuje celou řadu známých relací goniometrických, užívá dále i zamilovanéko svého počtu zbytkového „calcul des résidus“ zvaného; avšak podstata imaginarnosti se tím vším jasněji neodůvodňuje, byť i docházela osvětlení různostranného. Opakujeť se tu v rozličných spůsobách stále týž zjev, že

$$i^2 = -1.$$

A téhož stanoviska přidržuje se i v následujících dvou pojednáních, věnovaných logarithmům a sice v prvním „Sur les divers logarithmes d'une quantité géométrique“, kdež přichází ke vzorci

$$l(x + yi) = lr_p = lr + l\,1_p,$$

jakož i v pojednání „Sur les puissances ou exponentielles dont les exposants et les bases sont des quantités géométriques,“ kdež staví své vzorce na logarithmy. Nové hledisko se tu nejeví, a další pojednání jen opakují základní názor jeho o věci této; stále jest mu

$$z = r_p = x + yi$$

veličinou „geometrickou,“ mající za modul r a za argument p, takže

$$p = arc\,cot\frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right),$$

nebo

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,ars\,sin\frac{y}{r} + \frac{\pi}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right),$$

anebo

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,arc\,cosec\frac{r}{y} + \frac{\pi}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right).$$

Kdybychom chtěli další práci *Cauchy-ho* v oboru tomto stopovati, bylo by nám přejíti na půdu obsahující nauku o funkcích s proměnnými soujemnými vůbec a o integrálech příslušných zvláště. Avšak úkol ten do úzkého rámce našeho nepatří, takže jen pozastavivše se u rozvláčného *Grunerta* přejdeme konečně k nejnovější publikaci na tomto poli, k *Teixeirovým kongruencím*, zaujímajícím původní hledisko *Cauchy-ho*.

(Dokončení.)