Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch
Příspěvek k theorii transformace elliptických integrálů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 2, 140--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123160

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1884

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Místo elementů e a φ zavedeme jiné: b a c pomocí rovnic:

$$b = ae, \quad c = a\, tg\, \varphi,$$

tak že máme nyní co elementy tři veličiny linearné: a, b, c, a tři k nim přidružené veličiny úhlové: α, β, γ. Hmotu oběžnice nazveme m, střední denní pohyb její n, tak že jest:

$$n = ka^{-\frac{3}{2}},$$

kdež jest k t. zv. Gaussova konstanta.

Pak platí předně pro každou oběžnici zvlášť, že příslušná velká polosa a jest konstantou, a dále pro soubor všech oběžnic následující soustava rovnic, obsahující 9 konstant A, B, C.

$$\Sigma mna^2 = A$$
$$\Sigma mna^2\alpha = A_1\, t + A_2$$

$$\Sigma mnb^2 = B$$
$$\Sigma mnb^2\beta = B_1\, t + B_2$$

$$\Sigma mnc^2 = C$$
$$\Sigma mnc^2\gamma = C_1\, t + C_2\,.$$

Rovnice ty ukazují:

1. *Linearné* veličiny: a, b, c mohou se měniti jen v určitých mezích, t. j. tak, že kolísají mezi maximální a minimalní hodnotou (veličina a vůbec nemá změny *sekularné*, nýbrž mění se jen periodicky ve velmi malých mezích a v poměrně krátkých dobách).

2. *Úhlové* veličiny: α, β, γ mění se tak, že jakási průměrná hodnota jejich roste s časem stejnoměrným způsobem.

Příspěvek k theorii transformace elliptických integrálů.

Píše **Matyáš Lerch.**

1. Differencialní výraz tvaru

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}},$$

možno vždy transformací linearnou

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \tag{1}$$

uvésti na jednoduchý tvar

$$\frac{dy}{m\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Důkaz. Substitucí (1) přejde daný výraz na

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\,dy}{\sqrt{A(\alpha y+\beta)^4+B(\alpha y+\beta)^3(\gamma y+\delta)+C(\alpha y+\beta)^2(\gamma y+\delta)^2+D(\alpha y+\beta)(\gamma y+\delta)^3+E(\gamma y+\delta)^4}}$$

$$=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\sqrt{A\beta^4+B\beta^3\delta+C\beta^2\delta^2+D\beta\delta^3+E\delta^4}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+p_4y_4}},$$

kde p_1, p_2, p_3, p_4 jsou stejnorodé funkce neznámých dosud veličin α, β, γ, δ, takže můžeme položiti podmínky

$$p_1=0,\ p_3=0,\ p_2+p_4=-1,$$

abychom uvedli výraz daný na tvar

$$\frac{dy}{m\sqrt{1-(1+p_4)y^2+p_4y^4}}=\frac{dy}{m\sqrt{(1-y^2)(1-p_4y^2)}},$$

kde

$$m=\frac{\sqrt{A\beta^4+B\beta^3\delta+C\beta^2\delta^2+D\beta\delta^3+E\delta^4}}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

2. Výraz differencialní

$$dV=\frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}} \tag{2}$$

můžeme převésti na tvar řečený

$$dV'=\frac{dy}{m\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \tag{3}$$

aniž bychom musili uvedené rovnice řešiti, jelikož můžeme modul k a parametr m přímo stanoviti a to následovně:

Výrazy (2) a (3) stanou se nekonečnými pro hodnoty resp.

$$x=\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,$$

$$y=-1,\ +1,\ -\frac{1}{k},\ +\frac{1}{k},$$

které si transformací (1) odpovídají a tedy stejný dvojpoměr mají, takže máme rovnici

$$(a_1a_2a_3a_4)=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}=\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2,$$

z níž obdržíme

$$k=\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}, \tag{4}$$

znamenáme-li λ hodnotu dvojpoměru

$$\lambda = (a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{a_{13}\, a_{24}}{a_{23}\, a_{14}} \text{ pro } a_{ik} = a_k - a_i.$$

Rovnice transformační musí pak býti výrazem zákona rovnosti dvojpoměrů

$$(a_1 a_2 a_3 x) = \left(-1,\ 1,\ -\frac{1}{k},\ y\right)$$

aneb

$$\frac{x-a_1}{x-a_2} : \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{y+1}{y-1} : \sqrt{\lambda},$$

z čehož plyne posléz rovnice hledaná

$$x = \frac{(a_1 a_{23}\sqrt{\lambda} - a_2 a_{13})y - (a_1 a_{23}\sqrt{\lambda} - a_2 a_{13})}{(a_{23}\sqrt{\lambda} - a_{13})y - (a_{23}\sqrt{\lambda} + a_{13})}.$$

Sestrojení výrazu pro m je patrno dle toho, co řečeno v prvém odstavci.

Kdyby daný radikál obsahoval pouze tři linearné faktory $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, přiřadili bychom hodnotám -1, 1, $-\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k}$ hodnoty a_1, a_2, a_3, ∞ v pořádku libovolném. Jak si tu počínati dlužno, aby k bylo realným, a menším než 1, nalezne čtenář v známých kompendiích. Toliko připomínáme, že i tu poskytuje theorie promětnosti zvláštních výhod.

V SUŠICI, dne 5. října 1883.

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal pan *O. Viglic*, studující VII. tř. r. v Pardubicích.)

Nazveme-li poloměr dané koule r, poloměr podstavy kužele R, stranu jeho s, bude $R = r\sqrt{2}$, $s = 3r\sqrt{2}$ a tedy

a) povrch kužele $P = \pi R^2 + \pi R s = 8\pi r^2$,

b) krychlový obsah kužele $K = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 4r = \frac{8}{3}\pi r^3$.

c) Značí-li y poloměr podstavy kužele, x výšku, V krychlový obsah jeho, pak jest $V = \frac{1}{3}\pi x y^2$. Bychom y vyjádřili x, pomněme, že

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{\sqrt{(x-r)^2 - r^2}}, \quad \text{tedy} \quad y^2 = \frac{r^2 x}{x-2r},$$

a proto

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x-2r}.$$