Jan Bílek

O jedné rovinné involuci J_{11} druhé třídy a její degeneraci

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, 17--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123150

O jedné rovinné involuci J_{11} druhé třídy a její degeneraci.

Jan Bílek, Praha.

(Došlo dne 25. března 1946.)

I.

Tuto involuci J_{11} lze vytvořiti pomocí svazku kuželoseček a svazku kubik, které mají čtyři body base společné. Nechť body $A_1, \ldots, A_4$ je určen svazek kuželoseček S_2^1 a nechť body $A_1, \ldots, A_9$ tvoří basi svazku kubik S_3^1.

Zvolme obecný bod roviny P; jím je určena jediná kuželosečka svazku S_2^1 a rovněž jediná kubika svazku S_3^1. Tyto dvě křivky protínají se v dalším bodě P'. Zvolme bod P', pak naší konstrukcí odpovídá bodu P' bod P. Vidíme tedy, že obecnému bodu roviny odpovídá jediný bod roviny, tedy naše korespondence je obecně jednojednoznačná a involutorní.

Hledejme body, pro které tato jednoznačnost se poruší. Nechť bod $P \equiv A_5$, potom v S_2^1 bodem P je určena jediná kuželosečka k_2 (1, 2, ..., 5), ale bodem P prochází celý svazek kubik. Každá kubika svazku protne uvažovanou kuželosečku ještě v jednom bodě, který můžeme vzíti za odpovídající bod bodu P. Bodu A_5 odpovídá tedy kuželosečka k_2 (1, 2, ..., 5). Podobně to dokážeme o bodech $A_6, \ldots, A_9$. Body $A_5, \ldots, A_9$ jsou hlavní body druhého stupně. Co odpovídá bodu A_1? Nechť bod $P \equiv A_1$, pak jím prochází každá křivka obou svazků. Proto uvažujeme, že bod P je soumezný k bodu A_1 v určitém směru, to znamená, že obě křivky z obou svazků jdoucí bodem P mají v bodě A_1 společnou tečnu a protnou se ještě v dalším bodě. Necháme-li tedy směr společné tečny v bodě A_1 všemi možnými způsoby měniti, dostaneme všechny body, které budou odpovídati bodu A_1. Uvedeným požadavkem, aby křivky obou svazků měly v bodě A_1 společnou tečnu, přiřadíme určité kuželosečce jedinou kubiku a obráceně. Vznikne takto mezi oběma svazky projektivnost a křivka, která těmito projektivními svazky bude vytvořena, bude hlavní křivka odpovídající bodu A_1. Vyjádříme si analyticky tuto projektivnost. Nechť

$f + \lambda g = 0$, je rovnice svazku kubik a
$h + \mu k = 0$, je rovnice svazku kuželoseček.

Soustavu souřadnou volíme tak, aby $A_1 \equiv O_1$ a tečny základních křivek obou svazků aby byly přímky $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a body $A_2 \equiv \equiv O_2$, $A_3 \equiv O_3$.

Rovnici svazku kubik je pak možno psáti

$$x_1^2 x_2 + \bar{f}(x_1, x_2, x_3) + \lambda[x_1^2 x_3 + \bar{g}(x_1, x_2, x_3)] = 0, \qquad (1)$$

kde $\bar{f}, \bar{g}$ jsou kubické formy proměnných x_1, x_2, x_3, jež obsahují x_1 nejvýše v mocnině první, x_2, x_3 pak nejvýše v mocnině druhé. Podobně lze psáti pro svazek kuželoseček

$$x_1 x_2 + \bar{h}(x_2, x_3) + \mu[x_1 x_3 + \bar{k}(x_2, x_3)] = 0, \qquad (2)$$

kde $\bar{h}, \bar{k}$ jsou kvadratické formy proměnných x_2, x_3, v nichž x_2 vystupuje jen v první mocnině.

Rovnice tečny ke kuželosečce v bodě A_1 je

$$x_2 + \mu x_3 = 0$$

a rovnice tečny kubiky v témže bodě je

$$x_2 + \lambda x_3 = 0.$$

Aby tyto dvě přímky byly totožné, musí $\lambda = \mu$. A to je zároveň rovnice naší projektivnosti. Vyjádřeme z rovnice (1), (2) λ a μ a dosaďme do poslední rovnice. Po malé úpravě dostaneme rovnici

$$x_1 x_3 \bar{f} + x_1^2 x_2 \bar{k} - \bar{f}\bar{k} - x_1^2 x_3 \bar{h} - x_1 x_2 \bar{g} - \bar{g}\bar{h} = 0.$$

Vidíme dále, že x_1 se v této rovnici vyskytuje nejvýše v mocnině druhé, x_2 pak nejvýše v mocnině třetí a x_3 nejvýše v mocnině čtvrté. Můžeme tedy vysloviti větu:

Hlavní křivka, odpovídající bodu A_1, je křivka pátého stupně, mající bod A_1 za trojnásobný a body A_2, A_3, A_4 za dvojnásobné a body $A_5, A_6, \ldots, A_9$ za jednoduché, neboť co platí pro bod A_2, resp. A_5, zřejmě platí pro body A_3, A_4, resp. $A_6, \ldots, A_9$. Podobné výsledky lze vysloviti pro body A_2, A_3, A_4. Snadno nahlédneme, že jiných hlavních bodů naše involuce nemá. Jest tedy charakteristika její $4^5 5^2$. Jak známo, platí pro Cremonovy transformace rovnice

$$\sum_\alpha i_\alpha = 3\,(n - 1),$$

kde i_α značí stupeň hlavního bodu, n pak stupeň Cremonovy transformace a součet se vztahuje na všechny hlavní body. V našem případě je $4 . 5 + 5 . 2 = 3\,(n - 1)$, odkud vypočteme $n = 11$. Jest tedy naše involuce známá semisymetrická involuce 11. stupně.

Podívejme se na vytvoření naší involuce ještě s jiné strany. Na libovolné kubice svazku S_3^1 vytne svazek kuželoseček lin. soustavu

g_2^1. Snadno nahlédneme, že skupiny soustavy g_2^1 jsou dvojice naší involuce. Podobně svazek kubik S_3^1 vytne na libovolné kuželosečce svazku S_2^1 lin. soustavu g_2^1, jejíž skupiny jsou dvojice sobě odpovídajících bodů naší involuce. Jsou tedy křivky obou svazků invariantní vůči naší involuci J_{11}. Na obecné kubice lin. soustava g_2^1 má 4 samodružné body, na kuželosečce g_2^1 má dva samodružné body. Souhrn těchto všech bodů na všech kubikách nebo na všech kuželosečkách dává křivku invariantních bodů Δ. Stanovme si blíže vlastnosti křivky Δ. Za tím účelem pozorujme křivku odpovídající přímce A_1A_3. Odpovídající křivka v J_{11} je 11. stupně, ale reducibilní. Po oddělení hlavních křivek odpovídajících bodům A_1, A_3 dostaneme zase přímku, která musí procházeti body A_2, A_4. Bod B_1, který je diagonálním vrcholem čtyrrohu A_1, A_2, A_3, A_4, je samodružný, neboť leží na sobě odpovídajících přímkách A_1A_3 a A_2A_4. Podobně jsou samodružné další diagonální vrcholy uvedeného čtyrrohu, B_2, B_3. Určeme si ještě třídu naší involuce, to znamená počet homologických dvojic involuce J_{11} na obecné přímce. Na obecné přímce zvolme bod P; jím určená kuželosečka ve svazku S_2^1 protne přímku v bodě P' a tímto bodem jdoucí kubika ve svazku S_3^1 protne přímku ve dvou bodech Q, R. Body Q, R přiřaďme bodu P. Tímto způsobem jsme dostali na přímce korespondenci, ve které bodu odpovídají dva body. Pozorujme korespondenci inversní. Zvolíme bod Q; jím jdoucí kubika protne přímku ve dvou bodech, a kuželosečky, jdoucí těmito dvěma body, protnou přímku ve dvou bodech dalších. Dostali jsme tímto způsobem na přímce korespondenci (2, 2). Máme-li na nějaké křivce rodu p korespondenci $T(m, n)$, pak, jak známo, počet samodružných bodů

$$u = m + n + 2\gamma p,$$

kde γ je hodnost korespondence $T(m, n)$. V našem případě je $u = 4$. Z toho vidíme, že třída naší involuce je 2. Tohoto výsledku užijeme, abychom stanovili stupeň μ křivky samodružných bodů Δ. Obecné přímce odpovídá homaloidní křivka 11. stupně a ta seče danou přímku v jedenácti průsečících. Avšak μ těchto průsečíků jsou invariantní body a tedy $11 - \mu$ průsečíků musí se rovnat dvojnásobku třídy naší involuce. Tedy $11 - \mu = 4$ a $\mu = 7$. Křivka Δ jest 7. stupně. Poněvadž přímka A_1A_3 protíná křivku Δ jen v bodech A_1, A_3 a B_1, neboť jinak by A_1A_3 byla samodružná, čemuž tak není, jsou proto body A_1, A_3 pro křivku Δ trojnásobné, uvážíme-li, že bod B_1 jest pro křivku Δ bod jednoduchý. Podobně stanovíme, že body A_2, A_4 jsou pro křivku Δ rovněž trojnásobné. Křivka Δ odpovídá v J_{11} sama sobě, z toho snadno usoudíme, že Δ obsahuje body $A_5, \ldots, A_9$ jako jednoduché.

Hledejme další vlastnosti křivky Δ. Snadno dokážeme, že Δ nemůže obsahovati další vícenásobný bod. Toto tvrzení plyne z věty, že Cremonova involuce nemůže obsahovati vícenásobný bod invariantní, který je různý od bodů hlavních. Nepředpokládejme však znalost této věty z theorie Cremonových transformací. Volme na křivce Δ libovolný bod P; jím je určena jediná kubika v S_3^1 a jediná kuželosečka v S_2^1 a tyto dvě křivky se v bodě P dotýkají. Kdyby bod P byl vícenásobný, různý od bodů hlavních, byly by jím zase určeny jen jediná kubika a jediná kuželosečka, které tedy určí jen bod jednoduchý. Je tudíž křivka Δ rodu 3.

Svazek S_2^1 vytne na Δ lin. soustavu g_2^1; jest proto Δ křivkou hypereliptickou. Hlavní kuželosečka, odpovídající bodu A_5, protne Δ ještě v bodě Q vedle bodů $A_1, \ldots, A_5$. Bod Q by měl býti samodružný, ale to je možné jen tehdy, když se ztotožní s bodem A_5, neboť mu odpovídá. To však znamená, že uvažovaná hlavní kuželosečka se křivky Δ v bodě A_5 dotýká. Podobné výsledky lze vysloviti pro ostatní hlavní body $A_6, \ldots, A_9$. Na hlavní kvintice odpovídající bodu A_1 vznikla involucí J_{11} parabolická involuce, tedy body soumezné na téže větvi jsou samodružné. Z toho vyplývá, že hlavní kvintika, odpovídající bodu A_1, jež má bod A_1 za trojnásobný, má v trojnásobném bodě A_1 na Δ tytéž tečny. Totéž platí pro body A_2, A_3, A_4.

Dostali jsme tak následující výsledek:

Křivka samodružných bodů Δ v involuci J_{11} je stupně 7. Body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou trojnásobné a tečny v nich jsou zároveň tečnami v trojnásobných bodech hlavních křivek odpovídajících bodům A_1, A_2, A_3, A_4. Body $A_5, \ldots, A_9$ jsou na Δ jednoduché a tečny v nich jsou zároveň tečnami v hlavních bodech $A_5, \ldots, A_9$ k hlavním kuželosečkám odpovídajícím bodům $A_5, \ldots, A_9$. Křivka Δ je hypereliptická rodu 3.

Pozorujme ještě lin. soustavu g_2^1, vyťatou na Δ svazkem kuželoseček S_2^1. Ptejme se po vícenásobných bodech této soustavy. Počet jejich stanovíme podle známé formule pro počet $(r + 1)$-násobných bodů lin. soustavy g_n^r na křivce rodu p. Označíme-li tento počet u, pak je dán vzorcem

$$u = (r + 1) \cdot (n + rp - r). \tag{3}$$

V našem případě jest $u = 8$. Pět těchto bodů jsou body $A_5, \ldots, A_9$ a zbývající tři body jsou diagonální vrcholy B_1, B_2, B_3.

Podobně vytne na Δ svazek kubik S_3^1 lin. soustavu g_4^1. Počet dvojnásobných bodů této soustavy je 12. Na každé kubice svazku vznikne centrická involuce g_2^1. V každém dvojnásobném bodě lin. soustavy g_4^1 se buď nějaká kubika svazku S_3^1 křivky dotýká, nebo je tam dvojnásobný bod některé racionální kubiky svazku S_3^1. Dotyk však je vyloučen, neboť pak by na kubice vznikla centrická involuce, jejíž dva samodružné body by splynuly, což je vyloučeno. Dva samodružné body centrické involuce na kubice nemohou splynouti; to dokážeme třeba užitím eliptického parametru. Vhodnou volbou eliptického parametru lze onu centrickou involuci vyjádřiti vztahem mezi parametry sobě odpovídajících bodů

$$u' \equiv -u + C \text{ (mod. per.).}$$

Pro samodružný bod platí $2u \equiv C$, čili

$$u = \tfrac{1}{2}C + m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Tedy

$$u = \tfrac{1}{2}C,\ \tfrac{1}{2}C + \omega_1,\ \tfrac{1}{2}C + \omega_2,\ \tfrac{1}{2}C + \omega_1 + \omega_2$$

a tyto čtyři body jsou zcela různé.

Na křivce $\varDelta$ leží tedy 12 dvojnásobných bodů racionálních kubik obsažených ve svazku S^1_3. Připomeňme si, že stupeň hlavních bodů a stupeň naší involuce jsme mohli dostati užitím formulí v knize: *Hudson*, *Cremona transformations p. 94*.

Pozorujme komplex kvintik $S^3_5\,(A^2_1, A^2_2, A^2_3, A^2_4, A_5, \ldots, A_9)$. Tento komplex se naší involucí J_{11} reprodukuje nejen jako celek, ale každá kvintika jeho je samodružná. Nějaké jeho kvintice odpovídá zase kvintika komplexu, neboť od křivky 55. stupně odpadne dvakrát hlavní křivka odpovídající bodu $A_1, \ldots, A_4$ a jednou hlavní kuželosečka odpovídající bodu $A_5, \ldots, A_9$, tedy celkem křivka 50. stupně. Tato křivka pátého stupně prochází bodem A_1 zase dvakrát, neboť daná kvintika protne kvintiku c_1, jež odpovídá bodu A_1, ještě ve dvou bodech, jež nejsou hlavní, a podobně to platí pro body $A_2, \ldots, A_4$. Bodem A_5 prochází transformovaná kvintika již jen jednou, neboť daná kvintika protíná hlavní kuželosečku c_5, jež odpovídá bodu A_5, již jen v jednom bodě, který není hlavní. Podobný výsledek jako pro bod A_5 platí pro body $A_6, \ldots, A_9$. Jest tedy transformovaná kvintika jednou kvintikou z komplexu S^3_5. Daná kvintika protne křivku $\varDelta$ ještě v šesti průsečících a těmito šesti průsečíky musí také procházeti kvintika transformovaná. Daná a transformovaná kvintika pak se protínají v 27 průsečících a tudíž splynou a každá kvintika komplexu S^3_5 se naší involucí reprodukuje. Dvojice involuce J_{11} na ní vytvoří lin. soustavu g^1_2, která je buď vyťata svazkem kubik S^1_3, nebo svazkem kuželoseček S^1_2. Počet samodružných bodů této involuce je $2\,(2 + 2 - 1) = 6$ a jsou to průsečíky dané kvintiky s křivkou $\varDelta$, ovšem různé od bodů hlavních.

Komplex kvintik S^3_5 vytne na libovolné kubice svazku S^1_3 lin. soustavu g^1_2, neboť g^3_2 neexistuje a g^2_2 rovněž ne, neboť pak by libovolná kubika svazku byla racionální, což je nemožné. Homologickou dvojicí z g^1_2 prochází tedy ∞^2 kvintik, což lze říci také jinak:

Všechny kvintiky komplexu S^3_5, jdoucí obecným bodem P, jdou nutně ještě dalším bodem P'. Komplex kvintik S^3_5 jest tedy

„složený". Touto složeností jest přiřaděn každému obecnému bodu v rovině jediný bod a dvojice těchto bodů vytvořují involuci J_{11}.

Uveďme ještě, jak je involuce J_{11} vytvořena pomocí komplexu hypereliptických kvintik S_5^3. Zvolme obecný bod P; jím je určena síť kvintik, náležející do komplexu S_5^3. Uvažujme nyní, že bod P je soumezný bodu A_1 ve směru t. Pak jím je určena síť kvintik, mající v bodě A_1 společnou tečnu t. Do této sítě náleží také racionální kvintika, mající bod A_1 za trojnásobný, a tato kvintika musí také procházeti odpovídajícím bodem P'. Bodem P' jde také kubika svazku, mající v A_1 tečnu t. Necháme-li směr t nabýti všech možných poloh, vyplní odpovídající body P' uvedenou racionální kvintiku, která násobnostmi hlavních bodů je jednoznačně určena. Podobné výsledky platí pro body A_2, A_3, A_4.

Uvažujme nyní, že bod P je soumezný bodu A_5 ve směru t. V síti jím určené existuje kvintika, mající bod A_5 za dvojnásobný, a tato musí také procházeti odpovídajícím bodem P'. Bodem P' jde také kubika svazku, mající v A_5 tečnu t. Necháme-li směr t nabýti všech možných poloh, dostaneme ∞^1 kvintik, majících v A_5 dvojnásobný bod, a všechny tyto kvintiky tvoří svazek. Tento svazek se však rozpadne tak, že všechny jeho křivky mají společnou kuželosečku c_5 $(A_1, \ldots, A_5)$ a svazek kvintik je tvořen svazkem kubik S_3^1 a kuželosečkou c_5. Tedy všechny kvintiky sítě, určené směrem t, musí nutně procházeti ještě průsečíkem kubiky, určené směrem t, a kuželosečky c_5. Uvážíme-li všechny možné směry t, pak odpovídající bod P' opíše kuželosečku c_5. Podobné výsledky plynou pro body $A_6, \ldots, A_9$.

Pozorujme nyní blíže komplex kvintik S_5^3. Zvolme obecný bod P a vezměme ho za pátý dvojnásobný bod pro kvintiky. Je jím v komplexu určena jediná eliptická kvintika. Tato kvintika se však musí v J_{11} reprodukovat, t. j. musí obsahovat další dvojnásobný bod, jenž leží v homologickém bodě P'. Avšak bodem P i P' jde jak kubika svazku S_3^1 tak kuželosečka svazku S_2^1, které jsou určeny bodem P. Mají tedy tyto dvě křivky s naší eliptickou kvintikou větší počet průsečíků, než žádá věta Bezoutova, a jsou proto její součástí. Dostáváme tak výsledek, který praví, že když zvolíme pátý dvojnásobný bod zcela obecně, pak neexistuje ireducibilní kvintika v komplexu S_5^3, která by tento bod měla za dvojnásobný.

Zvolme nyní obecný bod P na křivce samodružných bodů Δ. Jím je určena jediná kubika svazku S_3^1 a jediná kuželosečka ve svazku S_2^1 a tyto dvě křivky mají v bodě P společnou tečnu. Avšak v tomto bodě P dotýkají se také všechny kvintiky sítě, určené v komplexu S_5^3 bodem P a mající v bodě P touž tečnu jako kubika nebo kuželosečka příslušných svazků. V síti kvintik existuje však svazek eliptických kvintik, který má bod P za dvojnásobný. Abychom to dokázali, volme soustavu souřadnou tak, že bod $P \equiv O_3$ a společná tečna je přímka $x_1 = 0$. Rovnice základních křivek sítě lze pak psáti

$$
\begin{aligned}
x_3^4 x_1 + x_3^3 u_2 + \ldots &= 0, \\
x_3^4 x_1 + x_3^3 v_2 + \ldots &= 0, \\
x_3^4 x_1 + x_3^3 w_2 + \ldots &= 0,
\end{aligned}
$$

kde u, v, w jsou kvadratické formy proměnných x_1, x_2.

Rovnice sítě pak je

$$x_3^4 x_1 (\lambda + \mu + \nu) + x_3^3 (\lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2) + \ldots = 0.$$

Aby bod P byl dvojnásobný, musí $\lambda + \mu + \nu = 0$, což vyjadřuje, že těch kvintik je ∞^1 a tvoří tedy všechny eliptické kvintiky naší sítě svazek. Tento svazek kvintik vytne na křivce Δ lin. soustavu g_4^1 s 12 dvojnásobnými body, jak plyne z rovnice (3). Těchto 12 bodů označme Z_i, $i = 1, \ldots, 12$, a jsou to šesté dvojnásobné body racionálních kvintik, obsažených ve svazku eliptických kvintik, určených bodem P. Uvedené tvrzení nahlédneme, když uvážíme, že nemohou splynouti dva samodružné body v involuci g_2^1 na eliptické křivce. Našli jsme již, že 12 dvojnásobných bodů Y_i racionálních kubik svazku S_3^1 leží na Δ. Volme bod $P \equiv Y_i$; pak eliptický svazek kvintik, určený bodem P, se skládá ze složených kvintik. Součástí všech je racionální kubika, mající bod Y_i za dvojnásobný, a svazek kvintik je tvořen touto kubikou a svazkem kuželoseček S_2^1. Další dvojnásobné body křivek tohoto svazku kvintik jsou body B_1, B_2, B_3, jak jsme již dříve našli. Splyne-li bod P s bodem B_i, svazek kvintik se také rozpadne a všechny křivky mají společnou kuželosečku s dvojnásobným bodem B_i. Svazek kvintik je pak tvořen touto kuželosečkou a svazkem kubik S_3^1. V tomto svazku existuje pak 12 křivek, které mají další dvojnásobný bod, totiž některý bod Y_i.

Shrneme-li naše výsledky, můžeme říci:

V komplexu hypereliptických kvintik, jehož body base leží v basi kubických křivek, při čemž 4 body této base jsou dvojnásobné a ostatní jednoduché, neexistuje ireducibilní kvintika s obecným pátým bodem dvojnásobným. Zvolíme-li však pátý dvojnásobný bod na křivce sedmého stupně Δ, s výjimkou 12 bodů Y_i a tří bodů B_i, je jím určen svazek obecně ireducibilních kvintik eliptických, který obsahuje 12 racionálních kvintik, které mají svůj další dvojnásobný bod rovněž na křivce Δ. Svazky, určené bodem Y_i, jsou tvořeny složenými kvintikami a obsahují tři křivky, mající další dvojnásobný bod. Svazky, určené bodem B_i, jsou tvořeny rovněž složenými kvintikami a obsahují 12 křivek, majících další šestý dvojnásobný bod.

Obraťme se nyní ke studiu naší involuce, když poloha hlavních bodů je speciálnější.

II.

Dva hlavní body pátého stupně a jeden druhého stupně leží v přímce.

Nechť A_1, A_4, A_5 leží na přímce p. Potom ostatních šest bodů leží na kuželosečce k_2 (A_2, A_3, A_6, …, A_9). Na obecné kubice svazku vytne komplex kvintik S_5^3 jako dříve lin. soustavu g_2^1. Na kuželosečce k_2 vytne komplex S_5^3 lin. soustavu g_2^1, neboť existuje svazek kvintik, jež kuželosečku k_2 mají za součást. Tento svazek je určen kuželosečkou k_2, svazkem kuželoseček S_2^1 a přímkou $\overline{A_1A_4A_5}$. Kuželosečka k_2 je tedy samodružná. Volme bod P na přímce A_1A_4; jím určená síť kvintik půjde ještě bodem P'. Tato síť kvintik se rozpadne na přímku A_1A_4 a síť kvartik S_4^2 (A_1, A_2^2, A_3^2, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9). Síť kvartik vytne na přímce A_1A_4 lin. soustavu g_2^1, neboť existuje jediná kvartika, obsahující přímku A_1A_4 za součást. Tato kvartika se skládá z kuželosečky k_2 a ze složené kuželosečky $A_1A_4 \,.\, A_2A_3$. Jsou tedy kuželosečka k_2 a přímka A_1A_4 samodružné křivky.

Přímka A_1A_4 je součástí jak křivky hlavní c_1, jež odpovídá bodu A_1, tak součástí křivky c_4, jež odpovídá bodu A_4, neboť má s nimi šest společných průsečíků. Přímka A_1A_4 je také součástí kuželosečky, jež odpovídá bodu A_5, neboť s ní má tři společné průsečíky. Necháme-li tuto přímku stranou, neboť je samodružná, můžeme říci, že

bodu A_1 odpovídá kvartika c_1 (A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4, A_6, …, A_9),
bodu A_4 odpovídá kvartika c_4 (A_1, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_6, …, A_9),
bodu A_5 odpovídá přímka c_5 (A_2, A_3)

a ostatní hlavní křivky zůstávají beze změny. Ze vzorce $3(n-1) = 2 \,.\, 4 + 2 \,.\, 5 + 1 + 4 \,.\, 2$ plyne, že $n = 10$.

Přímka A_1A_4 je součástí křivky samodružných bodů Δ, neboť s ní má 10 společných průsečíků. Křivka Δ se po vynechání samodružné přímky redukuje na Δ^6 (1^2, 2^3, 3^3, 4^2, 6, 7, 8, 9). Z rovnice $n - \mu = 2\nu$, kde μ je stupeň křivky samodružných bodů a ν je třída involuce, plyne, že třída naší involuce je 2. Přímka A_1A_4 protne Δ^6 ještě ve dvou bodech, jež nejsou hlavní, a to jsou samodružné body involuce vzniklé v této přímce naší involucí. Rod křivky Δ^6 je 2.

Svazek kuželoseček S_2^1 (1, 2, 3, 4) vytne na Δ^6 lin. soustavu g_2^1, která má šest dvojnásobných bodů. Tyto body jsou vyťaty složenými kuželosečkami o dvojnásobném bodu B_1, B_2 a čtyřmi hlavními kuželosečkami, které odpovídají bodům A_6, A_7, A_8, A_9.

Svazek kubik S_3^1 vytne na Δ^6 lin. soustavu g_4^1, která má 10 dvojnásobných bodů, ve kterých leží dvojnásobné body racionálních kubik ve svazku S_3^1. Tyto body označme si Y_i ($i = 1, \ldots, 10$). Zvolíme-li obecný bod B na Δ^6, jest jím určen svazek eliptických kvintik ireducibilních a tento svazek vytne na Δ^6 lin. soustavu g_4^1, která má 10 dvojnásobných bodů. Tyto body označme Z_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$). V bodech Z_i leží šestý dvojnásobný bod ireducibilní racionální kvintiky svazku určeného bodem B. Podobně jako v odst. I dokážeme, že žádný bod Y_i nesplyne s bodem Z_i. Lze tedy říci: *Obecným bodem B na Δ^6 je v S_5^3 určen svazek ireducibilních kvintik eliptických, který obsahuje 10 racionálních kvintik ireducibilních, jež svůj šestý bod dvojnásobný mají na křivce Δ^6. Body Y_i, B_1, B_2, U_1, U_2 činí výjimku. U_1, U_2 jsou body průsečné přímky A_1A_4 s křivkou Δ^6.*

Vyslovíme ještě konečný výsledek pro involuci J_{11}. *Leží-li dva hlavní body pátého stupně a jeden druhého stupně na přímce, pak involuce J_{11} degeneruje v involuci desátého stupně, jinak řečeno, sníží se stupeň degenerované involuce o jednotku.*

III.

Tři hlavní body druhého stupně leží v jedné přímce.

Nechť třeba body A_5, A_6, A_7 leží v přímce p; pak zbývajících šest bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_8, A_9 leží na kuželosečce k. Složená kubika $p \,.\, k$ má býti samodružná. Na přímce p vytne komplex kvintik S_5^3 lin. soustavu g_2^1, neboť existuje svazek kvintik, jež obsahují přímku p. Jest to svazek $p \,.\, k \,.\, S_2^1$. Přímka p je tedy samodružná a tudíž i kuželosečka k. Na kuželosečce nevytíná komplex kvintik S_5^3 již žádnou bodovou soustavu. Proto postupujeme tak, že zvolíme na k bod P a hledáme jemu odpovídající bod P'. Bodem P je určena síť kvintik, jež se rozpadne na kuželosečku k, a síť kubik S_3^2 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), která na kuželosečce k vytne lin. soustavu g_2^1, neboť existuje jediná kubika sítě obsahující kuželosečku k, totiž kubika $p \,.\, k$. Dvojice této soustavy g_2^1 jsou pak homologické dvojice na kuželosečce k v naší degenerované involuci.

Kuželosečka k jest součástí hlavních křivek, odpovídajících bodům A_1, A_2, A_3, A_4, A_8, A_9, neboť s nimi má více společných průsečíků, než žádá věta Bezoutova.

Bodu A_1 odpovídá c_1^3 (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7),
A_2 odpovídá c_2^3 (1, 2^2, 3, 4, 5, 6, 7),
A_3 odpovídá c_3^3 (1, 2, 3^2, 4, 5, 6, 7),
A_4 odpovídá c_4^3 (1, 2, 3, 4^2, 5, 6, 7).

Body A_8, A_9 přestávají býti body hlavními a u ostatních se stupeň nesnížil. Z rovnice $4 \,.\, 3 + 3 \,.\, 2 = 3\,(n - 1)$ plyne, že $n = 7$.

Křivka samodružných bodů Δ se rozpadne na $k \,.\, \Delta^5$ (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5, 6, 7). Třída naší involuce je tedy 1. Charakteristika její je 4^3, 3^2.

Dostáváme výsledek:

Leží-li tři hlavní body druhého stupně involuce J_{11} v přímce, sníží se stupeň degenerované involuce o čtyři jednotky.

Svazek kuželoseček S_2^1 vytne na Δ^5 lin. soustavu g_2^1, která má šest dvojnásobných bodů. Tyto body jsou vyťaty složenými kuželosečkami o dvojnásobném bodu B_1, B_2, B_3 a třemi hlavními kuželosečkami, které odpovídají bodům A_5, A_6, A_7.

Svazek kubik S_3^1 vytne na Δ^5 lin. soustavu g_4^1, která má 10 dvojnásobných bodů, ve kterých leží dvojnásobné body racionálních kubik svazku S_3^1. Tyto body označme si Y_i $(i = 1, \ldots, 10)$. Zvolíme-li obecný bod B na Δ^5, je jím určen svazek eliptických ireducibilních kvintik a tento svazek vytne na Δ^5 lin. soustavu g_4^1, která má 10 dvojnásobných bodů. Tyto body označme Z_i $(i = 1, \ldots, 10)$. V bodech Z_i leží šestý dvojnásobný bod ireducibilní racionální kvintiky svazku určeného bodem B. Podobně jako v odst. I dokážeme, že žádný bod Y_i nesplyne s bodem Z_i. Lze tedy říci: *Obecným bodem B na Δ^5 je v S_5^3 určen svazek ireducibilních kvintik eliptických, který obsahuje* 10 *racionálních ireducibilních kvintik, jež mají svůj šestý bod dvojnásobný rovněž na křivce Δ^5. Body Y_i, B_1, B_2, B_3, V_1, V_2 činí výjimku. V_1, V_2 jsou průsečíky kuželosečky k s křivkou Δ^5.* Obecným bodem na přímce p je určen svazek reducibilních kvintik, neboť každá kvintika tohoto svazku musí procházeti ještě bodem B', který musí býti rovněž dvojnásobným. Bod B' je homologický bod bodu B na přímce p.

IV.

Tři hlavní body pátého stupně leží v přímce.

Nechť to jsou body A_2, A_3, A_4 a leží v přímce p; pak zbývajících šest bodů A_1, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 leží na kuželosečce k. Komplex kvintik S_5^8 se rozpadne na přímku p a komplex kvartik S_4^3 $(1^2, 2, \ldots, 9)$.

$$\text{Kvintika } c_2^5 \text{ se rozpadne na } p^2 . \overline{12} . k \text{ a podobně}$$
$$c_3^5 \text{ se rozpadne na } p^2 . \overline{13} . k,$$
$$c_4^5 \text{ se rozpadne na } p^2 . \overline{14} . k.$$

Od kuželosečky odpovídající bodu A_5 odpadne p a zbývající část je A_1A_5. Podobně pro body $A_6, \ldots, A_9$. Od kvintiky c_1^5 odpadne jen jednoduchá přímka p a bodu A_1 tedy odpovídá c_1^4 $(1^3, 2, 3, \ldots, 9)$. Z rovnice $3\,(n - 1) = 8 . 1 + 4$ plyne, že $n = 5$. Tato involuce je Jonquièresova involuce pátého stupně. Od křivky samodružných bodů Δ odpadne dvakrát přímka p a zbývající křivka $\Delta^5 (1^3, 2, \ldots, 9)$ jest křivkou samodružných bodů naší involuce pátého stupně, což úplně souhlasí, neboť je známo, že jen u Jonquièresovy involuce je stupeň transformace a stupeň křivky samodružných bodů sobě roven.

Svazek kuželoseček S_2^1 degeneruje zde ve svazek přímek se středem v bodě A_1. Jest tedy tuto involuci možno vytvořiti tak, že na každém paprsku svazku přímek vytne svazek kubik S_3^1 centrickou involuci g_2^1 a její dvojice jsou homologické dvojice naší involuce. Na paprsku třeba A_1A_2 vytne svazek kubik S_3^1 lin. soustavu g_2^1, která má bod A_2 za pevný, tedy bodu A_2 odpovídají všechny body přímky A_1A_2. Podobně to platí pro ostatní body $A_3, \ldots, A_9$. Abychom našli i tímto způsobem hlavní křivku, odpovídající bodu A_1, necháme bod P blížiti se k A_1 ve směru t. Jím je určena kubika, mající tečnu t v bodě A_1 a paprsek t ve svazku přímek (A_1). Ty se protnou ještě v jednom bodě P', který odpovídá P. Necháme-li tedy měniti směr t, dostaneme dva projektivní svazky a ty nám vytvoří odpovídající křivku bodu A_1. Vytvořená křivka je stupně čtvrtého, jde body $A_2, A_3, \ldots, A_9$ jednoduše a bod A_1 má za trojnásobný. To snadno analyticky nahlédneme, když bod $A_1 \equiv O_3$. Pak rovnice svazku přímek je $x_1 - \lambda x_2 = 0$ a svazku kubik

$$x_3^2 (x_1 - \mu x_2) + x_3 (u_2 - \mu v_2) + u_3 - \mu v_3 = 0.$$

Aby měly společnou tečnu stačí, když $\lambda = \mu$, a to je rovnice hledané projektivnosti. Dosaďme do druhé rovnice za μ a dostaneme

$$x_3 (x_2 u_2 - x_1 v_2) + x_2 u_3 - x_1 v_3 = 0$$

a to je rovnice křivky čtvrtého stupně, jež má bod $A_1 \equiv O_3$ za bod trojnásobný.

Můžeme určiti ještě jinak křivku samodružných bodů, uvážíme-li, že g_2^1 na libovolném paprsku má dva samodružné body. Poněvadž c_1^4 má bod A_1 za trojnásobný, jsou soumezné body k bodu A_1 na této křivce samodružné. Tedy bod A_1 je pro křivku samodružných bodů trojnásobný. Tato křivka protne obecný paprsek svazku v pěti bodech a je tedy pátého stupně. V bodech $A_2, \ldots, A_9$ existuje jediný samodružný bod, totiž soumezný k $A_2, \ldots$, na paprsku $A_1A_2, \ldots$ Proto se křivka Δ^5 v těchto bodech přímek $A_1A_2, \ldots, A_1A_9$ dotýká.

Připomeňme ještě, že vytvoření této involuce je možné také pomocí komplexu kvartik S_4^3, od čehož pro snadnost upustíme.

Zvolme obecný bod B jako další dvojnásobný bod eliptické kvartiky komplexu S_4^3; ale ta se rozpadne, neboť by musila ještě procházeti odpovídajícím bodem B', který by pro ni byl také dvojnásobný. Zvolíme-li však bod B na Δ^5, je jím určen svazek obecně se nerozpadajících eliptických kvartik. Tento svazek vytne na Δ^5 lin. soustavu g_4^1 s 12 dvojnásobnými body Z_i $(i = 1, \ldots, 12)$. V těchto dvanácti bodech Z_i jest třetí dvojnásobný bod racionální kvartiky, obsažené ve svazku kvartik, který je určen dvojnásobným bodem B. Na Δ^5 vytne svazek přímek S_1^1 o středu A_1 lin. soustavu g_2^1 s 8 dvojnásobnými body, které vytínají tečny v bodech $A_2, \dots, A_9$.

Na Δ^5 vytne svazek kubik S_3^1 lin. soustavu g_4^1 s dvanácti dvojnásobnými body Y_i, $i = 1, \dots, 12$. V těchto bodech Y_i leží dvojnásobné body racionálních kubik, obsažených ve svazku S_3^1. Pouze 10 těchto kubik je ireducibilních.

Kuželosečka k protne přímku p ve dvou bodech U_1, U_2, které jsou samodružné, tedy prochází jimi také křivka Δ^5.

Lze tedy říci:

Obecným bodem B na Δ^5 je v S_4^3 určen svazek eliptických ireducibilních kvartik, který obsahuje 12 racionálních kvartik ireducibilních, jež mají svůj třetí dvojnásobný bod rovněž na křivce Δ^5. Body Y_i, U_1, U_2 činí výjimku.

Konečně vyslovme ještě větu:

Leží-li tři hlavní body pátého stupně na přímce, pak involuce J_{11} degeneruje v Jonquièresovu involuci pátého stupně, to jest stupeň degenerované involuce se sníží o 6 jednotek. Třída této involuce je 0.

V.

Vhodnou kombinací případů projednávaných v odst. II, III a IV můžeme dostati involuci stupně 1—10. V dalším upustíme od podrobnějšího výkladu jednotlivých případů a uvedeme jen tabulku výsledků.

Speciálním případem případu 23 je, když body 1, ..., 9 tvoří basi syzygetického svazku.

Poslednímu sloupci jest rozuměti takto: Obecným bodem na křivce samodružných bodů je v komplexu kvintik S_5^3 určen svazek eliptických kvintik, který obsahuje udaný počet racionálních kvintik, jež mají šestý dvojnásobný bod rovněž na křivce samodružných bodů.

*

Sur une involution du plan J_{11} de la deuxième classe.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette involution est formée, comme on sait, à l'aide d'un faisceau de coniques S_2^1 et d'un faisceau de cubiques S_3^1 dont quatre points de base sont communs. Soient $A_1, \dots, A_9$ les points de base du faisceau de cubiques S_3^1, $A_1, \dots, A_4$ les points de base du faisceau de coniques S_2^1. Le faisceau de cubiques S_3^1 découpe sur une conique du faisceau S_2^1 une série linéaire g_2^1, dont les groupes sont les couples

Č.	Odst.	Na přímce leží	Charakteristika	Křivka samodruž. bodů	Stup.	Počet rac. kvintik
1	II.	145	$2^5 2^4 4^2 1^1$	Δ^6 $(1^2, 2^3, 3^3, 4^2, 6, 7, 8, 9)$	10	10
2		145, 346	$1^5 2^4 1^3 3^2 2^1$	Δ^5 $(1^2, 2^3, 3^2, 4, 7, 8, 9)$	9	6
3		145, 235	$4^4 4^2$	Δ^5 $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 6, 7, 8, 9)$	9	8
4		145, 235, 346	$2^4 2^3 3^2 1^1$	Δ^4 $(1^2, 2^2, 3, 4, 7, 8, 9)$	8	6
5		145, 346, 247	$3^4 3^2 3^1$	Δ^4 $(1^2, 2^2, 3^2, 8, 9)$	8	6
6		145, 235, 126, 346	$4^3 3^2$	Δ^3 $(1, 2, 3, 4, 7, 8, 9)$	7	4
7		145, 235, 346, 247	$1^4 2^3 3^2 2^1$	Δ^3 $(1^2, 2, 3, 7, 8, 9)$	7	2
8	III.	789	$4^3 3^2$	Δ^5 $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5, 6, 7)$	7	10
9		145, 235, 126, 346, 137	$2^3 4^2 1^1$	Δ^2 $(2, 4, 8, 9)$	6	2
10		147, 789	$2^3 4^2 1^1$	Δ^4 $(1, 2^2, 3^2, 4, 8, 9)$	6	8
11		145, 235, 126, 346, 137, 247	6^2	Δ^1 $(8, 9)$	5	—
12		789, 147, 237	6^2	Δ^3 $(1, 2, 3, 4, 8, 9)$	5	6
13	IV.	234	$1^4 8^1$	Δ^5 $(1^3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$	5	12 kvartik
14		147, 237, 348, 789	$3^2 3^1$	Δ^2 $(1, 2, 9)$	4	4
15		789, 147, 249, 348	$3^2 3^1$	Δ^2 $(1, 2, 3)$	4	2
16		234, 165, 789	$1^3 6^1$	Δ^4 $(1^2, 2, 3, 4, 7, 8, 9)$	4	degener. příp. IV.
17		147, 247, 128, 348, 789	$1^2 4^1$	Δ^1 (9)	3	2
18		789, 569	$1^2 4^1$	Δ^3 $(1, 2, 3, 4, 9)$	3	8
19		145, 235, 348, 249, 589	$1^2 4^1$	Δ^1 (1)	3	—
20		234, 125, 136	$1^2 4^1$	Δ^3 $(1, 4, 7, 8, 9)$	3	—
21		147, 237, 128, 348, 249	3^1	2, 4, 7, 8 isol. sam. body	2	—
22		234, 125, 136, 147	3^1	Δ^2 $(8, 9)$	2	—
23		789, 569, 149, 239	0	Δ^1	1	4

de points correspondants de notre involution. La caractéristique de cette involution est $A_1^5, A_2^5, A_3^5, A_4^5, A_5^2, \ldots, A_9^2$. La courbe des points invariants Δ est du 7ᵉ ordre. L'auteur considère la création de cette involution à l'aide du complexe linéaire S_5^3 $(A_1^2, \ldots, A_4^2, A_5, \ldots, A_9)$ de quintiques hyperelliptiques, qui est „composé„. Dans ce complexe il n'y a pas de quintique irréductible, ayant le cinquième point général pour le point double. Si l'on prend pour le cinquième point double un point général sur la courbe Δ, ce point définit un faisceau de quintiques elliptiques, ayant 12 courbes rationnelles, dont le sixième point est aussi situé sur la courbe Δ.

Si deux points principaux du cinquième ordre et un du deuxième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de J_{11} est réduit d'une unité. Si trois points principaux du deuxième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de J_{11} est réduit de quatre unités. Si trois points principaux du cinquième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de J_{11} est réduit de six unités.

En combinant ces trois cas d'une manière convenable, on peut arriver à une involution d'ordre quelconque, inférieur à 11, bien entendu.