Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Novák

Regulární prostor na němž je každá spojitá funkce konstantní

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 1, 58--68

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123148

Regulární prostor, na němž je každá spojitá funkce konstantní.

Josef Novák, Brno.

(Došlo 10. listopadu 1947.)

M. Fréchet položil ve svých Esquisse problém: Nalézti pokud možno nejobecnější typ prostorů, v nichž existují nekonstantní spojité funkce. P. Urysohn dokázal,[1]) že takové funkce existují v každém normálním prostoru. Sestrojil[2]) Hausdorffův spočetný prostor, kde všechny spojité funkce jsou konstantní. Výsledky, k nimž Urysohn došel, jsou neobyčejně důležité a měly značný vliv na vývoj topologie. Nicméně však Fréchetův problém nebyl řešen úplně. Urysohn k tomuto problému poznamenává:[3]) „Es ist mir nur nicht gelungen zu entscheiden, ob auch reguläre Räume existieren, in denen alle stetigen Funktionen konstant sind".

V této práci uvádím konstrukci regulárního prostoru R o libovolné nespočetné mohutnosti, v němž každá spojitá funkce je konstantní. Na rozdíl od Urysohna používám při konstrukci převážně konvergentních posloupností. Při tom provádím dvě určité modifikace, z nichž prvou nazývám Tychonovovou, neboť její idea pochází od Tychonova.[4])

Sestrojuji nejdříve regulární L-prostor, na němž každá spojitá funkce je konstantní. Tento prostor však, jako řada jiných L-prostorů, nemá otevřená okolí. A tu používám podobné myšlenky jako je Čechova U-modifikace dané topologie. Dostávám tak regulární prostor R se zmíněnými vlastnostmi.

Urysohnův problém jsem řešil v září 1946. Ke konci téhož roku došel do Prahy sešit Annals of Mathematics, 47 (1946), v němž Edwin Hewitt řeší týž problém takto: Nechť $\aleph$ je nekonečné kardinální číslo, jež není součtem $\aleph_0$ kardinálních čísel menších než $\aleph$. Pak

[1]) Paul Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen, **94** (1925), str. 262.

[2]) Loc. cit. str. 274.

[3]) Loc. cit. str. 290.

[4]) A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Annalen, **102** (1930), str. 554, pozn. [10]).

existuje regulární prostor R o mohutnosti $\aleph$, v němž každá spojitá funkce je konstantní. Obě řešení, Hewittovo a moje, jsou na sobě nezávislá. Priorita náleží však Hewittovi, neboť jeho řešení bylo zasláno do tisku v říjnu 1945. Přesto uveřejňuji svoje řešení, neboť je obecnější, udávajíc konstrukci prostoru R pro libovolnou nespočetnou mohutnost. Také methoda konstrukce a důkazu je jiná, než jaké užívá Urysohn a Hewitt.

I.

Bodová množina se nazývá **L**-prostorem, jsou-li v ní definovány konvergentní bodové posloupnosti $\{x_n\}$, kterým jsou jednoznačně přiřazeny určité body (limity) $x = \lim x_n$, k nimž tyto posloupnosti konvergují. Přitom musí býti splněny dva známé Fréchetovy axiomy konvergence.[5]) Topologie se zavádí do **L**-prostoru definicí uzávěru:

Uzávěr uM množiny M je množina bodů $x = \lim x_n$, kde $x_n \in M$. Tyto uzávěry splňují známé Kuratowského axiomy[6]) až na jeden: V **L**-prostoru nemusí býti uzávěr uzavřený. Z toho důvodu zobecníme pojem topologického prostoru. Budeme jím rozuměti množinu T a v ní definovanou množinovou aditivní funkci u takovou, že $u(0) = 0$ a že $X \subset u(X)$ pro každou podmnožinu X. Funkci u nazýváme topologií, jednoduše značíme $u(X) = uX$ a prostor T někdy značíme (T, u).

Z definice uzávěru vychází, že množina U je okolím bodu x v **L**-prostoru, když a jen když $x_n \in U$ pro skoro všecka n, kdykoliv $\lim x_n = x$. Tato okolí splňují prvé dva Hausdorffovy axiomy okolí,[7]) kdežto třetí obecně nikoli.

Reálná funkce $f(x)$, definovaná v topologickém prostoru T, je spojitá v bodě $a \in T$, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu a tak, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro každý $x \in U$. V **L**-prostorech je tato definice ekvivalentní s větou: Reálná funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, když a jen když $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, kdykoliv $\lim x_n = a$. Důkaz toho snadno vyplývá z definice okolí v **L**-prostoru.

---

[5]) Axiomy Fréchetovy zní: 1. Je-li $x_n = x$ pro každé n, pak $\lim x_n = x$. 2. Jestliže $\lim x_n = x$, pak také $\lim x_{n_i} = x$. Viz H. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, str. 164.

[6]) Axiomy Kuratowského zní: I. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$. II. Je-li X prázdná nebo jednobodová množina, pak $\overline{X} = X$. III. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. Viz C. Kuratowski, Topologie I, Lwów 1933, str. 15.

[7]) Hausdorffovy axiomy okolí zní: A) Každému bodu x odpovídá aspoň jedno okolí $U(x)$ a každé okolí $U(x)$ obsahuje bod x. B) Jsou-li $U(x)$, $V(x)$ dvě okolí téhož bodu, pak existuje okolí $W(x)$, jež je částí obou. C) Leží-li bod y v okolí $U(x)$, pak existuje okolí $U(y)$, jež je částí $U(x)$. D) Ke dvěma různým bodům x a y existují dvě okolí $U(x)$, $U(y)$ bez společných bodů. Viz F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, str. 213.

Nechť jsou dány dvě abstraktní množiny A a B o nekonečných mohutnostech $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. Body prvé množiny budeme značiti a nebo x, body druhé množiny b nebo y. Zvolme pevně body $a \in A$, $b \in B$ a zaveďme a priori konvergenci takto:

$\lim x_n = a$, když $x_n = a$ pro všecka n, nebo když $x_m \neq x_n$ pro $m \neq n$.

$\lim y_n = b$, když $y_n = b$ pro všecka n, nebo když $y_m \neq y_n$ pro $m \neq n$.

Do množiny $P = A \times B - (a, b)$, kde $A \times B$ je množina prvků (x, y), $x \in A$, $y \in B$ zavedeme konvergenci takto:

$\lim (x_n, y) = (a, y)$, když $x_n = a$ pro všecka n, nebo když $x_m \neq x_n$ pro $m \neq n$,

$\lim (x, y_n) = (x, b)$, když $y_n = b$ pro všecka n, nebo když $y_m \neq y_n$ pro $m \neq n$.

Věta 1. *Je-li $f(y)$ spojitá funkce na prostoru B, pak existuje reálné číslo k takové, že $f(y) = f(b) = k$ pro všecky body $y \in B$ s výjimkou nejvýš spočetného počtu y.*

Důkaz. Nastane jeden ze tří případů:

1. $f(B)$ je nespočetná množina reálných čísel.

2. $f(B)$ je spočetná a existují aspoň dvě čísla $k_1 \neq k_2$ tak, že $f(y) = k_1$, $f(y) = k_2$ v obou případech pro nekonečně mnoho bodů $y \in B$.

3. $f(B)$ je spočetná a existuje nejvýš jediné číslo k_1 s vlastností uvedenou sub 2.

Případ 1 nemůže nastati. Z 1 vyplývá totiž existence dvou reálných čísel $k_1 \neq k_2$, jež nejsou isolovaná v množině $f(B)$. V $f(B)$ existují pak prosté[8]) číselné posloupnosti $\{f(b_n)\}$ a $\{f(b'_n)\}$ takové, že $\lim f(b_n) = k_1$, $\lim f(b'_n) = k_2$. Jelikož $f(y)$ je jednoznačná funkce, tvoří body b_n, b'_n dvě prosté posloupnosti, které podle definice konvergují k bodu b. Funkce $f(y)$ je spojitá, takže $\lim f(b_n) = f(b) = \lim f(b'_n)$, což je spor s předpokladem $k_1 \neq k_2$.

Případ 2 nemůže nastati. Z 2 vyplývá existence dvou prostých posloupností $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$ v prostoru B takových, že $k_1 = f(b_n)$, $k_2 = f(b'_n)$ pro každé n. To opět vede ke sporu s předpokladem $k_1 \neq k_2$.

Nastane tedy případ 3. Jest $f(y) = k_1 = k = f(b)$ pro všecka $y \in B$ s výjimkou těch y, pro něž $f(y) \neq k$, a těch je nejvýš spočetný počet.

Věta 2. *Nechť $f(z)$ je spojitá funkce na prostoru $P = A \times B - (a, b)$. Pak existuje reálné číslo k s vlastností $f(z) = k$ pro všecka $z = (a, y)$, až na množinu výjimek o mohutnosti nejvýš $\mathfrak{a}$. Dále je $\lim f(x_n, b) = k$, kde $x_m \neq x_n$ pro $m \neq n$, $x_n \neq a$.*

[8]) Posloupnost je prostá, když jsou všecky její členy navzájem různé.

Důkaz. Množina bodů (x_0, y), kde $x_0 \neq a$ je určitý bod v A, je homeomorfní s prostorem B. Proto ke každému bodu $x_0 \neq a$ z A existuje podle předešlé věty reálné číslo $k_{x_0} = f(x_0, b)$ takové, že $f(x_0, y) = k_{x_0}$ pro všecka $y \in B$ s výjimkou spočetného počtu y. Množina souřadnic y, k nimž *existuje* souřadnice x s $f(x, y) \neq k_x$ má tudíž nejvýš mohutnost $\aleph_0 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Komplement M této množiny v B má vlastnost, že $f(x, y) = k_x = f(x, b)$ pro $y \in M$ a pro *všecka* $x \in A$, $x \neq a$.

Nechť $\{x_n\}$ je prostá posloupnost bodů, $x_n \in A - a$. Poněvadž $f(z)$ je spojitá a $\lim x_n = a$, existuje $\lim f(x_n, y) = f(a, y)$ pro všecka $y \in B$, $y \neq b$. Dále je pro každé $y \in M$ a pro všecka $x_n : f(x_n, y) = k_{x_n} = f(x_n, b)$, tudíž $\lim f(x_n, y) = f(a, y) = \lim f(x_n, b)$, $y \neq b$. Označíme-li poslední limitu $\lim f(x_n, b) = k$, dostáváme $f(a, y) = k$ pro všecka $y \in M$, $y \neq b$. Tím je věta dokázána.

II.

Buďte nyní dány dvě abstraktní množiny A, B o nekonečných mohutnostech $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. Prvky z prvé množiny budeme označovati α, z druhé množiny β nebo γ. Zvolme pevně prvek $\alpha^* \in A$, jejž nazveme posledním[9]) v A a prvek $\beta^* \in B$, jenž bude poslední v B.

Uvažujme nyní o bodech z, jež jsou identické se čtveřinami prvků

$$z = (\alpha, \beta, n, \gamma),$$

kde $\alpha \in A$, $\beta \in B$, n je přirozené číslo, $\gamma \in B$. Množinu všech bodů $(\alpha, \beta, n, \gamma_0)$ při pevném γ_0 označíme $\underset{\alpha,\beta,n}{E}(\alpha, \beta, n, \gamma_0)$ a nazveme svazkem (γ_0); podobně množinu $\underset{\alpha,\beta}{E}(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0)$ nazveme listem (n_0) ve svazku (γ_0), množinu $\underset{\alpha}{E}(\alpha, \beta_0, n_0, \gamma_0)$ nazveme řádkem (β_0) a $\underset{\beta}{E}(\alpha_0, \beta, n_0, \gamma_0)$ nazveme sloupcem (α_0) listu (n_0) ve svazku (γ_0). Množinu $\underset{\alpha}{E}(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0)$ čili řádek (β^*) nazveme posledním řádkem a sloupec (α^*) posledním sloupcem.

Proveďme nyní dvojí identifikaci čtveřin:

Prvá identifikace (Tychonovova)

$$(\alpha, \beta^*, n, \gamma) = (\alpha, \beta^*, n + 1, \gamma) \text{ pro lichá } n = 1, 3, \ldots$$
$$(\alpha^*, \beta, n, \gamma) = (\alpha^*, \beta, n + 1, \gamma) \text{ pro sudá } n = 2, 4, \ldots$$

Druhá identifikace:

$$(\alpha^*, \beta, 1, \gamma) = (\alpha^*, \beta, 1, \gamma') \text{ pro všecka } \gamma, \gamma' \text{ v } B.$$

---

[9]) Nikterak nepředpokládáme, že množiny A, B jsou uspořádané.

Odtraňme z množiny čtveřic prvků po této identifikaci body z tvaru $(\alpha^*, \beta^*, n, \gamma)$, čímž dostaneme množinu Q'. Označení řádek, sloupec, list a svazek ponecháme. Do Q' zavedeme nyní L-topologii.

Buďte dány pevně dvě poslední souřadnice $n = n_0$, $\gamma = \gamma_0$. Do posledního řádku $E(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0)$ a do posledního sloupce $E(\alpha^*, \beta, n_0, \gamma_0)$ listu (n_0) ve svazku (γ_0) zavedeme L-topologie tak, jak jsme to učinili v množinách A a B. Jediný hromadný bod v posledním řádku je bod $(\alpha^*, \beta^*, n_0, \gamma_0)$, který je rovněž jediným hromadným bodem v posledním sloupci. Jelikož lze položiti

$$E(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0) = E(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0) \times E(\alpha^*, \beta, n_0, \gamma_0),$$

můžeme do množiny $E(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0) - (\alpha^*, \beta^*, n_0, \gamma_0)$ zavésti L-topologii tak, jak jsme to učinili v množině $P = A \times B - (a, b)$. Učiňme tak pro každé přirozené číslo n a každý prvek $\gamma \in B$; tím dostaneme topologický L-prostor Q'.

Základem naší konstrukce bude však jiný prostor Q; ten povstane touto změnou topologie v Q':

Všimněme si, že každý bod $z = (\alpha, \beta, n, \gamma)$, $\alpha \neq \alpha^*$ a současně $\beta \neq \beta^*$, je isolovaný v prostoru Q'. Množinu těchto označíme

$$J = E\,[(\alpha, \beta, n, \gamma),\ \alpha \neq \alpha^*,\ \beta \neq \beta^*].$$

Mohutnost množiny J je $\mathfrak{ab}\aleph_0\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$; je stejná jako mohutnost množiny B. Existuje tudíž jednojednoznačná korespondence $\varphi(z) = \gamma$, $z \in J$ zobrazující J na B. Topologii v Q' zesílíme nyní tak, že definujeme $\lim\,(\alpha_n, \beta_n, n, \varphi(z)) = z$, kde $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$ jsou libovolné prvky takové, že $(\alpha_n, \beta_n) \neq (\alpha^*, \beta^*)$. Tím dostaneme prostor Q s topologií u.

Poznamenejme, že okolí bodu $z \in J$ v (Q, u) je tvořeno bodem z a skoro všemi listy svazku $(\varphi(z))$, a dále, že posloupnost bodů $\{(\alpha_m, \beta_m, n_m, \gamma_m)\}_m$, kde $n_m > 1$ a $\gamma_i \neq \gamma_j$ pro $i \neq j$, není konvergentní.

Věta 3. *Nechť $f(z)$ je spojitá funkce na prostoru Q. Pak je $f(z)$ konstantní.*

Dokažme nejprve úplnou indukcí vzhledem k n:

(1) *Nechť $f(z)$ je spojitá funkce na Q. Pak existuje ke každému svazku (γ_0) reálné číslo $k(\gamma_0) = k$ takové, že $f(z) = k$ pro skoro*[10]) *všecky body v posledním sloupci každého listu (n) ve svazku (γ_0).*

Pro $n = 1$ vyplývá (1) z věty 2, neboť každý list je topologicky identický s prostorem $P = A \times B - (a, b)$. Je-li n sudé, pak z Tychonovovy identifikace vyplývá, že oba poslední sloupce v listech (n) a $(n + 1)$ jsou identické, takže platí (1) pro $n + 1$. Nechť n je

[10]) Řekneme, že vlastnost V platí pro skoro všecky body množiny M, když množina bodů $x \in M$, jež nemají vlastnost V, má mohutnost menší, než je mohutnost množiny M.

liché. Z věty 2 vyplývá existence čísla l takového, že $f(z) = l$ pro skoro všecky body posledního sloupce listu $(n + 1)$ a že $\lim f(z_n) = l$ pro každou prostou posloupnost bodů z_n v posledním řádku téhož listu. Z Tychonovovy identifikace vyplývá, že tento řádek je identický s posledním řádkem předešlého listu (n), takže podle předpokladu pro indukci jest $\lim f(z_n) = k$, to jest $l = k$.

Dokažme nyní

(2) *Nechť $f(z)$ je spojitá funkce na Q. Pak existuje reálné číslo k takové, že $f(z) = k$ pro skoro všecky body z každého posledního sloupce v prostoru Q.*

Vskutku, je-li $\gamma_1 \in B$, $\gamma_2 \in B$, pak z (1) vyplývá, že $f(z) = k_1$ pro skoro všecky body množiny $\underset{\beta}{E}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_1)$ a že $f(z) = k_2$ pro skoro všecky body množiny $\underset{\beta}{E}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Z druhé identifikace však vyplývá, že obě množiny jsou pro $n = 1$ identické. Proto $k_1 = k_2$.

Přistupme k důkazu věty 3. Nechť konstanta k má takový význam jako ve (2).

a) Nechť $z \in J$. Podle (2) existují prvky $\beta_n \in B - \beta^*$ takové, že $f(\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = k$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Poněvadž $f(z)$ je spojitá a $\lim (\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = z$, platí vztah: $\lim f(\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = f(z) = k$.

b) Nechť $z \in Q - J$, tedy $z = (\alpha^*, \beta_0, n_0, \gamma_0)$, $\beta_0 \neq \beta^*$ nebo $z = (\alpha_0, \beta^*, n_0, \gamma_0)$, $\alpha_0 \neq \alpha^*$. V prvém případě zvolme prostou posloupnost bodů $\alpha_n \neq \alpha^*$. Pak $(\alpha_n, \beta_0, n_0, \gamma_0) \in J$ a podle a) jest $f(\alpha_n, \beta_0, n_0, \gamma_0) = k$ pro skoro všecka n. Jelikož $\lim (\alpha_n, \beta_0, n_0, \gamma_0) = z$, jest $f(z) = k$; podobně se dokáže i v druhém případě, že $f(z) = k$.

Všimněme si nyní blíže **L**-topologie u prostoru (Q, u), především však definujících okolí bodů $z \in Q$. Je-li *za prvé* $z \in J$, rozumíme definujícím p-tým okolím bodu z množinu

$$D(z) = z \cup \bigcup_{n \geqq 2p} \underset{\alpha, \beta}{E}(\alpha, \beta, n, \varphi(z)) - \underset{\alpha}{E}(\alpha, \beta^*, 2p, \varphi(z)).$$

Zřejmě v tomto případě platí

$$u\,D(z) = z \cup \bigcup_{n \geqq 2p} E(\alpha, \beta, n, \varphi(z))$$

a dále

$$uu\,D(z) = u\,D(z).$$

Je-li *za druhé* $z = (\alpha^*, \beta_0, n_0, \gamma_0)$, $n_0 \neq 1$ nebo $z = (\alpha_0, \beta^*, n_0, \gamma_0)$, pak z Tychonovovy identifikace vyplývá existence u-okolí bodu z, jež je částí právě dvou sloupců nebo dvou řádků ve dvou sousedních listech; každé takové okolí označíme $D(z)$ a nazveme definujícím. Je-li *za třetí* $z = (\alpha^*, \beta_0, 1, \gamma_0)$, pak vyplývá z druhé identifikace, že sjednocení řádků (β_0) ve všech prvých listech je u-okolím bodu z.

Za definující okolí $D(z)$ bodu z prohlásíme pak každé u-okolí bodu z, jež je částí tohoto sjednocení.

Jediným hromadným bodem množiny $D(z)$ je v druhém a třetím případě bod z sám, takže platí $u\, D(z) = D(z)$.

Zřejmě systém definujících okolí bodu z je úplný a

(3) *uzávěry definujících okolí jsou uzavřené.*

Snadno nyní dokážeme, že

(4) *prostor* (Q, u) *je regulární,*

v tom smyslu, že k libovolnému okolí $U(z)$ bodu z existuje definující okolí $D(z)$ takové, že $u\, D(z) \subset U(z)$.

Je-li $z \in Q - J$, pak je to zřejmé, neboť $D(z) = u\, D(z)$. Je-li $z \in J$, pak z poznámky na str. 62 vyplývá existence přirozeného čísla n_0 takového, že $\bigcup_{n \geqq n_0} E\, (\alpha, \beta, n, \varphi(z)) \subset U(z)$, tedy také $u\, D(z) \subset$ $\subset U(z)$, kde $D(z)$ je n_0-té definující okolí bodu z. Tím je (4) dokázáno.

Dokažme ještě:

(5) *Definující okolí je u-okolím každého svého hromadného bodu.*

Označme definující okolí $D(z)$ a hromadný bod $z' \in D(z)$. Je-li $z = z'$, pak je to zřejmé. Nechť $z \neq z'$; poněvadž definující okolí bodu $x \in Q - J$ obsahuje jediný hromadný bod x, musí býti $z \in J$. Nechť $D(z)$ je p-tým okolím. Pak

$$z' = (\alpha^*, \beta, n_0, \varphi(z)) \text{ nebo } z' = (\alpha, \beta^*, n_0, \varphi(z)),$$

kde $n_0 \geqq 2p$ v prvém případě a $n_0 > 2p$ v druhém případě. Zřejmě v prvém případě jest

$$U(z') = \underset{\beta}{E}\, (\alpha^*, \beta, n_0, \varphi(z)) \cup \underset{\beta}{E}\, (\alpha^*, \beta, n_0 \pm 1, \varphi(z)) \subset D(z),$$

kde + resp. — platí pro n_0 sudé resp. liché, a v druhém případě

$$U(z') = \underset{\alpha}{E}\, (\alpha, \beta^*, n_0, \varphi(z)) \cup \underset{\alpha}{E}\, (\alpha, \beta^*, n_0 \pm 1, \varphi(z)) \subset D(z),$$

kde + resp. — platí pro n_0 liché resp. sudé.

III.

Nechť (T, u) je topologický prostor, jehož okolí splňují axiomy (A), (B), nikoli však axiom (C). Z topologie u odvodíme novou topologii, která vyhovuje všem třem axiomům. Methodou úplné indukce budeme definovati nová modifikovaná okolí takto:

Nechť $U(x) \subset T$ je libovolné okolí bodu x. Označme $U(x) =$ $= U^1(x)$. Jsou-li už definovány množiny

$$U^1(x) \subset U^2(x) \subset \ldots \subset U^n(x),$$

pak nechť $U^{n+1}(x)$ jest u-okolí množiny $U^n(x)$. Množinu

$$V(x) = \bigcup U_n(x)$$

prohlásíme pak za v-okolí bodu x a nazveme je modifikovaným okolím.

Modifikovaná okolí splňují axiomy (A), (B), (C).

Axiom (A). Jest $x \in U(x) = U^1(x) \subset V(x)$. Dále je množina T okolím každého svého bodu.

Axiom (B). Nechť $V_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_i^n$, $i = 1, 2$, jsou dvě v-okolí bodu $x \in T$. Pak množina $V_3 = \bigcup U_1^n \cap U_2^n \subset V_1 \cap V_2$ jest opět v-okolím bodu x. Jest totiž $U_i^n \subset U_i^{n+1}$ pro $i = 1, 2$, takže platí vztah

$$U_1^n \cap U_2^n \subset U^{n+1}_1 \cap U^{n+1}_2,$$

v němž množina napravo jest u-okolím množiny nalevo.

Axiom (C). Nechť $y \in V(x) = \bigcup U^n(x)$; pak existuje q takové, že $U^{q+1}(x)$ jest u-okolím bodu y. Množina $V(y) = \bigcup O^n(y)$, kde $O^n(y) = U^{q+n}(x)$, je zřejmě v-okolím bodu y a je $V(y) \subset V(x)$.

Je-li $U(x)$ otevřené okolí v (T, u), můžeme voliti $U^n(x) = U(x)$ pro každé $n = 1, 2, \ldots$, takže $V(x) = U(x)$. Odtud vyplývá, že množiny otevřené v (T, u) zůstávají otevřenými v (T, v) a naopak. Systém u-uzavřených množin je týž jako systém v-uzavřených množin. Čech dokázal,[11] že existuje jediná topologie v s touto vlastností a nazval ji U-modifikací topologie u.

Proveďme U-modifikaci topologie u v prostoru (Q, u). Dostaneme prostor $R = (Q, v)$ s novou topologií v, jež splňuje prvé tři Hausdorffovy axiomy okolí. Body z jsou v **L**-prostoru Q uzavřené; zůstanou také uzavřené v R. V prostoru R jsou tudíž splněny všecky tři axiomy Kuratowského.

Věta 4. *Prostor R je regulární. Každá spojitá funkce na R je konstantní.*

Důkaz. Jestliže $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro všecka $x \in V(a) = \bigcup U^n(a)$, tím spíše platí tato nerovnost pro všecka $x \in U^1(a) = U(a)$. Odtud následuje, že funkce spojitá na R je také spojitá na Q a podle věty 3 je tudíž konstantní.

Zbývá dokázat, že R je regulární prostor. Nechť $V(a) = \bigcup U^n(a)$ je libovolné okolí bodu a v prostoru R. Konstrukci okolí $W(a) \subset R$ takového, že $v\, W(a) \subset V(a)$, provedeme úplnou indukcí, používajíce přitom definujících u-okolí. Podle (4) existuje definující okolí $D(a)$ takové, že $u\, D(a) \subset U^1(a)$. Položme $D(a) = H^1(a)$. Máme-li už

[11]) E. Čech, Topologické prostory, Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. **66**, (1937), str. D 235.

definovány množiny $H^1(a) \subset H^2(a) \subset \ldots \subset H^n(a)$ s vlastností

$$H^i(a) = \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y) \subset \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{y \in I_{j-1}} u\, D(y) \subset U^i(a) \qquad (*)$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$, při čemž $I_0 = H_0(a) = a$, kdežto $I_j = J \cap (H^j(a) - H^{j-1}(a))$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, budeme definovati množinu $H^{n+1}(a)$ takto: Podle (*) platí pro $i = n$ vztah $H^n(a) \subset U^n(a)$. Okolí $U^{n+1}(a)$ množiny $U^n(a)$ je také okolím podmnožiny $H^n(a)$; podle (4) existuje pro každý bod $y \in I_n \subset H^n(a)$ definující u-okolí $D(y)$ takové, že

$$D(y) \subset u\, D(y) \subset U^{n+1}(a), \text{ tedy } \bigcup_{y \in I_n} u\, D(y) \subset U^{n+1}(a).$$

Položme

$$H^{n+1}(a) = H^n(a) \cup \bigcup_{y \in I_n} D(y),$$

takže $H^n(a) \subset H^{n+1}(a)$. Odtud a z (*) pro $i = n$ vyplývá, že

$$H^{n+1}(a) = \bigcup_{j=1}^{n+1} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} \bigcup_{y \in I_{j-1}} u\, D(y) \subset U^n(a) \cup U^{n+1}(a) = U^{n+1}(a).$$

Platí tedy (*) také pro $i = n + 1$. Takto majíce definovány množiny $H^n(a)$, položme

$$W(a) = \bigcup H^n(a) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y).$$

Množina $W(a)$ je otevřená v R. Vskutku, nechť $z \in W(a)$. Pak existuje $y_0 \in I_p$ tak, že $z \in D(y_0)$. Je-li z hromadným bodem množiny $D(y)$, pak je podle (5) vnitřním bodem množiny $W(a)$. Není-li z hromadným bodem v $D(y)$, jest $y_0 \neq z$ a z vlastnosti definujících okolí vyplývá, že $z \in J \cap W(a)$, tedy $z \in I_q$. Proto existuje definující okolí $D(z) \subset W(a)$; bod z je opět vnitřním bodem množiny $W(a)$. Tím je dokázáno, že $W(a)$ jest otevřená při topologii u; zůstává otevřenou také při U-modifikaci v.

Prvá část tvrzení věty 4 vyplývá nyní bezprostředně ze vztahu

$$W'(a) = u\, W'(a) = v\, W'(a) = v\, W(a) \subset V(a), \qquad (6)$$

kde

$$W'(a) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{y \in I_{j-1}} u\, D(y).$$

Důkaz. Nechť bod x je limitou prosté posloupnosti $\{x_m\}$ bodů $x_m \in W'(a)$. Dokážeme nejprve, že $x \in W'(a)$. Rozeznávejme dva případy: I. Existuje množina $u\, D(y) \subset W'(a)$ obsahující body x_{m_i} vybrané posloupnosti. Podle (3) je tato množina uzavřená, takže $\lim x_{m_i} = x \in u\, D(y)$, to jest $x \in W'(a)$.

II. Nenastane případ I. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $x_m \in u\, D(y_m)$, $y_m \neq a$, body y_m jsou navzájem různé a takové, že $y_m \in I_{n_m}$ s nejmenším možným indexem n_m. Pak jest $x_m \neq y_m$ pro všecka m. Vskutku, kdyby $x_m = y_m$ pro určitý index m, pak by $n_m = 0$, takže $y_m = a$; tato úvaha vyplývá odtud, že ke každému bodu $y \in I_n$, $n > 0$, existuje bod $y' \in I_{n-1}$ takový, že $y \in D(y') \subset u\, D(y')$ a z předpokladu, že n_m je nejmenší index s vlastností $x_m \in u\, D(y_m)$, $y_m \in I_{n_m}$. Uvažme nyní, že $y_m \in J$, takže

$$x_m \in u\, D(y_m) = y_m \cup \bigcup_{n \geqq 2k} E\,(\alpha, \beta; n, \varphi(y_m))$$

a jelikož $x_m \neq y_m$, jest $x_m = (\alpha_m, \beta_m, n_{(m)}, \varphi(y_m))$. Poněvadž $y_m \neq y_n$, jest také $\varphi(y_m) \neq \varphi(y_n)$ pro $m \neq n$. Podle poznámky na str. 62 není $\lim x_m = x$, čímž dostáváme spor. Případ II nemůže nastati.

Dokázali jsme, že $W'(a) = u\, W'(a)$. Zřejmě také $W'(a) = v\, W'(a)$, neboť U-modifikace zachovává u-uzavřené množiny. Poněvadž $D(y) \subset u\, D(y)$, jest $W(a) \subset W'(a)$, tudíž $v\, W(a) \subset v\, W'(a)$. Na druhé straně jest $D(y) \subset W(a)$, tedy $u\, D(y) \subset u\, W(a)$, z čehož vyplývá, že $W'(a) \subset u\, W(a) \subset v\, W(a) \subset v\, W'(a) = W'(a)$, to je $W'(a) = v\, W(a)$. Vztah $W'(a) \subset V(a)$ vyplývá z (*).

*

Regular space, on which evevy continuous functions is constant.

(Summary of the preceding article.)

The present paper concerns the solution of Urysohn's problem of the existence of regular topological spaces R in which every continuous real-valued function is constant. There exists such a space R of arbitrary uncountable cardinal number. First of all it is proved that every real-valued continuous function defined on the space $P = A \times B - (\alpha^*, \beta^*)$ is constant, where A and B are two compact L-spaces of infinite cardinal numbers $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, in which every point except two, α^* and β^*, is isolated. Now, let Q be the set of all quadruples $(\alpha, \beta, n, \gamma)$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, n positive integer, $\gamma \in B$, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$, where two identifications hold:

I. Tychonoff's identification

$(\alpha, \beta^*, n, \gamma) = (\alpha, \beta^*, n + 1, \gamma)$ for all odd integers $n = 1, 3, \ldots$

$(\alpha^*, \beta, n, \gamma) = (\alpha^*, \beta, n + 1, \gamma)$ for all even integers $n = 2, 4, \ldots$

II. $(\alpha^*, \beta, 1, \gamma) = (\alpha^*, \beta, 1, \gamma')$ for all $\gamma \in B$, $\gamma' \in B$.

Let the point-set $\underset{(\alpha,\beta)}{E}(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0) - (\alpha^*, \beta^*, n_0, \gamma_0)$ be homeomorphic

with the space P for all integers $n_0 > 0$ and all $\gamma_0 \in B$; let $\gamma = \varphi(z)$ be a one-to-one correspondence between J and B, where J denotes all isolated points $z = (\alpha, \beta, n, \gamma)$, $\alpha \neq \alpha^*$ and simultaneously $\beta \neq \beta^*$; let us define $\lim z_n = z$, where $z_n = (\alpha_n, \beta_n, n, \varphi(z))$. Then, Q is a regular $\mathbf{L}$-space, on which every real continuous function is constant, but in which the neighbourhoods need not be open. The construction of the space R makes use of Čech's idea of U-modification of topology in Q, in which the neighbourhoods are open.

Urysohn's problem was solved by the present author in September 1946. Towards the end of the same year a copy of the Annals of Mathematics 47 (1946), arrived in Prague, in which Edwin Hewitt presents the following solution:

Let $\aleph$ be an infinite cardinal number which is not the sum of $\aleph_0$ cardinal numbers smaller than $\aleph$. Then there exists a regular space R of cardinal number $\aleph$ in which every continuous real-valued function is constant.

Both solutions, Hewitt's and mine, are independent on one another. Hewitt's solution rightly claims priority, for it was sent to press in October 1945. In spite of this, I have thought it would be of some use to submit my own solution, as it is more general presenting the construction of the space R for an arbitrary uncountable cardinal number. Likewise my method of construction and proof differ from Urysohn's and Hewitt's.