

Jan Mařík

Mocninné řady na obvodě konvergenčního kruhu

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 73 (1948), No. 1, D3–D6

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123147>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1948

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Podmínka je postačující. I. Budiž  $\mathfrak{E}_0 = E[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$ . Z vlastnosti systému  $Z(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  plyne  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{E}_0$ , dále je  $\mathfrak{E}_0 \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  a lehce se dokáže, že  $\mathfrak{E}_0$  je množinové  $\sigma$ -těleso. Je tedy  $\mathfrak{E}_0 = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .

II. Necht'  $\mathfrak{E}' = E[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2 \Rightarrow Z \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)]$ . Platí  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{E}' \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . Když  $Z_i \in \mathfrak{E}'$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) a  $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \subset M_1 \times M_2$ , pak  $Z_i \subset M_1 \times M_2$  pro každé  $i$  a tedy  $Z_i \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$  a proto  $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \in \mathfrak{E}'$ . Necht'  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{E}'$ . Jestliže  $Z_1 - Z_2 \subset M_1 \times M_2$ , pak  $Z_1 \cdot (M_1 \times M_2) - Z_2(M_1 \times M_2) = Z_1 - Z_2$  a  $Z_i(M_1 \times M_2) \in \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$  ( $i = 1, 2$ ) podle I. Je tedy také  $Z_1 - Z_2 \in \mathfrak{E}'$ .  $\mathfrak{E}'$  je proto množinové  $\sigma$ -těleso, tedy  $\mathfrak{E}' = \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ . Je proto  $\mathfrak{E} = E[Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), Z \subset M_1 \times M_2] \subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ .

III.  $\mathfrak{E}$  je ale množinové  $\sigma$ -těleso, jak se lehce ukáže a to nad  $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ . Musí tedy být  $\mathfrak{E} = \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$  j. b. d.

Podmínku lze nahradit postačující: Když  $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , pak  $AM_1 \in t(\mathfrak{A}^*)$  a  $BM_2 \in t(\mathfrak{B}^*)$ , resp. když  $A \times B \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  pak  $AM_1 \in \tau(\mathfrak{A}^*)$  a  $BM_2 \in \tau(\mathfrak{B}^*)$ . Neboť  $(A \times B) \cdot (M_1 \times M_2) = M_1A \times M_2B$  a  $(t(\mathfrak{A}^*), t(\mathfrak{B}^*)) \subset t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ , resp.  $(\tau(\mathfrak{A}^*), \tau(\mathfrak{B}^*)) \subset \tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*)$ . Tato podmínka je splněna, když  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  jsou množinová tělesa.

## Mocninné řady na obvodě konvergenčního kruhu.

Jan Mafík, Praha.

Věta 1. Mějme posloupnosti komplexních čísel  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ . Označme  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$ . Necht' existuje  $A$  tak, že platí  $|\sigma_n| \leq A$  pro každé  $n$ . Budiž řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n|$  konvergentní; budiž  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ . Pak je řada  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  konvergentní.

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \sum_{n=0}^m \alpha_n \beta_n &= \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^m (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \beta_n = \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^m \sigma_n \beta_n - \\ - \sum_{n=1}^m \sigma_{n-1} \beta_n &= \sigma_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^m \sigma_n \beta_n - \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_n' \beta_{n'+1} = \sigma_0 \beta_0 + \sigma_m \beta_m + \sum_{n=1}^{m-1} \sigma_n \beta_n - \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{m-1} \sigma_n \beta_{n+1} - \sigma_0 \beta_1 = \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_n (\beta_n - \beta_{n+1}) + \sigma_m \beta_m.$$

Protože  $|\sigma_m| \leq A$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ , je též  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m \beta_m = 0$ . Také existuje

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_n (\beta_n - \beta_{n+1})$ ; to je totiž součet řady, jejíž členové mají nejvýš takovou prostou hodnotu, jako členové řady  $\sum_{n=0}^{\infty} A |\beta_n - \beta_{n+1}|$ , která je podle předpokladu konvergentní. Existuje tedy též

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_n (\beta_n - \beta_{n+1}) + \sigma_m \beta_m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^m \alpha_n \beta_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n.$$

**Věta 2.** Mějme přirozené číslo  $K$ . (Nevylučujeme  $K = 1$ .)

Mějme mocninnou řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$  o poloměru konvergence  $R > 0$ .

Budiž  $|z_0| = R$ ; řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$  budiž konvergentní;

budiž  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^{Kn} = 0$ . Pak je řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$  konvergentní všude na obvodě konvergenčního kruhu nejvýš s výjimkou těch  $z$ , pro která platí  $z = z_0 \cdot e^{i \frac{2k\pi}{K}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ .

**Důkaz:** Zvolme  $z_1$  na obvodě konvergenčního kruhu, tedy  $|z_1| = R$ . Protože  $\left| \frac{z_1}{z_0} \right| = 1$ , existuje  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , tak, že platí

$z_1 = z_0 \cdot e^{i\varphi}$ . Předpokládejme nyní, že  $\varphi \neq \frac{2k\pi}{K}$  pro  $k = 0, 1, \dots,$

$K - 1$ . Pak je  $0 \leq K\varphi < 2K\pi$ ,  $K\varphi \neq 2k\pi$ , tedy  $e^{iK\varphi} \neq 1$ . Pak

platí  $1 + e^{iK\varphi} + e^{i2K\varphi} + \dots + e^{inK\varphi} = \frac{1 - e^{i(n+1)K\varphi}}{1 - e^{iK\varphi}}$ ; označíme-li

$e^{inK\varphi} = \alpha_n$ , jest  $\left| \sum_{n=0}^m \alpha_n \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{iK\varphi}|}$ . Označíme-li ještě  $a_n z_0^{Kn} = \beta_n$ ,

je podle věty 1. konvergentní řada  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{inK\varphi} \cdot a_n \cdot z_0^{Kn} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 \cdot e^{i\varphi})^{Kn} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^{Kn}.$$

**Věta 3. I.** Mějme přirozené číslo  $K$  a mocninnou řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$  o poloměru konvergence  $R > 0$ . Necht existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$ . Pak je  $|\alpha| = R^K$ . **II.** Budiž řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^{Kn}$  divergentní. Budiž  $|z_0| = R$ . Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$  pak může být konvergentní jen tehdy, je-li  $z_0^K = \alpha$ .

Důkaz části I. Především je  $\alpha \neq 0$ . Kdyby totiž bylo  $\alpha = 0$ ,  $|z| \neq 0$ , byla by  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{K(n+1)}}{a_n z^{Kn}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^K}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = +\infty$  a řada by

byla absolutně konvergentní jen pro  $z = 0$ .

Je tedy  $\alpha \neq 0$ . Pak existuje  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} z^{K(n+1)}}{a_n z^{Kn}} = \frac{z^K}{\alpha}$  pro každé  $z \neq 0$ . Je-li  $|z| < \sqrt[K]{|\alpha|}$ , je  $|q| < 1$  a řada je absolutně konvergentní; je-li  $|z| > \sqrt[K]{|\alpha|}$ , je  $|q| > 1$  a řada nekonverguje ani relativně, protože od jistého indexu prostá hodnota členů dokonce roste. Je tedy  $R = \sqrt[K]{|\alpha|}$  neboli  $R^K = |\alpha|$ .

Důkaz části II. Budiž  $z_0^K \neq \alpha$ ,  $|z_0| = R$ . Pak existuje  $N_1$ , že  $n > N_1 \Rightarrow a_n \neq 0$  (jinak by nemělo smysl mluvit o limitě výrazu  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ). Označme  $|z_0^K - \alpha| = 2\varepsilon$ . Pak existuje  $N_2$ , že

$$n > N_2 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| z_0^K - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \geq |z_0^K - \alpha| - \left| \alpha - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \varepsilon.$$

Zvolme  $n > \max(N_1, N_2)$ . Pak platí  $|a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}| = |a_{n+1} z_0^{Kn}| \cdot \left| z_0^K - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > |a_{n+1}| R^{K(n+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{R^K}$ . To je člen divergentní řady. Nemůže tedy řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$  být konvergentní.

Příklad. U řady  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}$  ( $= \frac{\text{arc tg } z}{z}$  pro  $0 < |z| < 1$ ) je  $K = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1$ . Řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^{K(n+1)} - a_n z^{Kn}|$  může být pro  $|z| = 1$  konvergentní jen pro  $\pm i$ . Tam však konverguje. Platí tedy  $\text{arc tg } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$  i pro  $|z| = 1$  mimo body  $\pm i$ .

## Algebraická křivka v prostoru jako průsek ploch.

Dr. Josef Metelka, Jablonec nad Nisou.

Algebraická křivka v prostoru není vždy úplným průsekem dvou algebraických ploch. Jako příklad nám může sloužit prostorová kubika, jež je dokonale určena teprve třemi kvadratickými plochami. Vznikla tudíž otázka, kolika ploch jest obecně potřeba k určení alg. křivky v prostoru. Hoření hranici stanovili ryze algebraickou cestou Kronecker<sup>1)</sup>, Molk<sup>2)</sup> a König<sup>3)</sup> pro  $r$ -rozměrný prostor: Algebraická křivka v  $r$ -rozměrném prostoru jest určena nejvýše  $r + 1$  nadplochou. Tato věta se proto nazývá (zejména v německé literatuře) větou Kroneckerovou.

O deset let později po Kroneckerovi podal K. T. Vahlen<sup>4)</sup> příklad křivky v obyčejném prostoru, k jejímuž určení jest skutečně třeba čtyř ploch. Je to racionální křivka pátého stupně s jedinou kvadrisekantou. Tento příklad jest od té doby citován a přijímán všemi geometry (viz na př. J. Vojtěch<sup>5)</sup>, E. Bertini<sup>6)</sup> a j.) a křivka se nazývá Vahlenova.

Otázka se zdála být rozřešena, až v r. 1942 upozornil O. Peron (přesný název článku nemohu bohužel udat), že Vahlenův příklad je chybný. Jeho křivka je prý úplným průsekem již tří ploch. Otvírají se tedy nové problémy: Bud naléztí nový a skutečně správný příklad křivky, k jejímuž určení nestačí tři plochy, anebo dokázati obecně, že stačí již tři plochy k určení každé křivky v prostoru.

Pokusím se naznačit, jakých cest je možno použít. Dokážeme si dvě věty:

a) *Křivka  $c^n$  stupně  $n$ , která má aspoň jednu  $(n - 1)$ -sekantu, jest určena třemi plochami.*

$(n - 1)$ -sekanta budiž  $p$ , na ni zvolíme mimo křivku dva body  $A, B$ . Z každého z těchto bodů se křivka  $c^n$  promítá racionálním