Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jiří Klapka

O dvou druzích přímkových ploch

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 30--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123142

O dvou druzích přímkových ploch.

Napsal *Jiří Klapka*, asistent české techniky v Brně.

V tomto článku jest verifikován již známý výsledek,[1]) že existuje ∞^1 projektivně různých přímkových ploch, jejichž jedna fleknodální čára — Cy — jest kuželosečka a druhá — Cz — jest rovinná. Kromě toho nalezeny rovnice kř. Cz a další typ ploch od předešlého odlišný tím, že Cz má vlastnost duální. K výpočtu jsem použil methody p. prof. Čecha,[2]) jemuž jsem zavázán díky za mnohou cennou radu.

I. Předpokládejme, že body y a z, jejichž souřadnice jsou funkcemi projektivního oblouku v,[3]) opisují fleknodální čáry plochy R vytvořené přímkou (yz) a kromě toho, že faktor přímkových souřadnic je zvolen tak, aby forma $f\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$ byla ve tvaru normalisovaném.[3]) Pak je ještě možno násobiti souřadnice y takovým ϱ a z takovým $\frac{1}{\varrho}$, aby bylo $f\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}=2t_1t_2$ a $a^2=c^2$, t. j. $a=\eta c$, kde $\eta^2=1$. Jest tedy možno základní rovnice theorie přímkových ploch[4]) psáti ve tvaru

$$y''=-2by'+2\eta cz'+(\eta c^2-b^2-b'-1-j)\,y+\eta c'z\ldots\quad(1^a)$$

$$z''=-2cy'+2bz'-c'y+(\eta c^2-b^2+b'+1-j)\,z\ldots(1^b).$$

Derivujme rovnici (1^a) a vylučme z ní z' a z'' užívajíce rovnic (1). Obdržíme

$$y'''+3p_1y''+3p_2y'+p_3y=\varphi z$$

takže je-li

$$\eta\varphi=c''+2c\,(\eta c^2-b^2+b'+1-j)-c'\,\frac{3c'+4bc}{2c}=0\ldots(2)$$

jest kř. Cy rovinná. Podobně nalézáme, že Cz jest rovinná je-li

$$c''+2c\,(\eta c^2-b^2-b'-1-j)-c'\,\frac{3c'-4bc}{2c}=0\ldots(3)$$

---

[1]) jejž zjistil Carpenter v Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 16., str. 509.

[2]) Ed. Čech: Nová methoda projekt. geom. zborcených ploch, Časopis roč. LIII., čís. 2.

[3]) Definováno tamtéž, v až na addit. konstantu.

[4]) Tamtéž, rovnice (5) v druhém sloupci.

Z posledních dvou rovnic odečtením a sečtením plynou jednodušší

$$bc' - cb' - c = 0 \qquad (4^a)$$

$$2c\,[c'' + 2c\,(\eta c^2 - b^2 - j)] - 3c'^2 = 0. \qquad (4^b)$$

Se zřetelem na rovnice (4) jest

$$p_1 = -\frac{1}{2}\frac{c'}{c},\quad p_2 = \bar{\eta} c^2 - b^2 - 1 + \frac{1}{3}(1 + j),$$

$$p_3 = \frac{3}{2}\frac{c'}{c}(\bar{\eta} c^2 - b^2 - b' - 1 - j) + 2b\,(\bar{\eta} c^2 - b^2 - 1 - j) + j' + b''.$$

Podmínka, aby Cy byla kuželosečka jest — jak je známo z theorie rovnice adjungované[5] —

$$\Theta_3 = P_3 - \frac{3}{2}P'_2 = 0,$$

kde $P_2 = p_2 - p_1^2 - p'_1,\; P_3 = p_3 - 3p_1 p_2 + 3p_1^3 - p_1''$.

V našem případě tato podmínka zní

$$\Theta_3 = \frac{1}{2}j' + b'' + 2\bar{\eta} bc^2 - 2b^3 - 2b\,(1 + j) - \frac{c'}{c}(1 + j) + 3bb' +$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{c'c''}{c^2} - \frac{1}{4}\frac{c'''}{c} - \frac{3}{2}\left(\frac{c'}{c}\right)^3 - 3\frac{c'}{c}b^2 - \frac{3}{2}b'\frac{c'}{c} - \frac{3}{2}\frac{c'}{c} = 0 \ldots \quad (4^c)$$

Abychom řešili systém dif. rovnic (4) položme ve shodě s (4^a)

$$b = -\frac{\alpha}{\alpha'},\qquad c = \frac{1}{\alpha'} \qquad (6^a)$$

takže dle (4^b) jest

$$j = \frac{1}{4\alpha'^2}(4\bar{\eta} - 4\alpha^2 + \alpha''^2 - 2\alpha'\alpha'''). \qquad (6^b)$$

Dosazením do (4^c) obdržíme

$$\Theta_3 = 2\frac{1}{\alpha'}(\alpha'' + 2\alpha) = 0.$$

Poněvadž předpokládáme fleknodální čáry různé, jest $\frac{1}{\alpha'} = c \neq 0$ a zbývá

$$\alpha'' + 2\alpha = 0,$$

t. j. $\alpha = c_1 \sin\sqrt{2}\,v + c_2 \cos\sqrt{2}\,v$, kde c_1 a c_2 nesmíme bráti současně rovny nule.

---

[5]) viz na př. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surf., str. 61.

Poněvadž plocha R se nezmění píšeme-li za $\sqrt{2}\, v \ldots \sqrt{2}\, v + K$, t. j. za α

$$(c_1 \cos K - c_2 \sin K) \sin \sqrt{2}\, v + (c_1 \sin K + c_2 \cos K) \cos \sqrt{2}\, v$$

lze vždy zvolit K tak, aby bylo prostě

$$\alpha = m \sin \sqrt{2}\, v, \tag{7}$$

kde m je proměnný parametr, jehož pevné hodnotě přísluší určité funkce b, c, j a při určitém η určitá plocha. To jest výsledek Carpenterův.

Dosadíme-li za α z (7) do (6^a) a (6^b) a odtud za b, c, j do (1) obdržíme systém

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u^2-1}{u} y' + \frac{\eta\sqrt{2}}{2m}\frac{u^2+1}{u} z' + \left[\frac{(u^2-1)^2}{8u^2} - 1\right] y + \frac{\eta}{4m}\frac{u^4-1}{u^2} z \tag{8^a}$$

$$z'' = -\frac{\sqrt{2}}{2m}\frac{u^2+1}{u} y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u^2-1}{u} z' - \frac{1}{4m}\frac{u^4-1}{u^2} y - \left[\frac{3(u^2-1)^2}{8u^2} + 1\right] z \tag{8^b}$$

kamž bylo zavedeno $u = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} v\right)$, poněvadž se tím další počet formálně zjednoduší.

Pokládáme-li $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ za rovnice vrcholů pohyblivého souřadného trojúhelníka, je patrno z rovnic (8), že průsečík tečny křivky Cz s rovinou křivky Cy má rovnici

$$\left[\frac{(u^2-1)^2}{8u^2} - 1\right] y + \frac{\sqrt{2}\,(u^2-1)}{2u} y' - y'' = 0$$

a průsečík tečny křivky Cy s rovinou křivky Cz rovnici

$$\frac{u^2-1}{2u} y + \sqrt{2}\, y' = 0.$$

Tyto body se pohybují ale jejich spojnice o souřadnicích

$$y : y' : y'' = 1 : -\frac{\sqrt{2}\,(u^2-1)}{4u} : -\left[\frac{(u^2-1)^2}{8u^2} + 1\right] \ldots \tag{9}$$

jest pevná. Příslušné y, které vyplývá logarithmickou kvadraturou,

$$y_1 = \sqrt{\frac{2u}{u^2+1}} \quad \text{spolu se } z_1 = 0$$

jest již jeden pár partikulárních řešení systému (8). Podobně

$$y_2 = 0, \quad z_2 = \sqrt{\frac{2u}{u^2+1}}$$

jest druhý pár. Abychom nalezli další 2 dvojice nezávislých řešení, hledejme rovnici pólu přímky (9) vzhledem k Cy a obě tečny jím jdoucí, neboť to jsou také pevné přímky. Můžeme použíti kovariantu[6])

$$C_2 = z^2 - 2y\varrho - P_2 y^2$$

kde $\quad z = y' + p_1 y, \quad \varrho = y'' + 2p_1 y' + p_2 y$

který, jak upozornil Čech,[7]) položen rovným nule dává rovnici oskulační kuželosečky v lokálním systému souřadném.

Jest tedy

$$C_2 = (2p_1^3 - 3p_2 + p'_1)\, y^2 - 2p_1 yy' - 2yy'' + y'^2 = 0,$$

čili podle (6) a (5)

$$\left[\frac{3(u^2-1)^2}{8u^2} - \bar{\eta}\,\frac{(u^2+1)^2}{2m^2u^2}\right] y^2 + \frac{\sqrt{2}\,(u^2-1)}{u}\, yy' - 2yy'' + y'^2 = 0$$

rovnice kř. Cy. Rovnice pólu přímky (9) tedy zní

$$\left[\frac{3(u^2-1)^2}{8u^2} - \bar{\eta}\,\frac{(u^2+1)^2}{2m^2u^2} + 1\right] y - y'' = 0.$$

Řešením posledních rovnic nalézáme souřadnice hledaných tečen

$$y : y' : y'' =$$

$$1 : \left[-\frac{\sqrt{2}\,(u^2-1)}{4u} \pm \frac{\varepsilon\sqrt{2}\,(u^2+1)}{2u}\right] : \left[\frac{3(u^2-1)^2}{8u^2} - \bar{\eta}\,\frac{(u^2+1)^2}{2m^2u^2} + 1\right]$$

$$\text{kde } \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\bar{\eta}}{m^2}}.$$

Odtud opět vychází logarithmickou kvadraturou

$$y_3 = u^{\varepsilon}\sqrt{\frac{2u}{u^2+1}}, \qquad y_4 = u^{-\varepsilon}\sqrt{\frac{2u}{u^2+1}}$$

(integrační faktory vzaty rovné 1).

Příslušná z vyplývají z (8^a) jako řešení rovnic

$$z' + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{u^2-1}{u}\, z = \bar{\eta} m\sqrt{2}\, u^{\pm\varepsilon}\sqrt{\frac{u^2+1}{2u}}\left(\varepsilon \mp \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$$

[6]) Wilczynski, l. c. p. 61.

[7]) Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek str. 27. Použitá methoda, kterou lze ze znalosti pevných utvarů nalézti řešení, je vyložena v práci Ed. Čech: Surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes, str. 4.—5.

takže jest

$$z_{3,4} = \bar{\eta} m \varepsilon \sqrt{\frac{u}{u^2+1}} \int (u^2+1)\, u^{\pm\varepsilon-1} \left(\varepsilon \mp \frac{u^2-1}{u^2+1}\right) dv,$$

kde integrační konstanta jest rovna nule vzhledem k páru $(y_2\, z_2)$.

Poněvadž jest $dv = \sqrt{2}\, \frac{du}{u^2+1}$ můžeme psáti

$$z_{3,4} = \bar{\eta} m \varepsilon \sqrt{\frac{2u}{u^2+1}} \left(u^{\pm\varepsilon} \mp \int u^{\pm\varepsilon-1} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du\right).$$

Po vydělení výrazem $\sqrt{\frac{2u}{u^2+1}}$ obdržíme konečně rovnice křivek Cy resp. Cz

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 & z_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 & z_2 &= 1 \\ y_3 &= u^{\varepsilon} & z_3 &= \bar{\eta} m \varepsilon \left(u^{\varepsilon} - \int u^{\varepsilon-1} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du\right) \\ y_4 &= u^{-\varepsilon} & z_4 &= \bar{\eta} m \varepsilon \left(u^{-\varepsilon} + \int u^{-\varepsilon-1} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du\right) \end{aligned}\right\} \quad 10$$

kde jest $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\bar{\eta}}{m^2}} \neq 0$, $\bar{\eta}^2 = 1$, $\frac{1}{m} \neq 0$.

Je-li $\varepsilon = 0$, t. j. $m^2 = \bar{\eta}$, nelze použíti předešlého postupu, neboť společná přímka rovin fleknodálních křivek se dotýká křivky Cy. V tomto případě lze snadno nalézti, že rovnice fleknodálních čar plochy R jsou

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 & z_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 & z_2 &= 1 \\ y_2 &= lu & z_3 &= \bar{\eta} m\, l\, \frac{2u}{u^2+1}\, du \\ y_4 &= l^2 u & z_4 &= 2\bar{\eta} m \left(lu - \int \frac{u^2-1}{u^2+1}\, lu\, du\right). \end{aligned}\right\} \quad (10^a)$$

II. Upevníme-li faktory souřadnic opět jako v části I., splňují rovinové souřadnice ζ, η tečných rovin plochy R v bodech křivky Cz resp. Cy rovnici[8])

[8]) Čech, Nová meth. atd., poslední rovnice (5) v druhém sloupci.

$$\zeta'' = -2c\eta' + 2b\zeta' - c'\eta + (\bar{\eta}c^2 - b^2 - b' - 1 - j)\zeta \ldots \quad (11)$$

při čemž jest[9])

$$\begin{array}{lll} & \eta = (y, z, y') & \zeta = (y, z, z') \\ \text{a obráceně} & y = (\eta, \zeta, \eta') & z = (\eta, \zeta, \zeta'). \end{array} \Bigg\} \quad (12)$$

Z rovnice (11) nalézáme podmínku, aby rovina ζ procházela pevným bodem

$$c'' + 2c(\bar{\eta}c^2 - b^2 - b' + 1 - j) - c'\frac{3c' - 4bc}{2c} = 0.$$

Že Cy jest rovinná opět vyjadřuje rovnice (2) a odečtením resp. sečtením této s poslední rovnicí obdržíme

$$c'' + 2c(\bar{\eta}c^2 - b^2 + 1 - j) - \frac{3}{2}\frac{c'^2}{c} = 0$$
$$cb' - bc' = 0.$$

První z obou rovnic lze psáti

$$j = \frac{c''}{2c} - \frac{3c'^2}{4c^2} + \bar{\eta}c^2 - b^2 + 1, \quad (13^a)$$

takže jest

$$j' = \frac{c'''}{2c} - 2\frac{c'c''}{c^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{c'}{c}\right)^3 + 2\bar{\eta}cc' - 2bb', \quad (13^b)$$

kdežto dle druhé

$$c = mb, \quad (14)$$

dě m jest konstanta.

Srovnáním shledáváme, že i v tomto případě p_1 a p_3 se stejně vyjadřují z $\bar{\eta}$, b, c, j jako minule, což pišme

$$p_1^* = p_1, \qquad p_3^* = p_3,$$

avšak o p^x_2 platí

$$p_2^* = p_2 - b\frac{c'}{c} + b' + 1.$$

Vzhledem k (14) jest

$$p_2^{*\prime} = p_2' + b'' - b\frac{c''}{c},$$

takže

$$\Theta_3^* = \Theta_3 + \frac{3}{2}b\frac{c''}{c} - \frac{3}{2}b'' + \frac{3}{2}\frac{c'}{c} - \frac{3}{2}b\left(\frac{c'}{c}\right)^2 + \frac{3}{2}b'\frac{c'}{c} = 0,$$

[9]) Tamtéž, rov. (3).

t. j. podle (4^c), (14) a (13)

$$\Theta_3^* = \frac{c'}{c} - 2mc = 0$$

jest rovnice vyjadřující, že Cy jest kuželosečka.

Z ní vyplývá[10])

$$c = -\frac{1}{2mv}, \qquad \frac{1}{m} \neq 0$$

a dle (14) a (13^a)

$$b = \frac{1}{2v}, \qquad j = \frac{\bar{\eta}}{4m^2 v^2} + 1,$$

takže existuje ∞^1 projektivně různých ploch žádaných vlastností.

Poněvadž jediný invariant liché váhy diff. rovnice pro y jest nulový, je možno — dle theorému Brioschiho[11]) — vyjádřiti obecné řešení této rovnice jako homogenní kvadratickou formu dvou nezávislých řešení rovnice

$$\varphi'' + \frac{3}{4} P_2^* \varphi = 0,$$

při čemž koefficienty formy jsou konstanty integrační.

V našem případě $P_2^* = \frac{\bar{\eta}}{3m^2 v^2} + \frac{2}{3}$

a rovnici

$$\varphi'' + \frac{1}{2}\varphi = -\frac{\bar{\eta}}{4m^2}\frac{1}{v^2}\varphi \tag{15}$$

lze převésti substitucí

$$\varphi = \psi \sqrt{v}$$

$$v = \pm\sqrt{2}\, w$$ na rovnici Besselovu

$$w^2 \frac{d^2\psi}{dw^2} + w\frac{d\psi}{dw} + \left(w^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)\psi = 0 \tag{15a}$$

kde opět $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\bar{\eta}}{m^2}}$.

---

10) Konstantu integrační netřeba vpisovati, poněvadž plocha se nemění při změně v ve $v +$ konst.

11) Wilczynski, l. c., p. 47.

Jsou-li $\frac{\varphi_1(v)}{\sqrt{v}}$, $\frac{\varphi_2(v)}{\sqrt{v}}$ dvě řešení poslední rovnice a tedy φ_1 resp. φ_2 řešení rovnice (15^a), lze psáti

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= \varphi_1^2 \\ y_3 &= \varphi_1 \varphi_2 \\ y_4 &= \varphi_2^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16^a)$$

Abychom nalezli z_1 stačí dosaditi do (1^a), čímž obdržíme

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{1}{2v} \quad \text{a tudíž}$$

$$z_1 = \sqrt{v}.$$

Další partikulární řešení z_2, z_3, z_4 obdržíme bez kvadratur, neboť známe bod V, jímž procházejí roviny ζ. Jest totiž

$$V = (\zeta, \zeta', \zeta''), \qquad \text{t. j. podle (11)}$$

$$V = -2c\,(\zeta, \zeta', \eta') - c'\,(\zeta, \zeta', \eta).$$

Dle (12) jest $\quad z' = (\eta', \zeta, \zeta') + (\eta, \zeta, \zeta'') \quad$ a odtud

$$(\zeta, \zeta', \eta') = z' + 2cy - 2bz,$$

takže $\quad -\overline{\eta}\, V = 2\overline{\eta} c z' + 4\overline{\eta} c^2 y + \overline{\eta}\,(c' - 4bc)\, z,$

t. dosadíme-li do tohoto výrazu za $2\overline{\eta} c z'$ z (1^a)

$$-\overline{\eta}\, V = y'' + 2by' + (3\overline{\eta} c^2 + b^2 + b' + 1 + j)\, y - 4\overline{\eta} b c z.$$

Nyní volme roh souřadného tetraedru protější stěně $x_1 = 0$ právě v bodě V. Odtud obdržíme výrazy pro zbývající souřadnice bodu na Cz, takže rovnice této křivky jsou

$$z_1 = -\sqrt{v}$$

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4}\overline{\eta} m + 2\overline{\eta} m v^2\right) \varphi_1^2 + 2\overline{\eta} m v\, \varphi_1 \varphi'_1 + \\ &\quad + 2\overline{\eta} m v^2 (\varphi_1 \varphi_1'' + \varphi_1'^2) \\ z_3 &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4}\overline{\eta} m + 2\overline{\eta} m v^2\right) \varphi_1 \varphi_2 + \overline{\eta} m v\, (\varphi_1 \varphi'_2 + \varphi'_1 \varphi_2) + \\ &\quad + \overline{\eta} m v^2 (\varphi_1 \varphi''_2 + 2\varphi'_1 \varphi'_2 + \varphi''_1 \varphi_2) \\ z_4 &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{4}\overline{\eta} m + 2\overline{\eta} m v^2\right) \varphi_2^2 + 2\overline{\eta} m v\, \varphi_1 \varphi_1'^2 + \\ &\quad + 2\overline{\eta} m v^2 (\varphi_2 \varphi''_2 + \varphi_2'^2,) \end{aligned}\right\} (16^b)$$

kde m je proměnný parametr — pro určitou plochu pevný —

$$\frac{1}{m} \neq 0.$$ [12])

*

Sur deux espèces de surfaces réglées.

(Extrait de l'article précédent.)

On sait qu'il existe une infinité simple de surfaces réglées, différentes au point de vue projectif, dont l'une courbe flecnodale (C_y) est une conique, l'autre (C_z) une courbe plane. Ce résultat, du à Carpenter, est verifié, dans l'article précédent, par un calcul plus simple. De plus, les équations paramétriques (10) des courbes C_y et C_z ont été trouvées. Il est facile de déterminer les surfaces réglées, sur lesquelles la courbe C_z a la propriété corrélative. Les équations (16^a), (16^b) sont les équations paramétriques des courbes flecnodales des surfaces de cette espèce; il en existe, de même, une infinité simple. Dans ces équations, les expressions

$$\frac{\varphi_1}{\sqrt{v}}, \quad \frac{\varphi_2}{\sqrt{v}}$$

sont deux solutions indépendantes de l'équation de Bessel (15^a).

---

[12]) Z rovnice 14 vyplývá tato věta: Budiž na ploše R tvořící přímka pevná p a jiná pohyblivá q. Tato poslední protíná fleknod. čáru C_y, resp. C_z v bodech, jimiž vedené asymptotické čáry protínají p v jiných bodech M a N. Bodové řady vytvořené takto bodem M resp. N jsou projektivní, jestliže kř. C_y jest rovinná a C_z splňuje podmínku korrelativní.