Antonín Pleskot

Zobecnění věty týkající se paraboly Steinerovy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 1, 51--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123137

Zobecnění věty týkající se paraboly Steinerovy.

Dr. *Ant. Pleskot*, profesor v Plzni.

Jest známa věta Steinerova: Tečna, normála a osy kuželosečky jsou tečnami paraboly a dotyčný bod na normále, jakožto tečně paraboly jest středem křivosti v bodě, v němž tečna ke kuželosečce byla vedena.

Tato věta jest zvláštním případem obecné věty platící pro každou křivku a již možno takto vysloviti: Tečna, normála v libovolném bodě křivky a dvě jiné přímky kolmo na sobě stojící, z nichž jedna jest libovolná a druhá již první stanovená, lze pokládati za čtyry tečny paraboly a dotyčný bod na normále, jakožto tečně paraboly jest středem křivosti křivky v bodě, v němž tečna byla ke křivce vedena. Použijeme-li hořejší věty Steinerovy možno předchozí větu též vyjádřiti takto: V daném bodě A křivky oskuluje s křivkou centrální kuželosečka, za jejíž jednu osu možno voliti libovolnou přímku, volbou kteréžto jest již osa druhá stanovena.

Řešení této úlohy mohli bychom provésti způsobem jak jsem naznačil v článku „Strojení středu křivosti methodou analyticko-deskriptivní" (roč. 45. Čas. pro pěst. math. a fys.); možno však řešiti úlohu tuto jednodušeji použitím věty, že tečny paraboly vymezují na dvou jejích tečnách řady podobné.

V daném bodě A křivky (k) (obr. 1) veďme tečnu t, normálu n a stanovme dvě přímky p a q tak, aby tvořily s přímkami t, n, čtyry tečny paraboly (p) a dotyčný bod na normále jakožto tečně paraboly (p), aby byl středem křivosti pro bod A.

Křivka (k) mějž rovnici:

$$y = f(x), \tag{1}$$

vztaženou na pravoúhlé osy x a y, z nichž jedna budiž volena tak, aby byla rovnoběžna s jednou z přímek p a q, k. p. s přímkou p budiž rovnoběžná osy y. Pak rovnice přímky p zní:

$$\xi = a.$$

Bod A mějž souřadnice (x, y). Dvě soumezné normály dané křivky lze považovati za dvě soumezné tečny paraboly (p), jež vznikne jakožto obalová křivka spojnic dvou podobných řad ležících na dvou pevných přímkách a to tečně t a přímce p.

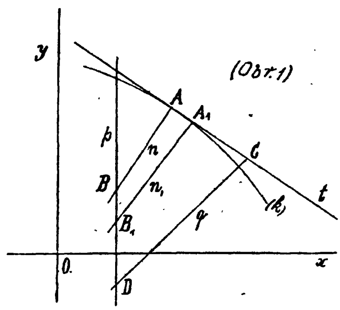
Normála n v bodě A ke křivce vedená protne přímku p v bodě B, jehož pořadnice budiž η.

Pak
$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(a - x),$$

t. j. $$\eta = y - \frac{1}{y'}(a - x). \qquad (\alpha)$$

Soumezná normála n_1 k normále n prochází soumezným bodem A_1 k bodu A na tečně t a protne přímku p v bodě B_1. Přímky $t, n, n_1\, p$ jsou čtyry tečny paraboly (p) a průsečík přímek n a n_1 stanoví dotyčný bod K paraboly s přímkou n, t. j. střed křivosti křivky (k) v bodě A.

Další tečnu paraboly (p) určíme tak, že na tečně t zvolíme libovolný bod C o souřadnicích x_0, y_0 a vyhledáme příslušný bod D o souřadnicích (a, η_0) na přímce p tak aby přímka CD byla tečnou paraboly (p).



Podmínka pro bod D plyne z podobnosti řad bodových na t a p; tu platí:

$$\frac{BB_1}{BD} = \frac{AA_1}{AC},$$

čili:

$$\frac{d\eta}{\eta_0 - \eta} = \frac{dx}{x_0 - x},$$

z níž plyne:

$$\eta_0 - \eta = \frac{d\eta}{dx}(x_0 - x),$$

t. j.

$$\eta_0 = \eta + \frac{d\eta}{dx}(x_0 - x),$$

při čemž η a $\frac{d\eta}{dx}$ určí se z rovnice (α).

Rovnice tečny $DC \equiv q$ paraboly (p) pak zní:

$$q \equiv Y - y_0 = \frac{y_0 - \eta - (x_0 - x)\frac{d\eta}{dx}}{x_0 - a}(X - x_0), \qquad (2)$$

čímž určena soustava tečen paraboly (p) závislých na jediném neodvisle proměnném parametru x_0, ježto y_0 jest vázáno s veličinou x_0, rovnicí:

$$y_0 - y = y'(x_0 - x). \tag{β}$$

K dané přímce p volíme tedy libovolnou přímku q ze soustavy (2); zvolme z ní tečnu q, která jest kolmá ku p, t. j. rovnoběžná s osou x.

Tu platí:

$$y_0 - \eta - (x_0 - x)\frac{d\eta}{dx} = 0 \tag{γ}$$

a pak rovnice hledané tečny q zní:

$$Y = y_0.$$

V rovnici (γ) dosaďme za η a $\frac{d\eta}{dx}$ hodnoty z rovnice (α).

Tu obdržíme:

$$y_0 - y + \frac{a-x}{y'} - (x_0 - x)\left(y' + \frac{y' + (a-x)\frac{dy'}{dx}}{y'^2}\right) = 0,$$

čili vzhledem ku (β):

$$\frac{a-x}{y'} - \frac{x_0 - x}{y'} - \frac{(x_0 - x)(a - x)}{y'^2}\frac{dy'}{dx} = 0,$$

kteréžto rovnici lze dáti tvar:

$$\frac{y'}{x_0 - x} - \frac{y'}{a - x} - \frac{dy'}{dx} = 0 \tag{3}$$

aneb

$$\frac{dy}{y_0 - y} - \frac{dx}{a - x} = \frac{dy'}{y'}. \tag{3}$$

Možno tedy vysloviti větu:

Tečna, normála v bodě A křivky (k), přímka p o rovnici $X = a$ a přímka q na ní kolmá o rovnici $Y = y_0$, stanoví čtyry tečny paraboly a dotyčný bod na normále jakožto tečně paraboly jest středem křivosti křivky v bodě A, jestliže veličiny a a x_0, resp. a a y_0 vyhovují rovnicím (3), v nichž x a y značí souřadnice dotyčného bodu A křivky (k) a veličiny infinitesimálné taktéž k téže křivce se vztahují.

Při mnohých křivkách vhodnou volbou jedné z veličin a, x_0, y_0 lze druhé snadno dle rovnice (3) konstruovati a tím i střed křivosti křivky sestrojiti. Podotknouti sluší, že za tyto veličiny volíme vhodné funkce souřadnic bodu dotyčného.

Řešení předchozí úlohy vede k řešení opačné zajímavé úlohy:

Jsou dány dle určitého zákona přímky p a q na sobě kolmo stojící a jest nalézti křivky, aby jejich normály a tečny tvořily s přímkami p a q, čtvěřinu přímek, jež jsou tečnami paraboly a dotyčný bod normály s parabolou, aby byl středem křivosti křivky.

Tu pak z jedné z rovnic (3), v níž dvě z veličin a, x_0, y_0 jsou známy, obecně funkce souřadnic bodu dotyčného, integrací zjednáme si typus křivek podmínce předložené hovících. Integrály těchto rovnic obsahují dvě konstanty, jež jsou tečnou s bodem dotyčným úplně stanoveny.

Aplikujme tuto úvahu na některé zvláštní případy. Hledejme křivky takové, aby dvě přímky p a q kolmo na sobě stojící tvořily s normálou i tečnou v libovolném bodě A křivky vedenou čtyry tečny paraboly a dotyčný bod na normále aby byl středem křivosti křivky v bodě A.

Položme přímky p a q za osy souřadnic, t. j. položme v druhé rovnici (3) $a = 0$, $y_0 = 0$.

Tu obdržíme:

$$-\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'},$$

t. j.

$$l\frac{x}{y} = l\, C\frac{dy}{dx}$$

čili

$$\frac{x}{y} = C\frac{dy}{dx},$$

aneb

$$x\,dx - c\,y\,dy = 0;$$

další integrací obdržíme:

$$x^2 - Cy^2 = C_1,$$

kteroužto rovnici vzhledem k libovolným hodnotám konstant C a C_1 lze psáti ve tvaru:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1;$$

značí-li α a β libovolné konstanty. Rovnice předchozí značí středovou kuželosečku, čímž dospěli jsme ke známé větě Steinerově, že tečna a normála s osami kuželosečky tvoří čtyry tečny paraboly a dotyčný bod normály s parabolou jest středem křivosti kuželosečky.

Tato věta jest zvláštním případem obecnější věty, již obdržíme položíme-li v rovnici (3)

$$y_0 = ky, \quad a = kx,$$

kdež k značí libovolnou konstantu; položíme-li $k = 0$, máme případ předchozí.

K vůli jednoduchosti dejme konstantě tvar

$$k = \frac{n-2}{n-1}$$

kdež ovšem n značí libovolné číslo různé od 1. Dosadíme-li hodnoty pro y_0 a a do rovnice (3), obdržíme:

$$-(n-1)\frac{dy}{y} + (n-1)\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'},$$

z níž integrací plyne:

$$-(n-1)\,l\,y + (n-1)\,l\,x = l\,C\,y',$$

t. j.

$$\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} = Cy'$$

čili:

$$Cdy\,y^{n-1} - dx\,x^{n-1} = 0,$$

t. j.

$$\frac{Cy^n}{n} - \frac{x^n}{n} = C_1,$$

kteréžto rovnici vzhledem k libovolným konstantám lze dáti tvar:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{y}{\beta}\right)^n = 1,$$

kdež α a β značí libovolné konstanty.

Rovnice tato znamená křivky Lamé-ho, čímž dospíváme ku větě: Tečna, normála v bodě A křivky Lamé-ho a přímky vedené rovnoběžně s osami souřadnic bodem O, o souřadnicích

$$x_1 = \frac{n-2}{n-1}\,x,$$

$$y_1 = y\,\frac{n-2}{n-1}$$

jsou tečnami paraboly a dotyčný bod na normále jakožto tečně paraboly jest středem křivosti křivky v bodě A, aneb: Křivky Lamé-ho oskulují v daném bodě s kuželosečkou, jejíž osy jsou rovnoběžny s osami souřadnic a jejíž střed O_1 jest na spojnici OA tak položen, že

$$OO_1 = OA\frac{n-2}{n-1},$$

značí-li O počátek souřadnic. Pro $n=2$ jest délka OO_1 rovna nule pro každý bod křivky, čímž dospíváme k větě Steinerově.

Avšak i ke konstrukci středu křivosti složitějších křivek, jichž zvláštním případem jsou křivky Lamé-ho, lze dospěti a sice ke křivkám tvaru:

$$A x^n + B y^m = C,$$

kde tedy mocnitelé při x a y jsou různé.

Položme v rovnici (3)

$$a = k_1 x, \quad y_0 = k_2 y$$

a dejme konstantám k_1 a k_2 tvar:

$$k_1 = \frac{n-2}{n-1}, \quad k_2 = \frac{m-2}{m-1}.$$

Rovnice přejde ve tvar:

$$-\frac{dy(m-1)}{y} + \frac{dx(n-1)}{x} = \frac{dy'}{y'},$$

z níž integrací plyne:

$$-(m-1)\, l\, y + (n-1)\, l\, x = l\, C\, y',$$

t. j.

$$\frac{x^{n-1}}{y^{m-1}} = C\frac{dy}{dx},$$

t. j.

$$\frac{x^n}{n} - \frac{C y^m}{m} = C_1,$$

kteréžto rovnici lze dáti tvar:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{y}{\beta}\right)^m = 1, \qquad (\delta)$$

kdež α a β značí libovolné konstanty.

Máme tedy větu: Křivky tvaru (δ) oskulují v libovolném bodě $A\,(x, y)$ s kuželosečkou, jejíž osy jsou rovnoběžny s osami souřadnic a jejíž střed O_1 má souřadnice

$$x_1 = x\frac{n-2}{n-1}, \quad y_1 = y\frac{m-2}{m-1}.$$

Ukažme ještě jak možno dospěti ku parabole (p) a tedy ke konstrukci středu křivosti parabol a hyperbol stupňů libovolných.

Položíme-li v rovnici (δ) $n = o$, $m = o$, pak rovnice ta ztrácí význam, ale hodnoty pro x_1 a y_1 nabývají tvaru

$$x_1 = 2x, \quad y_1 = 2y.$$

Tu vraťme se přímo k differenciální rovnici (3) a položme v ní

$$y_0 = 2y \quad a = 2x;$$

tím promění se v rovnici:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y}$$

t. j.:

$$l\frac{y}{x} = l\,Cy'$$

čili:

$$\frac{y}{x} = C\frac{dy}{dx}.$$

Integrací této rovnice obdržíme

$$l\,x = l\,y^C + l\,C,$$

t. j.

$$x = C_1 y^C,$$

aneb vzhledem k libovolným hodnotám konstant C a C_1

$$y = k\,x^n,$$

kdež k a n libovolná čísla značí; t. j: paraboly a hyperboly o rovnici předchozí oskulují v daném bodě s kuželosečkou, jejíž střed jest souměrný bod s počátkem souřadnic hledíc k dotyčnému bodu křivky a jejíž osy jsou rovnoběžny s osami souřadnic.

*

Sur le généralisation du théorème relatif à la parabole de Steiner.

(Extrait de l'article précédent.)

Le théorème de Steiner bien connu dit que la tangente, la normale et les axes d'une conique touchent une parabole et que le point de contact de la normale avec cette parabole est le centre de courbure au point respectif de la conique. Ce théorème peut être généralisé, comme il suit: La tangente et la normale au point A d'une courbe (k), et les droites perpendiculaires p, q, ayant, respectivement, les équations: $x = a$, $y = y_0$, sont tangentes à une parabole (p); le point de contact de la normale étant le centre de courbure de la courbe (k) au point A, pourvu que les quantités a, x_0, y_0 satisfassent à l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y'}{x_0 - x} - \frac{y'}{a - x} - \frac{dy'}{dx} = 0 \\ &\text{où, ce qui est le même:} \\ &\frac{dy}{y_0 - y} - \frac{dx}{a - x} = \frac{dy}{y'} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ici, x, y sont les coordonnées du point A, x_0, y_0 les coordonnées d'un point arbitraire de la tangente au point A de la courbe (k). De plus, le problème inverse est résolu: Deux droites perpendiculaires p, q étant données, d'après une loi déterminée, trouver la courbe dont la tangente et la normale au point A, aussi bien que les deux droites données, soient des tangentes d'une parabole (p) telle que le point de contact de la normale soit le centre de courbure de la courbe au point A. La courbe résulte de l'intégration de l'équation (3), dans laquelle deux des quantités x_0, y_0, a sont des fonctions des coordonnées déterminées par la position des droites p, q. La méthode générale est appliquée à des cas particuliers: aux coniques, aux courbes de Lamé, aux courbes à l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$, aux paraboles et hyperboles générales $y = Cx^k$.